

# Listing, Möbius y su famosa banda<sup>1</sup>

por

Marta Macho Stadler, Universidad del País Vasco–Euskal Herriko Unibertsitatea



La banda de Möbius es una superficie que, por sus extraordinarias propiedades, se utiliza en campos tan diversos como la matemática, el arte, la ingeniería, la magia, la ciencia, la arquitectura, la música, el diseño, la literatura, etc., ya sea de manera expresa o como una metáfora.

Simboliza la naturaleza recurrente de muchos procesos, la eternidad, el infinito, etc. Estaba ya presente en la iconografía alquimista como la serpiente mordiendo su cola –el ouroboros– el animal del eterno retorno.

## 1. Empezamos con unas pocas matemáticas

La banda de Moebius es una superficie (con borde): fue descubierta en 1858 de forma independiente por el matemático y astrónomo August Ferdinand Möbius (1790–1868) y por el considerado como fundador de la topología Johann Benedict Listing (1808–1882).

---

<sup>1</sup>Por cuestión de espacio, no puedo incluir muchas de las imágenes que me gustaría mostrar. Pueden consultarse en la presentación de la charla que ha dado lugar a este escrito en: <http://www.ehu.es/~mtwmastm/Listing,Moebiusysufamosabanda.pdf>



A. F. Möbius



Möbius, la banda y Listing

Si se toma una tira de papel y se pegan los extremos como muestra la figura de debajo, se obtiene un cilindro, es decir, una superficie que tiene como bordes dos circunferencias disjuntas y dos lados (la cara interior y la exterior de la figura).

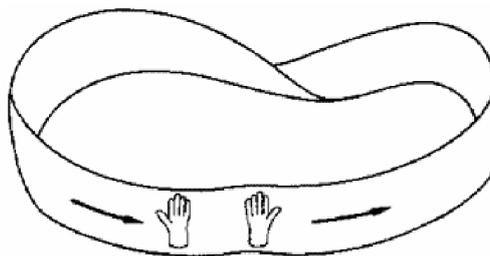


Si se hace lo mismo, pero antes de pegar los extremos se gira uno de ellos 180 grados, el objeto que se obtiene es una banda de Möbius.



La banda de Möbius posee dimensión dos —como el cilindro—, pero sorprendentemente tiene un único borde (el doble de largo: su longitud es la suma de las de las dos circunferencias que forman el borde del cilindro) y una única cara. Para comprobarlo, basta con pasar un dedo por el borde de la cinta, hasta verificar que se ha recorrido todo sin levantarlo en ningún momento; y pasar un lápiz por la cara de la banda, constatando que al regresar al punto de partida, las supuestas dos caras del objeto han quedado marcadas.

La banda de Möbius es no orientable: todas sus propiedades singulares (y de cualquier otro objeto que “la contenga”) se derivan de esta última propiedad. En efecto, si se dibuja una mano sobre la banda y se mueve a lo largo de su única cara, al regresar al punto de partida, ¡la mano ha cambiado de sentido!

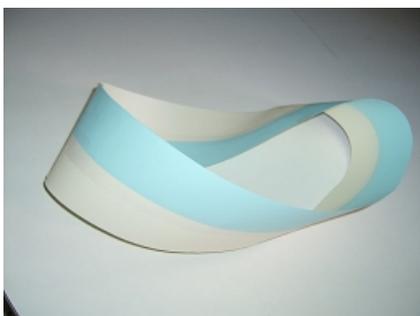


¿Qué sucede si antes de pegar los extremos de la banda de papel se gira uno de ellos 360 grados? Se obtiene (*topológicamente*) un cilindro, ya que este objeto y el obtenido al pegar sin realizar ningún giro son *homeomorfos*. Es fácil comprobar que, de hecho, sólo hay dos posibilidades al pegar una banda por dos de sus extremos opuestos: o bien se obtiene un cilindro (si antes de pegar los extremos, se gira uno de ellos un múltiplo par de 180 grados) o bien una banda de Möbius (en caso contrario).

Vamos a hacer un par de experimentos de extraño resultado. Si cortamos por la altura mitad un cilindro, se obtienen dos cilindros, la mitad de altos que el cilindro original:



Si se hace lo mismo con la banda de Möbius, parece que lo lógico sería obtener dos bandas de Möbius más pequeñas. Pero, no... se obtiene una única cinta, que es un cilindro, pues posee dos caras.



Al cortar por su tercera parte un cilindro, se obtienen dos cilindros igual de largos, de alturas un tercio y dos tercios de la original. ¿Y si se hace lo mismo con la banda de Möbius? Resultan una banda de Möbius (igual de larga y un tercio de ancha) y un cilindro (el doble de largo y un tercio de ancho) y enlazados.



La banda de Möbius es una superficie reglada, representada como subconjunto del espacio euclídeo de dimensión tres, mediante la parametrización

$$x(u, v) = \cos(u)\left(1 + \frac{1}{2}v \cos\left(\frac{1}{2}u\right)\right),$$

$$y(u, v) = \sin(u)\left(1 + \frac{1}{2}v \cos\left(\frac{1}{2}u\right)\right),$$

$$z(u, v) = \frac{1}{2}v \sin\left(\frac{1}{2}u\right),$$

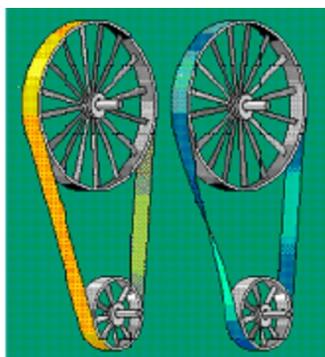
donde  $0 \leq u < 2\pi$  y  $-1 \leq v \leq 1$ . Con esta parametrización, su anchura es unitaria, su circunferencia central tiene radio 1 y se encuentra en el plano coordenado  $OXY$ , centrada en el origen de coordenadas.

<http://www.uv.es/busos/escher/escher.html>



Strip II, Escher

### 3. La banda en ciencia e ingeniería



En 1923, Lee De Forest obtuvo una patente norteamericana para una película de Möbius que grababa el sonido en ambas caras.

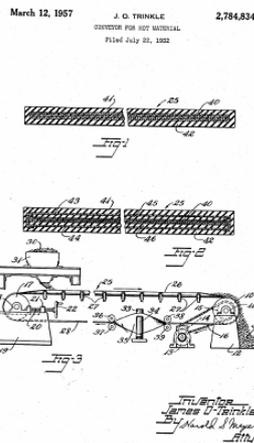
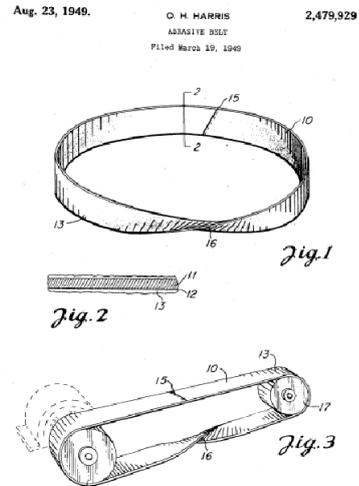
<http://en.wikipedia.org/wiki/Phonofilm>.

Esta misma idea se aplicó posteriormente para cintas magnetofónicas, que pueden grabar el doble de tiempo que las normales.

Owen H. Harris patentó en 1948 una correa abrasiva: “que incrementa la superficie de pulido o erosión, con una correa sin fin”. El espacio usado habitualmente para las correas abrasivas se podía reducir considerablemente.

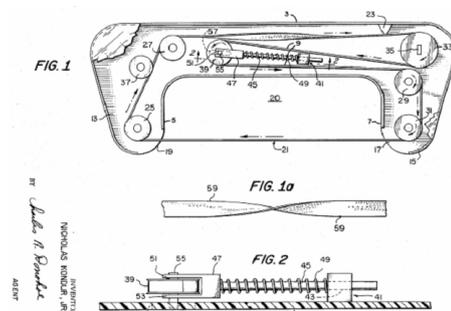
<http://www.pat2pdf.org/patents/pat2479929.pdf>

James O. Trinkle, patentó en 1957 una “transportadora para material caliente”. Trinkle trabajaba en ese momento en la B.F. Goodrich Co., y esta cinta transportadora flexible de Möbius estaba pensada para llevar materiales calientes como cenizas o arena de fundición.



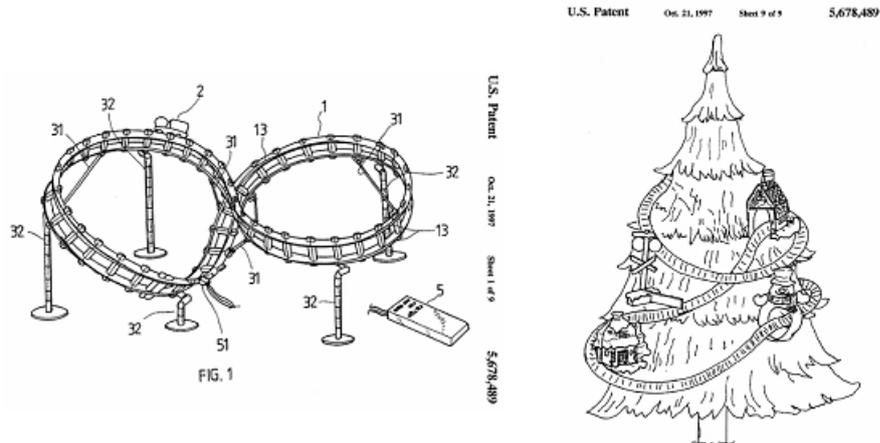
<http://www.pat2pdf.org/patents/pat2784834.pdf>

Nicholas Kondur Jr. patentó en 1971 un cartucho con cinta de Möbius de tinta: la banda tintada dobla su longitud efectiva. La tinta depositada en la cinta (que se mueve por medio de un rodillo transportador) puede rellenarse por medio de una almohadilla de tinta que está en contacto con ella.



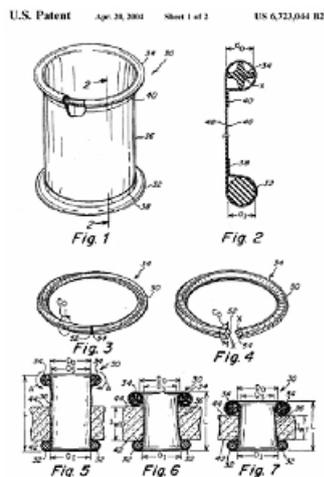
<http://www.pat2pdf.org/patents/pat3621968.pdf>

Xian Wang, patentó en 1997 el adorno que aparece debajo, operado de manera eléctrica y que viaja por un raíl. Incluye un raíl “sin fin” de dimensión 3, sostenido por una serie de soportes. Dos cables metálicos se extienden a lo largo de todo el raíl. Un cuerpo en movimiento con ruedas de material magnético está enganchado a los cables.



<http://www.pat2pdf.org/patents/pat5678489.pdf>

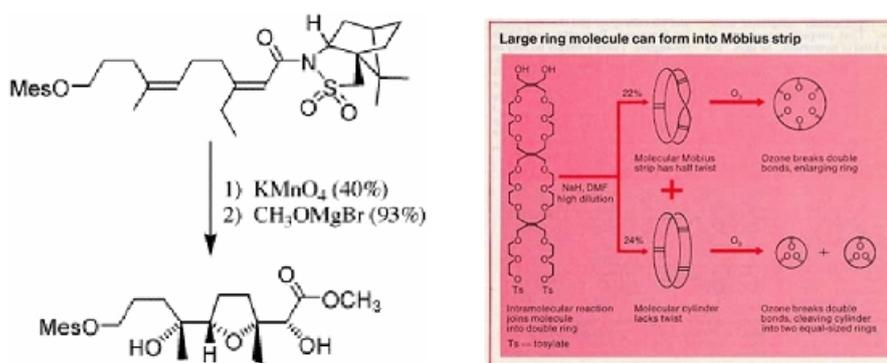
John C. Pulford y Marco Pelosi patentaron en 2004 este retractor ajustable, que posee un anillo interior, otro exterior separado del interior, y una manga alargada abierta en los extremos opuestos. El anillo exterior está provisto de una llave rotacional para ayudarlo a girar alrededor de su eje central, para rodar la manga alrededor del anillo exterior con el fin de ajustar su longitud. Este anillo exterior es de Möbius.



<http://www.pat2pdf.org/patents/pat6723044.pdf>

Esta ha sido una pequeña muestra de “patentes de Möbius”. Pero la “famosa banda” aparece también a otros niveles en ciencia.

La molécula de Möbius no se encuentra en la naturaleza, sino que se ha sintetizado en el laboratorio de David Walba y sus colegas. El proceso comienza con la síntesis de una molécula en forma de escalera con tres escalones (cada escalón es una cadena carbón-carbón doble). La escalera se curva hasta que sus finales se juntan para formar un lazo. En la mitad de los casos, el lazo es sencillamente una banda circular, pero en la otra mitad, el lazo es una banda de Möbius. Estas cintas moleculares de Möbius poseen las propiedades de las bandas de Möbius de papel.



<http://walba.colorado.edu/>

Investigadores japoneses de la Hokkaido University (S. Tanda, T. Tsuneta, Y. Okajima, K. Inagaki, K. Yamaya and N. Hatakenaka, *Nature* 417, 397–398, 2002) han demostrado que los cristales –conjuntos ordenados de átomos, iones o moléculas– pueden crecer en forma de bandas, incluso añadiéndoles algún giro. El equipo de S. Tanda ha conseguido sintetizar el conductor inorgánico niobium triselenide  $\text{NbSe}_3$ , primer cristal con estructura de banda de Möbius. Teóricamente, estas estructuras podrían ser útiles en el estudio de efectos topológicos de la mecánica cuántica.

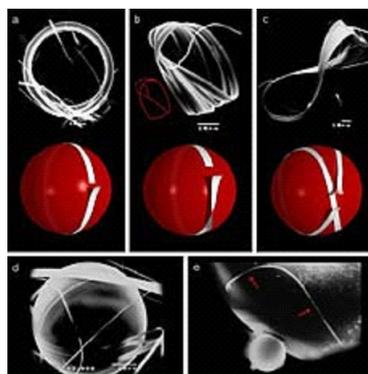


Foto: Diagrama Taku Tsuneta, Syujiro Mori

<http://exp-ap.eng.hokudai.ac.jp/~tanda/>

<http://www.reactivereports.com/26/images/mobius.jpg>

### 3. La banda en arquitectura

En arquitectura se pueden encontrar muchos ejemplos de proyectos basados en la banda de Möbius, en términos de forma y estructura o de manera espacial. Los conceptos que se manejan son el de la infinitud y la paradoja que rodean a la banda de Möbius, transportados en arquitectura a través de los giros, la continuidad y el dinamismo de las figuras. Estos conceptos tienen un gran potencial en arquitectura, aunque la gran dificultad de su puesta en marcha precisa pasar por el uso de técnicas informáticas variadas.

Vamos a dar algunos ejemplos: en algunos casos se trata de simples propuestas de construcción, en otros, las obras finalizadas sorprenden por sus propiedades estéticas.

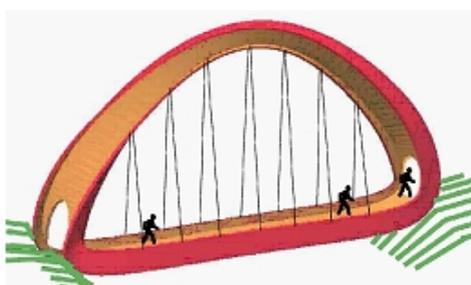
Carlo H. Séquin es catedrático de Ciencia de la computación en la Universidad de California en Berkeley, y posee varios proyectos arquitectónicos basados en la banda de Möbius, que pueden consultarse en

<http://www.cs.berkeley.edu/~sequin/SCULPTS/SEQUIN/moebius.html>



Moebius Escher Bridge, 2000

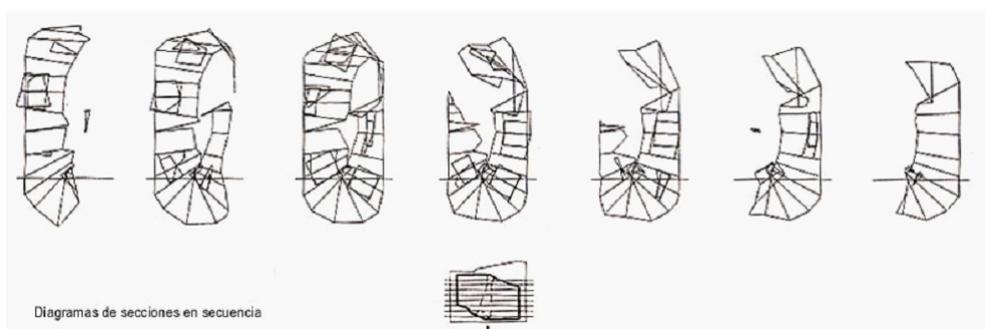
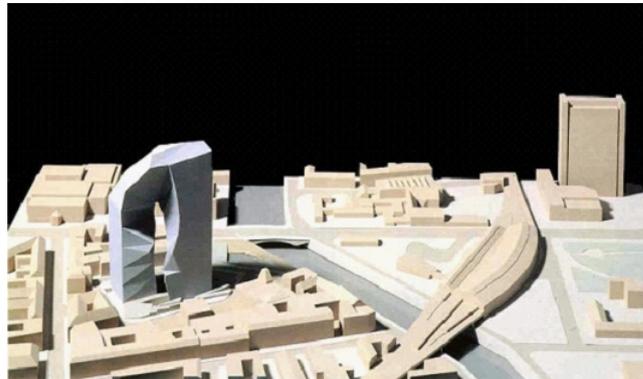
<http://www.cs.berkeley.edu/~sequin/GEOM/MATHmodels/bridge3.jpg>



Moebius Suspension Bridge, 2000

<http://www.cs.berkeley.edu/~sequin/GEOM/MATHmodels/MoebSuspBridge.jpg>

Peter Eisenman (<http://www.eisenmanarchitects.com/>) es pionero en la utilización de las formas de Möbius. Su proyecto más conocido es la *Max Reinhardt Haus* (1992–1994).



<http://www.geocities.com/arquique/peter/petermh.html>

El arquitecto Josep María Montaner comenta de esta obra: *“Mediante el proyecto del Max Reinhardt Haus, en uno de los lugares más céntricos del Berlín histórico, Eisenman propone un edificio que podría ser interpretado como un arco formado por dos torres siamesas unidas por la coronación, o por un único volumen caótico que posee una gran hendidura en forma de arco. A la manera de antimonumento, y como perversión y desestabilización de los ingenuos y puros rascacielos de vidrio que propuso Mies van der Rohe, Eisenman propone un edificio-masa, vertical y polifuncional, doblado sobre sí mismo, que surge del cruce de distintos paradigmas de la física: la fragmentación, el caos, el pliegue y las geometrías fractales. Un edificio que quiere proclamar la densidad y problematicidad que encarnan las metrópolis contemporáneas; una auténtica arquitectura del colapso.”*

La casa de Möbius del arquitecto Ben Van Berkel está ubicada en Het Gooi, zona cercana a Amsterdam. La vivienda se estructura en tres niveles y adopta aspectos del entorno y, desde el interior, los habitantes tienen la impresión de estar paseando por el campo. La percepción de movimiento se consolida a través de las distintas posiciones de los dos principales materiales utilizados en la casa: el vidrio y el hormigón, que se mueven uno frente al otro, intercambiando sus espacios de forma que, al girar el bucle desde dentro

hacia fuera, el entramado exterior de hormigón se transforma en mobiliario y escaleras en el interior, y la fachada de vidrio pasa a ser la división natural de las estancias.



<http://www.unstudio.com>

El Olympic Sports Center Stadium es uno de los cuatro estadios de fútbol que se han Construido para las Olimpiadas Beijing 2008. Situado en Shenyang, tiene su tejado con forma de banda de Möbius.



<http://en.beijing2008.cn/venues/oss>

El Lansdowne Road Stadium en Dublin, se comenzó a construir en 2005. HOK Sport Architecture son los arquitectos contratados, Buro Happold es su ingeniero de estructuras y Paul Shepherd (University of Bath, Reino Unido) ha colaborado en su diseño.



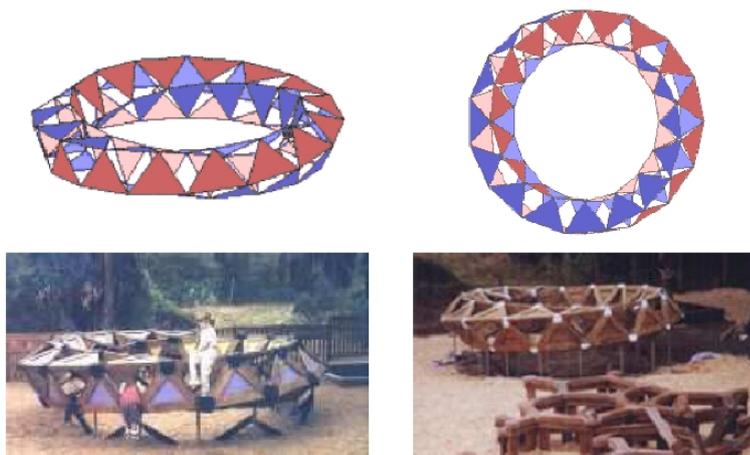
[http://people.bath.ac.uk/ps281/projects/es\\_index.htm](http://people.bath.ac.uk/ps281/projects/es_index.htm)

El Puente de Möbius en Finzels Reach (Bristol), diseñado por Julian Hakes en colaboración con Buro Happold, proporcionará un enlace peatonal entre el Finzels Reach y el Castle Park. Está inspirado en la banda de Möbius, y construido como una pieza tubular sin costuras y retorcida, que es física y estructuralmente independiente de las dos orillas (diseño 2004).



<http://www.hakes.co.uk>

#### 4. La banda en diseño



<http://www.wolfram.com/products/mathematica/usersanduses/experience/mobius.html>

Con ayuda del programa *Mathematica*, Gerald Harnett (Florida Atlantic University), diseñó este *Möbius climber*, calculando como debían colocarse los

64 triángulos que la forman: están enlazados y montados de tal manera que, en cada punto, la estructura torcida parece tener 4 caras (en realidad tiene 2). La construcción se encuentra en Boca Ratón (Florida): en esta variante en dimensión 3 de la banda de Möbius, los niños pueden trepar y jugar.

*Mobius® Climber*, es una banda ondulada de aluminio preparada para trepar. Está fabricado por la industria CoolToppers. Existen cuatro configuraciones, que permiten adaptar el nivel de dificultad a los diferentes grupos de edad.



<http://www.neatorama.com/2008/02/28/mobius-climber/>

*Vital Signs* es una instalación interactiva diseñada para dar noticias de ciencia a los visitantes del museo *Liberty Science Center*. Es una banda de Moebius de plástico, sobre la que se proyectan informaciones que los visitantes pueden apreciar desde cualquier lado del atrio.



<http://www.open-work.com/clients/LSC/index.html>

Este bellissimo *Moebius Ship* de Tim Hawkinson está en el Museum of Contemporary Art, en Sydney (Australia). Promete un maravilloso viaje sin fin...



La *mesa de café Moebius* está compuesta por una base en madera vetada y una superficie de cristal suspendida. La forma de la base crea una delicada sensación de movimiento que mezcla la forma rítmica con la función simple.



<http://www.dwr.com/product/moebius-table.do>

El *anillo de Moebius en oro* atrae la prosperidad y proporciona una “iluminación” especial a su dueña. Este anillo de sólo un lado, es un símbolo de la unidad y se recomienda para matrimonios eternos.



La United Nude es una firma de diseño de zapatos creada por el arquitecto holandés Rem Koolhaas, con la ayuda del zapatero inglés Galahan Chank. Ha fabricado estas sandalias de Möbius, un zapato de culto, que en una misma tira cumple la función de suela, tacón y sujetador del pie: la parte de dentro es la de fuera... y la de fuera la de dentro.



<http://www.unitednude.com/>

El artista suizo Max Bill estaba trabajando en 1935 en distintas posibilidades estéticas para una escultura colgante, cuando creó un objeto de una

sola cara al que llamó *Unendliche Schleife* (cinta sin fin), sin ser consciente de que tales superficies se conocían desde hacía un siglo. Se comenta que sintió tal frustración al saber que él no había sido el inventor de esta forma, que pasó una larga temporada sin trabajar sobre ella.



*Unendliche Schleife*, 1953–1956, Bronce, Museo de Amberes y *Endless Ribbon*, 1953, Granito, Museum of Art en Baltimore

El *Moebius bench* (banco de Möbius) en Fukuroi City (Japón) ha sido construido por el artista Vito Acconci (<http://www.acconci.com/>).



Y terminamos esta sección con tantas construcciones, con unos ocupados (por supuesto, con casco,... por seguridad) play-mobil caminando por una banda de Möbius de LEGO de Andrew Lipson.

<http://web.archive.org/web/20040211064801/www.lipsons.pwp.blueyonder.co.uk/lego.htm>



## 5. La banda y la música

Hay varios grupos musicales, que en su nombre, en sus creaciones, en las carátulas de sus discos, juegan con la banda de Möbius.



Pero la “famosa banda” tiene una relación mucho más directa con la música. Por ejemplo, en el enigmático Canon 1 a 2 (1747) de la *Musikalisches Opfer* de Johann Sebastian Bach (1685–1750), se ejecutan de manera simultánea los dos caminos de ida y vuelta de la partitura, lo que da lugar a dos voces, cuya simetría determina una evolución reversible. Puede verse una preciosa animación de esta pieza en <http://www.josleys.com/>, creada por Jos Leys.



Johann Sebastian Bach



Nicolas Slonimsky (1894–1995) fue profesor y compositor. Posee una pieza llamada *Moebius Strip Tease*, obra para dos cantantes, con piano:

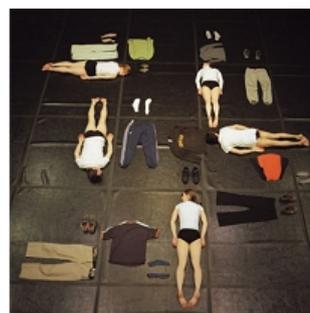
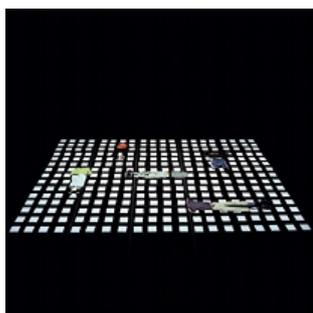
<http://www.carliner-remes.com/jacob/math/project/sounds/slon.mid>

*Ach! Professor Möbius, glörious Möbius // Ach, we love your topological, // And, ach, so logical strip! // One-sided inside and two-sided outside! // Ach! euphörius, glörius Möbius Strip-Tease!*

La música rota para cada cantante (con instrucciones muy precisas) el interior se hace exterior y viceversa. La pieza es un rondó perpetuo y unilaterial. La música para cada cantante se copia en una tira de papel, que se dobla en forma de banda de Möbius.

## 6. La banda y el mundo del espectáculo

*La cinta de Moebius* es una coreografía de la compañía suiza de Gilles Jobin. El coreógrafo toma el título como símbolo de lo eterno, renuncia a la idea de progreso –la verticalidad– para investigar la horizontalidad en el escenario.



<http://www.gillesjobin.com/spip.php?rubrique18>

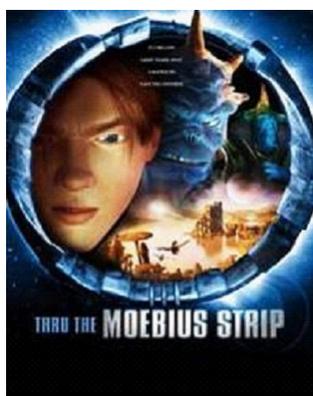
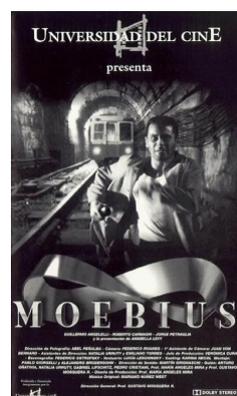
<http://objet-a.blogspot.com/2008/03/to-dance-more-moebius-strip.html>

*Time Squared* es el episodio número 39 de la serie de televisión *Star Trek: la siguiente generación*. En este episodio, la tripulación del Enterprise encuentra un doble del Capitán Picard que viene del futuro, con 6 horas de diferencia. El Enterprise va a entrar en un vórtice de energía y va a ser destruido. El Teniente Wolf dice: “*Existe la teoría de Möbius, un giro en la estructura del espacio donde el tiempo se transforma en un lazo del que no se puede escapar...*”.



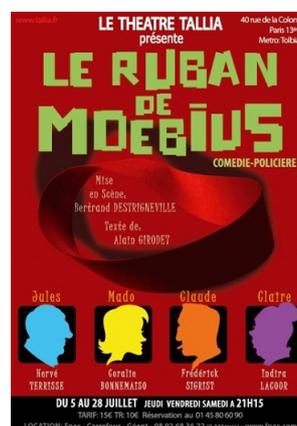
Basada en el cuento fantástico de A.J. Deutsch *Un metropolitano llamado Moebius*, la película argentina *Moebius*, de Gustavo Mosquera, narra la inexplicable desaparición de un tren lleno de viajeros en la red de vías del metro de Buenos Aires. El protagonista es un joven matemático enviado por el despacho de arquitectos que se encargó de las últimas ampliaciones de la red de metro que, buscando los planos de la ampliación, encontrará la pista de un antiguo profesor y una disparatada teoría matemática.

<http://www.divxonline.info/pelicula/1712/moebius/>



*Thru the Moebius Strip* (2005) es la primera película de animación 3D realizada en China, dirigida por Glenn Chaika. Narra las aventuras de Jac, un chico de 14 años que, incapaz de aceptar la muerte de su padre, se embarca en un viaje en su busca. Así llega al planeta Raphicca, donde descubre que su padre está prisionero en un reino de extraterrestres gigantes que creen en la magia y en un milenar código medieval de caballería. La historia viene firmada por el dibujante francés Jean Giraud, *Moebius*.

La obra *La cinta de Moebius* de Alain Girodet es una pieza para cuatro personajes: Mado, Claire, Jules y Claude. Es una comedia policial, con toques de humor y crítica mordaz, se comporta como una banda de Möbius: el argumento gira y se altera, con sorpresas incesantes. Mado, la esposa del barón Jules Voltereine, invita a Claude, un vagabundo del barrio, a pasar la tarde en su lujosa casa. Los dos personajes conversan, discuten, se insultan a veces, presentando sus historias personales. Claude había sido profesor de matemáticas, despedido porque, en sus propias palabras, “*Me había pasado un trimestre hablando de la banda de Moebius*”. Éste era el motivo oficial aunque, en realidad, su cese estaba motivado por haber enseñado su colección de fotos eróticas a sus alumnos. Hay enredo, mentiras, intento de asesinato... y varias bandas de Möbius. Puede encontrarse el libreto completo en la sección de *Teatro y matemáticas* de DivulgaMAT (<http://www.divulgamat.net/>).



En *Magia* (ver <http://chuck.charleshart.net/Mathomagic.php>), existen numerosos trucos con la banda de Möbius, que se deducen de sus propiedades paradójicas: se denominan *Afghan Band*. Como ejemplo, se cortan tres tiras de papel que se marcan con las letras A y B (blanca), C y D (azul) y E y F (crema) en su extremos. Se colocan una sobre otra, se gira uno de los lados 180 grados y se pegan A con F, B con E y C con D. ¿Qué sucede?



## 7. La banda y la literatura

Luc Étienne (1908–1984) inventó una divertida manera de crear poemas con ayuda de la banda de Möbius: en la primera cara de una banda de papel rectangular (al menos 10 veces más larga que ancha) se escribe la mitad de la poesía:

*Trabajar, trabajar sin cesar, // para mi es obligación // no puedo flaquear,  
// pues amo mi profesión...*

Se gira esta tira de papel sobre su lado más largo (es esencial), y se escribe la segunda mitad del poema:

*Es realmente un tostón // perder el tiempo, // y grande es mi sufrimiento,  
// cuando estoy de vacación.*

Se pega la tira para obtener una banda de Möbius y sobre ella se lee (sólo tiene una cara) algo con sentido “opuesto” a la suma de los dos poemas anteriores:

*Trabajar, trabajar sin cesar, es realmente un tostón // para mi es obligación  
perder el tiempo // no puedo flaquear, y grande es mi sufrimiento, // pues  
amo mi profesión... cuando estoy de vacación.*

En *El muro de oscuridad* de Arthur C. Clarke, en un mundo poblado sólo por una estrella y el planeta Trilorne, existe un muro que rodea la parte habitada; ¿qué hay del otro lado? Trilorne... por la forma del muro.

*El disco*, de Jorge Luis Borges, es el anillo de Odín, de una sola cara.

En *Flutterland* de Ian Stewart, la vaca *Moobius* posee una larga cola pegada a su nariz: Moobius no es orientable.

*Möbius Dick*, de Andrew Crumey, es novela que relaciona las vidas de los Thomas Mann, Erwin Schrödinger, Hermann Melville, Robert Schumann... ¿son realmente diferentes personajes?

## 8. La banda en la vida cotidiana

Hasta la naturaleza imita a la “famosa banda”: éstas son las *Arches of Alamaba Hills*, en California:



El símbolo del reciclaje, que consiste en tres flechas que se persiguen sobre las aristas de un triángulo, no es más que una banda de Möbius. Fue creado por Gary Anderson en 1970, y representa el proceso de transformación del material de deshecho en recursos útiles.

[http://en.wikipedia.org/wiki/Recycling\\_symbol](http://en.wikipedia.org/wiki/Recycling_symbol)



Muchas empresas poseen de *logotipos de Möbius*:



Hay bandas de Möbius en medicina o en cerveza energética, que es perfecta para noches interminables (<http://www.mobiusbeer.com/>)...



La ropa adapta sus formas a la Möbius para “envolver” mejor:



## Bibliografía

- [1] C. Pickover: *The Möbius Strip*, Thunder's Mouth Press, New York, 2006.  
 [2] C. Séquin: *To Build a Twisted Bridge*,  
<http://members.tripod.com/vismath4/sequin/index.html>  
 [3] J. Thulaseedas y R.J. Krawczyk: *Möbius Concepts in Architecture*, 2002,  
<http://www.iit.edu/~krawczyk/jtbrdg03.pdf>

**Marta Macho Stadler**  
 Universidad del País Vasco  
 Euskal Herriko Unibertsitatea  
 Facultad de Ciencia y Tecnología  
 Departamento de Matemáticas  
 Barrio Sarriena s/n. 48940 Leioa  
 e-mail: [marta.macho@ehu.es](mailto:marta.macho@ehu.es)  
<http://www.ehu.es/~mtwmastm/>

