Música y matemáticas

por

Carlos Satué y Carlos Frías

1. Introducción

1.1 Rápida visión de ciertos referentes históricos

Al hablar de música y matemáticas es de obligado cumplimiento nombrar en primer lugar a Pitágoras de Samos (ca 570-497 AC); música y aritmética estaban incluidas en una disciplina común. La escuela Pitagórica estaba interesada sobre todo en las relaciones interválicas entre dos sonidos. El monocordio servía para experimentar y establecer relaciones de proporcionalidad entre las distintas particiones a las que se sometía la cuerda (cuando hablamos de partición nos referimos a puntos donde apoyaban con objeto de conseguir un sonido diferente, no a cortes de la propia cuerda) y los sonidos que obtenían con éstas, buscando a la par la relación numérica que las unificaba en un todo superior. El descubrir que la subdivisión de la cuerda en partes cuyas longitudes estaban en proporción daba lugar a sonidos armoniosos, propició la idea de que el número era el motor del mundo. Debemos hacer referencia igualmente a Platón (ca 427-347 AC) con su música de las esferas comentada en La República. También a Aristógenes (ca 320 AC) quien trabajó con la idea de temperar los tetracordios microinterválicamente.

Quizá tengamos que saltar al quadrivium medieval si queremos buscar una relación clara entre música y matemáticas; sin embargo la música práctica ya hace tiempo que camina lejos de la puramente especulativa y cada autor tiene reglas comunes al movimiento estético que sigue y otras propias a la manera de trucos artesanales de tipo empírico. Puesto que la música necesita de las matemáticas explícita o implícitamente, nombraremos de pasada algunos de los compositores en los que se atisban elementos que relacionan ambas disciplinas. No quisiéramos pasar por alto los grandes aportes musicales del Ars Nova, en el siglo XIV, con su gran figura Guillaume de Machaut y aunque esto es una apreciación personal, su Misa de Nôtre Dame contiene estructuras quasi-geométricas. El renacimiento, con la polifonía franco-flamenca marcha teniendo en cuenta relaciones interválicas entre la distintas voces en movimiento y aunque éstas obedecen a reglas concretas, tienen más relación con el dominio del oficio que con posibles inspiraciones en modelos matemáticos. El periodo Barroco aporta sobre todo la jerarquización de la música en torno a un centro tonal y esto no es casual pues en este periodo se desarrolla la ley de la gravedad. Nombraremos a Marín Mersenne (1588-1648) filósofo, teólogo, matemático y músico descubridor de los números primos que llevan su nombre. En *L'armonie universelle* (1627) escribe sobre la teoría musical y los instrumentos y propone como razón principal del semitono $\sqrt{\sqrt{\frac{2}{3-\sqrt{2}}}}$. Deberíamos nombrar también como grandes figuras de la música barroca en un primer periodo a Claudio Monteverdi (1567-1643) gran maestro de la imitación (podría verse como geometrías que se desplazan en un espacio de coordenadas cartesianas) y J.S. Bach (1685-1750) en el último, periodo este en que las matemáticas ayudan a determinar el sistema del temperamento casi como nos ha llegado a nuestros días. La música de J.S. Bach es caso aparte sobre todas las otras, en ella podemos encontrar de un modo u otro muchos elementos que tendrán cabida en teorizaciones futuras (aunque por supuesto, el propio J.S. Bach no fuese consciente de ello); sin ir más lejos podríamos decir que su música está llena de arquitecturas que semejan a estructuras fractales.

En el periodo clásico aparecen razones áureas más o menos redondeadas en Mozart, como en la sonata para piano número 1, subdividiendo su primera sección en 38 y 62 compases 62/38=1.6315 lo que difiere en un 1 % de la proporción en cuestión. En Beethoven (1770-1827) se dice que el tema principal de su quinta sinfonía va apareciendo a lo largo de la obra teniendo en cuenta la proporción áurea. Debemos decir que este tipo de proporción se ha utilizado en música desde mucho antes, e incluso cada autor la ha trabajado a su manera. Es considerable el trabajo de B. Bartók (1881-1945) en relación a la proporción áurea en su magistral *"Música para cuerdas, percusión y celesta"*. Podríamos citar procesos aleatorios utilizados en composición, ya en el siglo XVIII, a través de tablas numéricas que mediante la tirada de dados ordenaban una cierta composición (valses); ello funcionaba porque en realidad eran variaciones sobre una misma base armónica.

Podría decirse que las matemáticas se utilizan en música como base primera en una producción de reglas que servirán para regular el discurrir de los sonidos e incluso producirán a posteriori un tipo especial de estética. Esta forma de aproximación de disciplinas en cierto modo ha existido siempre. Las leyes del contrapunto, de la armonía, podrían incluirse en este apartado. El agotamiento de una corriente estética obliga a introducir normas nuevas o a revisar la viejas con objeto de conseguir nuevos resultados.

Ya en el siglo XX, con el agotamiento del sistema tonal y la aparición de la atonalidad y el dodecafonismo, es necesario echar mano de procedimientos todavía artesanales pero con un mayor acercamiento al mundo de las matemáticas, pues se comienza a trabajar con listas de letras, números, y otro tipo de símbolos que, aunque se habían utilizado de un modo u otro con anterioridad, van a tener nuevas connotaciones. Con la llegada del serialismo integral todo esto se hace más patente puesto que las viejas reglas compositivas deben ser sustituidas por otras nuevas mucho más cercanas a los procedimientos abstractos de la matemáticas. Sin embargo deberemos esperar a la figura de Iannis Xenakis (1921-2001) para que esta relación entre música y matemáticas adquiera un tinte nuevo y se abra un camino de procesos fuertemente enraizados en el ámbito del número como quizás nunca antes se había conocido. A ello contribuye sin lugar a dudas el desarrollo de la computación sin la cual hubiese sido muy difícil abordar este tipo de obras.

Por otro lado, posiblemente a partir de Xenakis haya una percepción puramente estética de ciertos procedimientos matemáticos que necesitan pasarse al ámbito musical. Cierto es que esto también podríamos encontrarlo con anterioridad si pensamos que la utilización del número áureo en una pieza comportaba una cierta adscripción estética hacia algo enigmático y musicalmente poco explícito; sin embargo, la coherencia de la pieza, con raras excepciones, no estaba basada sólo en ello. Xenakis siente profunda admiración por la estética del pensamiento matemático y es con posterioridad cuando busca que los números expliquen la absoluta trabazón interna de su obra. A partir de este autor las adscripciones a la estética musical basada en los números no han hecho sino aumentar. El gran desarrollo de los ordenadores personales ha multiplicado el efecto pues ha resuelto el problema tan arduo que suponía el cálculo manual.

Por lo tanto hay dos facetas importantes en la relación de música y matemáticas: por un lado, la necesidad de arquitecturar música mediante leyes que surgen de forma consciente o inconsciente de las matemáticas; por otro, el acercamiento a éstas por el propio hecho estético de las mismas (las matemáticas son bellas). Pensemos en un haz de curvas en el espacio que nos resultan altamente atractivas y especulemos rápidamente con la posibilidad de que éstas sean una representación gráfica de un hecho musical. De manera más abstracta ciertas formulaciones pueden igualmente producirnos un efecto estético. En la mayoría de los casos se unen ambos procedimientos.

1.2 El gran legado de Xenakis

Sin lugar a dudas Iannis Xenakis ha sido el gran impulsor de la aplicación de conceptos matemáticos a la música en el pasado siglo XX. Basta leer sus escritos de música y arquitectura o sobre todo *Musiques formelles* (que es posible descargar gratuitamente desde su página ***www.iannis-xenakis.org***) para darnos cuenta de ello. La gran incomprensión que sufrió este autor al comienzo de su periplo compositivo se transforma en la actualidad en la gran obra de un visionario. Terriblemente criticado al comienzo de su carrera, quizá por la idea equivocada según pensaban otros compositores de que daba prioridad al hecho matemático antes que al puramente musical (entendido bajo la idea de hecho emocional y carente de explicación racional o de una aclaración que no va más allá del de mero oficio artesano en dicha materia). Cuando oímos sus obras (sobre todo cuando son bien interpretadas en vivo) nos damos cuenta de la anticipación temporal de este compositor. Su gran aportación, sobre todo, radica en la utilización de numerosas técnicas compositivas basadas en las matemáticas que hoy todavía se utilizan o se redescubren por compositores que han tomado caminos de esta índole. Quizá para un matemático no exista un gran interés pues al fin y al cabo no hay ningún tipo de invención, pero desde el punto de vista musical ha sido un fuerte revulsivo y gracias a la aplicación de técnicas que citaremos con posterioridad hemos podido oír músicas jamás escuchadas anteriormente.

Iannis Xenakis utiliza para algunas de sus obras la lógica simbólica, la teoría de conjuntos, la de acontecimientos en cadena, la de juegos y otras muchas. Trabaja habitualmente con cálculos de entropía, matriciales, vectoriales y otros; leyes de Poisson, Gauss, Markov,... Otros factores importantes son la formalización y axiomatización del proceso compositivo. Como se ha comentado, Xenakis es uno de los primeros compositores en buscar la ayuda de los ordenadores para las tareas de cálculo. Por otra parte tiene en cuenta cuantos procesos de tipo filosófico pueden resultar significativos en la elaboración de sus piezas y contempla la importancia de la intuición y de los afectos en el hecho compositivo (lo que desbancaría las críticas comentadas al comienzo del este apartado). Citamos sus palabras en *Conclusiones y extensiones de Musiques formelles: "Hacer música significa expresar la inteligencia humana por medios sonoros. Inteligencia en su sentido más amplio que comprende no solamente los caminos de la lógica pura, sino también los de la lógica de los afectos y de la intuición"*.

1.3 Lógica confluencia de la música hacia los fractales

No podemos asegurar que Xenakis trabajase música a partir de modelos fractales. También es complicado dar nombres de los primeros músicos que se acercan a los mismos. El fenómeno fractal, aunque con otros nombres, comienza su andadura en torno al comienzo del siglo XX aunque algunos de los conceptos eran conocidos desde mucho antes. Sin embargo, hasta la aparición de las computadoras y la experimentación de estas técnicas con las mismas, no podemos hablar del gran desarrollo que experimentarán esta clase de objetos. ¿Qué es lo que los hace tan interesantes desde el punto de vista musical? Quizá sea la quimera de los compositores en la eterna búsqueda de la unidad absoluta de la obra. La característica de la autosemejanza que estos objetos ofrecen es altamente tentadora y alberga esperanzas de tal unidad absoluta (los fractales son universos autocontenidos). Una vez que conocemos técnicas para la aplicación musical de estos objetos a la música, nos damos cuenta de cuan difícil y escurridiza es la unidad absoluta. A pesar de ello, las herramientas que brindan este tipo de objetos matemáticos resultan fascinantes a la hora de hacer música y es difícil no intentar algo con ello. En la actualidad son muchos los músicos que se han acercado a los fractales buscando respuestas, tomando cada uno aquello que más le ha interesado. Por ello hay de todo, desde compositores que han visto en ellos únicamente elementos decorativos extraños con los que producen músicas banales, hasta otros que perciben cómo estos objetos de gran calado pueden dar respuesta a sueños perseguidos durante años.

1.4 La intuición de Francisco Guerrero y la razón de Miguel Ángel Guillén. Aplicación a la música de algunos fractales tales como el movimiento browniano

Francisco Guerrero (1951-1997) utiliza el cálculo matemático para la elaboración de sus obras, a pesar de su gran intuición musical que constantemente modula su proceso creativo. La utilización de las matemáticas para construir sus piezas podríamos decir que arranca en un nivel serio con técnicas combinatorias (deduce todo tipo de parámetros musicales a través de ello). Tiene otra fase en la que conceptos de índole topológica llaman poderosamente su atención, tales como la utilización de diversos objetos con texturas diferentes produciendo toros u otro tipo de arquitecturas con mayor relevancia geográfica en la pieza que de otro tipo. Realiza algún intento con redes neuronales que abandona por no satisfacerle los resultados. Rápidamente descubre el movimiento Browniano como fractal que le brinda un juego musical jamás sospechado y junto a Miguel Ángel Guillén (1962-2007), ingeniero, amigo y colaborador que le acompañará hasta el final de sus días y el responsable de la informatización del proceso (programaciones), Francisco Guerrero puede hacer obras de música basadas en este tipo de fractal.
Nuestra llegada a este tipo de objetos es a partir del gran entusiasmo que

Francisco Guerrero proyectaba en sus alumnos respecto de los fractales. Con posterioridad, cada uno ha entendido el fenómeno bajo lecturas diversas y lo ha amoldado a su lenguaje de forma diferente.
Guerrero pensaba que su composición ideal tendría que estar expresada en una fórmula, algo sencilla gráficamente y donde subyaciera una gran complejidad; conceptualmente, un espacio abstracto con capacidad para producir el todo (Alfonso Casanova, alumno de Francisco Guerrero).
Para concluir este apartado, dejamos un pensamiento de F. Guerrero: *"Quiero desarrollar la música de la misma forma en que se desarrolla un árbol"*.

1.5 Algunas puntualizaciones sobre la corriente espectral

Es una estética musical surgida en Francia alrededor del último cuarto del siglo pasado y cuyo personaje más relevante quizá sea Gerard Grisey (1946-1998). Esta estética busca los modelos compositivos en fenómenos físico-acústicos. Las matemáticas son una ciencia auxiliar que sirve para proyectar en el terreno musical fenómenos que suceden en la física del sonido (puede ser de gran complejidad y la herramienta más interesante es la transformación rápida de Fourier). Fenómenos de tipo armónico, resonancias, retardos, etc. son referentes que trasladarán a su música. Cálculo con senoidales, derivación, integración, etc... Posiblemente la obra paradigmática sea *"Los espacios acústicos"* de Gerard Grisey. Dicha pieza consta de 6 números: Prólogo, Periodos, Parciales, Modulaciones, Transitorios y Epílogo. Como indican los títulos, se hacen constantes alusiones a fenómenos relativos al sonido físico.

1.6 Desdibujado de los límites entre música, acústica y matemáticas

Hoy en día los límites de muchas disciplinas están diluidos y podemos pasar de un dominio a otro con suma facilidad. Queremos hacer fuerte hincapié en ello en relación al trabajo que hemos ido desarrollando a lo largo de los últimos años. Podemos partir de un sonido como fenómeno físico, hacer su análisis espectral mediante la FFT (*Fast Fourier Transformation*) y obtener así un determinado número de parciales, representados como listas de alturas-tiempo, que a su vez podemos representar en un plano complejo (habitualmente X para expresar el tiempo e Y para los valores de las alturas). A partir de ahí, podemos aplicar todo tipo de operadores matemáticos a cada punto de cada una de las curvas que representan el discurrir del sonido o el discurrir de las notas de una partitura que hemos codificado numéricamente, de modo que consigamos un sinfín de transformaciones y de especulaciones en un territorio músico-matemático. También es posible operar inversamente: a partir de una secuencia de números podemos producir un objeto musical o una determinada onda sonora.

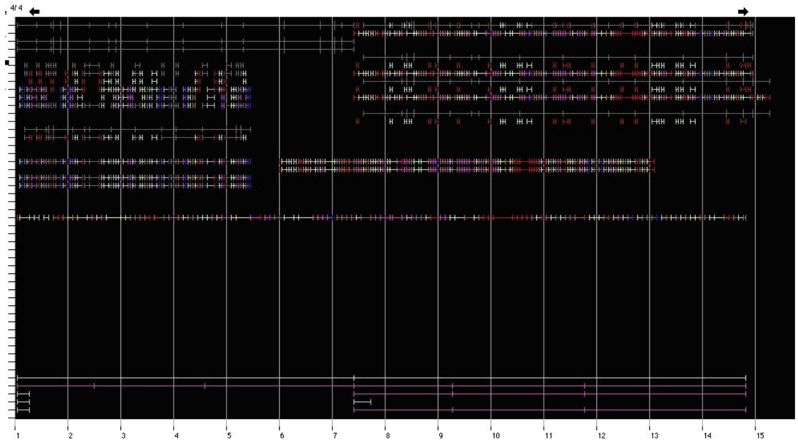
1.7 Sistemas de proporciones como procedimiento de control de una obra

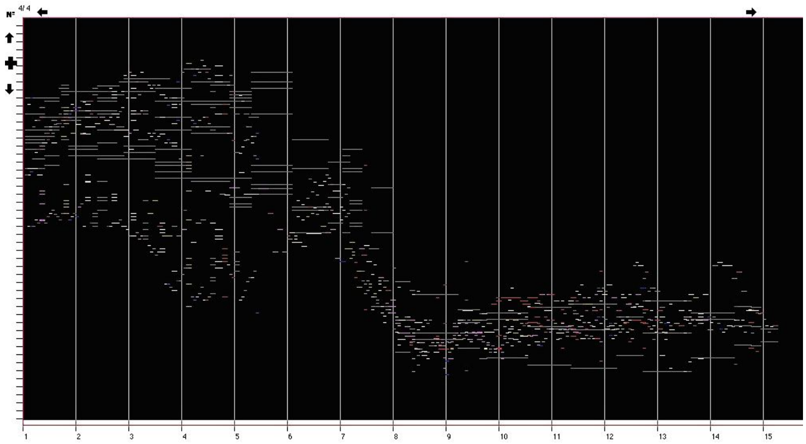
Una de las aplicaciones matemáticas más comunes en la música es operar con un determinado sistema de proporción. Un mismo cociente relaciona los distintos parámetros que hay en juego. Proporciones de figuras, de tiempos, de duraciones de alturas, etc. Quizá sea la aplicación matemática más común en el mundo del arte; pensemos por ejemplo en la más trillada de todas las proporciones, la áurea o Φ en forma de sucesiones fibonaccianas o relaciones con $\sqrt{5}$. La proporción de los objetos satisface la idea de orden. El mismo concepto de armonía se basa en una proporción respecto de las verticales sonoras. Este concepto es susceptible de aplicarse a cada uno de los parámetros musicales y ofrece un juego inagotable.

2. Diversas técnicas para la obtención de material musical con auxilio de las matemáticas y la informática

A partir de este punto hablaremos de algunas experiencias propias y concretas en relación a la aplicación de conceptos matemáticos al mundo de la música. Intentaremos en lo posible no repetir lo que ha aparecido con anterioridad en otros artículos de los que daremos cuenta al final del escrito. Antes que nada, algunas consideraciones sobre el trasvase numérico a lo que hemos dado en llamar "partitura virtual". Los datos obtenidos desde diversas fuentes y/o desde los propios programas son codificados de manera gráfica para hacer más maleable cualquier proceso o cálculo de transformación que deseemos hacer. A continuación, en la imagen que sigue, damos cuenta de las codificaciones de los distintos parámetros y de sus posibles lecturas; se tratan sólo los aspectos más relevantes y que hagan posible seguir los ejemplos que aparecerán a lo largo de este escrito.

Cada una de las líneas horizontales corresponde a un instrumento. La duración temporal viene marcada por las pequeñas líneas verticales que las cortan y el material (que podríamos definir como el abstracto de una serie de cualidades ligadas a él que lo identificarán y lo harán único) está definido por el color (aunque el color es susceptible de otro tipo de interpretaciones). Las grandes líneas verticales definen un compás (numerados abajo) y generalmente se corresponden con un número de 22 "casillas" de duración. En esta visión, que llamamos de "materiales-duración" es posible abarcar la totalidad de una plantilla instrumental y controlar así los momentos de encuentro y desencuentro entre cada una de las líneas instrumentales o familia de las mimas. Los espacios vacíos indican silencio (ver cuadro 1, debajo).





Ésta (ver cuadro 2 a la derecha) es la visión que llamamos "altura-duraciones-material". Aquí, las líneas en su lectura horizontal siguen determinando una temporalidad, pero su lectura vertical nos muestra las diferentes alturas de dichas secuencias: las alturas ocupan la totalidad del espacio vertical y éste está numerado de 1 a 127 (ó 254 si se trabaja con cuartos de tono). Los extremos verticales vienen dados por la codificación MIDI y aunque sobrepasan por ambos lados las posibilidades reales de los instrumentos de la orquesta nos pueden servir a la hora de trabajar en obras electroacústicas en las que intervengan instrumentos electrónicos que tengan dicha tesitura.

2.1 Obtención de material musical a partir de lectura de imágenes

Se trata de un sistema sencillo de gran intuición práctica que nos permite extraer de una imagen cualquier punto de un determinado color. Su utilización está pensada para operar con imágenes de diversa procedencia. Por otro lado, en nuestro caso no existe ningún interés en trabajar sino con imágenes cuyo origen responda a representaciones con una fuerte coherencia interna, generalmente procedentes de algoritmos matemáticos (curvas fractales en la mayoría de los casos). Ello responde a una idea práctica consistente en el aprovechamiento de las imágenes que pueden ser generadas por la gran cantidad de software ya escrito y que permite trabajar con infinidad de fórmulas y algoritmos. A continuación comentaremos algunos de los problemas

más comunes que encontramos en la utilización de esta técnica aplicada a la música.
Si la imagen es de gran calidad (supongamos de 16.8 millones de colores) y pedimos al algoritmo que nos atrape un determinado color rápidamente nos percataremos de la gran dificultad de extraer algo coherente. Por lo general nuestro intento se reduciría a un punto aquí, otro allí y poco más. No tenemos más remedio que comprimir la gran paleta de colores a otra más sencilla. Supongamos a una de 254 o de 128 colores (trabajando en el ámbito musical 128 colores son todavía muchos, así la mayoría de las veces se hace una compresión más drástica y se utilizan sólo unos pocos; más adelante detallaremos la fórmula utilizada en esta compresión). Al pasar de 16.8 millones a 254 ó 128 nos percatamos rápidamente que toda la magia que percibíamos ha desaparecido y en su lugar no tenemos más que una imagen burda en la que se han esfumado todos aquellos hermosos filamentos y espículas que tanto interés habían despertado en nosotros. Nos encontramos con un dilema, pues no podemos llevarnos el todo y posiblemente la compresión nos deje sin nada. Una vez pasada esta fase de desolación comenzaremos a pensar que si somos hábiles quizá podríamos sacar partido a este proceso. Por ejemplo, podríamos agrupar en un solo color un gran número de órbitas representadas por un grupo de colores de una imagen fractal. Un buen puñado de herramientas informáticas nos ayudarán a filtrar, recortar o seleccionar un determinado rincón de la imagen y así podernos llevar una estructura concreta susceptible de ser trasvasada al dominio musical.

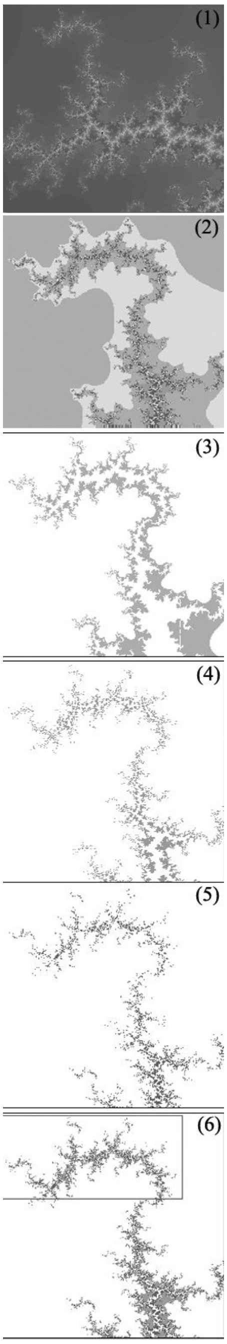
A continuación haremos un somero comentario del algoritmo de compresión de colores que se ha utilizado. Los colores RGB están representados por tres números RGB (red, green, blue) rojo, verde y azul. Cada uno de estos tres colores ofrece la posibilidad de un recorrido de valores desde 0 a 65534. La combinación de estos números llegará a producir millones de colores. Nuestra paleta es mucho más modesta con objeto de poder trabajar en el ámbito musical. Apenas consta, como ya dijimos, de 128 colores que deben resultar de la combinación de unos pocos tripletes. Los colores serán tratados como vectores y buscaremos para cada punto de la imagen original el punto de mayor proximidad o de menor diferencia respecto de nuestra paleta.
Trataremos los colores como puntos en un sistema de coordenadas 3D de modo que $RGB = XYZ$. Tenemos que tener en cuenta que la distancia entre dos puntos es el módulo del vector "v" que los une: distancia$(c_1, c_2) = |v|$.
Supongamos que el punto c_1 en la imagen de calidad es $c_1 = (R_1, G_1, B_1)$ y deseamos buscar el color más cercano; entonces deberemos comparar cada uno de los puntos de nuestra humilde paleta con c_1. Una vez que lo hayamos hecho nos quedaremos con el vector que en relación con c_1 haya dado el menor módulo. Si llamamos $c_2 = (R_2, G_2, B_2)$ al vector de turno de nuestra paleta,

la fórmula utilizada será: $|v| = \sqrt{(R_2 - R_1)^2 + (G_2 - G_1)^2 + (B_2 - B_1)^2}$.

Sin embargo, como no nos interesa la distancia exacta sino sólo la menor, podemos prescindir de la raíz cuadrada para acelerar el proceso de cálculo utilizando sólo los cuadrados y de este modo ganar mucho tiempo en nuestra búsqueda del color más cercano.
Cada punto (píxel) de la imagen origen deberá ser comparado con todos los de nuestra paleta. Guardaremos el resultado y lo compararemos con el anterior de modo que sólo nos quedaremos con el de menor valor a la vez que memorizamos el color de nuestra paleta al que corresponde y así sucesivamente hasta completar todo el recorrido de los 128 colores, suponiendo que la compresión se haya hecho a este número (como ya hemos dicho puede hacerse a otro). Una vez finalizado este paso ya conoceremos cual es el color de nuestra paleta que sustituirá al del punto original. A continuación pasaremos a comparar el siguiente punto de la imagen original con cada uno de los de la paleta de pocos colores, del mismo modo que se ha hecho en el paso anterior y así sucesivamente hasta concluir con todos los puntos de la imagen fuente. Hay que tener en cuenta los comienzos del procedimiento y el paso de cada uno de los puntos originales, pues debemos ajustar los comparadores y los contadores con objeto de no acumular valores que nos harían una comparación ficticia. Como vemos la operación es muy simple aunque el número de veces que se realiza es muy alto lo que, dependiendo del tamaño de la imagen fuente, puede tomar un cierto tiempo.

Podemos utilizar otro tipo de algoritmos semejantes buscando aproximaciones entre los números de ambas paletas, como promedios u otro tipo de relaciones. Cada algoritmo puede adaptarse mejor o peor a nuestros propósitos en dependencia de la imagen fuente.
Una captura de la imagen origen puede ser representada en el plano complejo de modo que las X signifiquen impactos o puntos de arranque de las notas y las Y las alturas (aunque esto es susceptible de otras lecturas). Bajo este punto de vista la transcripción al espacio musical es relativamente sencilla. Una vez que se ha completado esta brutal reducción de colores podemos ver si la imagen todavía retiene nuestro interés. Si es así, mediante el auxilio de otro programa podemos intentar extraer de la misma aquello que nos llame la atención o presupongamos tendrá un buen comportamiento musical (sólo la experimentación nos llevará a tener un cierto dominio en relación a presuponer lo que nos dará un buen rendimiento musical con todas sus relatividades estéticas).

La interpretación de la imagen de un modo u otro nos devolverá resultados muy diferentes a partir de un mismo objeto. Por un lado seleccionamos un grupo de líneas instrumentales a las que volcaremos los resultados de la lectura de la selección de la imagen reducida. Estas líneas instrumentales son en realidad matrices de varias dimensiones, como "voces(30,2000,5,5)" en la que podríamos distribuir las cosas de este modo: la primera cifra serviría para precisar el número de línea instrumental, la segunda determinaría el punto



de tiempo, la tercera podría precisar un número de voz interna de la línea instrumental (en este caso daría juego hasta 5 notas simultáneas para cada una de las líneas instrumentales) y la cuarta cifra podría almacenar números referentes a dinámicas, colores u otros parámetros. Supongamos que tenemos: voces(5,150,3,2), esto significaría que en la línea instrumental 5, posición de tiempo 150, espacio del acorde número 3, parámetro 2 (pensemos que tenemos reservado este espacio para la dinámica) almacenaremos algún número procedente de la imagen reducida como dinámica. Si sólo cambiamos la última cifra de la matriz y colocamos un 1, el almacenamiento del valor se haría en esta otra dirección y si suponemos que 1 en este cuarto puesto de la matriz se destina al almacenamiento de las notas, el mismo dato se registraría como nota.

Por otro lado la imagen comprimida puede ser tratada como una distribución de puntos en un plano complejo (en realidad sólo se utiliza la parte real) en el que cada punto X e Y dispone de color, lo que permite variar las lecturas. Podemos llevarnos únicamente los valores de X, de Y, o los del color de un determinado punto XY, o bien todos a la vez y esta información puede depositarse en las direcciones de la matriz receptora que deseemos.

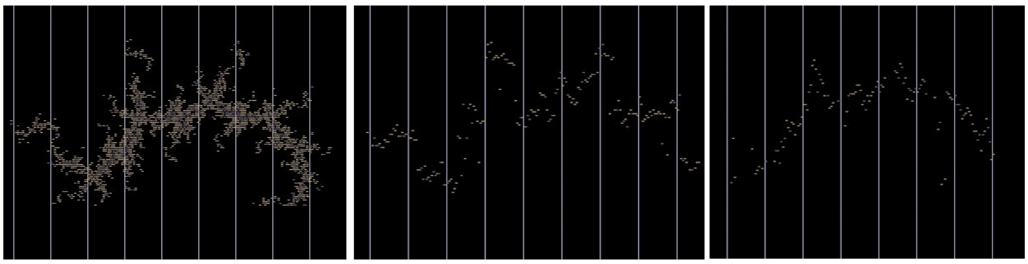
Podemos hacernos una idea de la cantidad de combinaciones entre los diversos tipos de lectura y la cantidad de posibilidades de almacenamiento.

Ello nos lleva a un ordenado sistema de búsqueda de imágenes, a la compresión de la imagen fuente, a un posterior estudio de las posibilidades musicales de la imagen comprimida y a una selección y trasvasado concreto desde la imagen reducida a la matriz de carga.

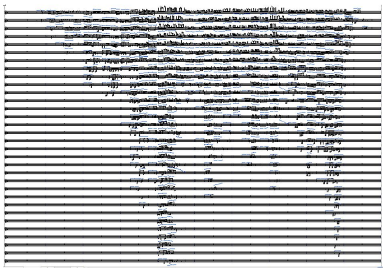
En la página anterior ilustramos unos ejemplos de lo comentado basándonos en una imagen perteneciente al conjunto Mandelbrot, desde la imagen fuente hasta la plasmación de la misma en la partitura codificada. Debemos obviar muchas explicaciones pues su aclaración podría exceder el cometido del escrito. Mediante filtros, se pueden obtener uno o varios colores; asimismo, se pueden extraer los contornos que generan aquellos; una vez tengamos una selección podremos aplicarla a una línea instrumental o a un determinado número de ellas volcando datos de la imagen comprimida a la matriz de carga de la forma que se ha comentado en líneas precedentes. Con ello obtenemos magníficas curvas musicales de origen fractal. En multitud de ocasiones resulta arduo el conseguir atrapar determinadas estructuras y para ello se han creado un buen número de utensilios informáticos que permiten excluir partes o adentrarnos en territorios difíciles.

[De la imagen original (1) se efectúa una reducción (2). En la búsqueda de material interesante, nos quedamos con los colores 120 (3), 121 (4) y 122 (5). Finalmente, de los colores 121 y 122 extraemos una selección para ser trasvasada a la partitura codificada].

Otra idea importante es utilizar las líneas de la imagen para crear territorios de acotación y de este modo controlar distribuciones instrumentales de un determinado material. Estamos hablando más bien de procesos formales que trabajarían a gran escala.

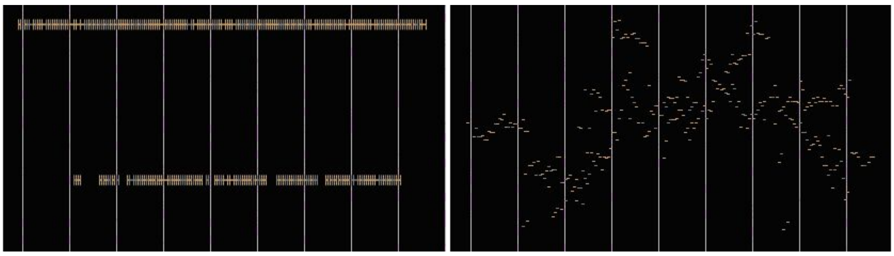


En la imagen superior, vemos el resultado de la extracción en su visión alturas-duraciones-material. La parte de la izquierda, corresponde al total de la selección (en este caso distribuida para 40 líneas instrumentales monofónicas); en el centro, la línea instrumental número 1 y a la derecha, la representación de la número 9.



A la izquierda, representación en partitura tradicional de la selección completa correspondiente a la imagen izquierda del cuadro superior. Debajo, la voz número 1 trascrita a grafía tradicional. Más abajo le sigue la trascripción de la voz número 9.

En estos ejemplos se pueden observar los cuartos de tono indicados con pequeñas flechas verticales al lado de la nota afectada. Los "grupillos" vienen como consecuencia del arrugamiento del espacio producido por las mallas de rítmica subyacente (de la que se tratará en capítulo aparte).



En la imagen superior y a la izquierda, visión de las duraciones-material de las línea instrumentales 1 y 9. A la derecha, la representación de dichas líneas en su visión altura-duración-material. Debajo de estas líneas, la trascripción a grafía tradicional.

2.2 Búsquedas en Sistemas L

Los fractales son una fuente inagotable de inspiración. Cada compositor puede adaptarlos de un modo u otro a su sistema de trabajo y aunque escurridizos, siempre acaban devolviendo una enorme cantidad de material de alta calidad musical (habitualmente los problemas vienen siempre por la sobrecarga de resultados). Se ha experimentado con Movimiento Browniano, con I.F.S. (Sistema de Funciones Iteradas), con DLA (Agregación por Difusión Limitada), con algoritmos de escape, "cantorizaciones" de objetos musicales y otros; unos trabajados directamente y otros con la utilización de la técnica descrita en el apartado anterior.
A. Lindenmayer creó en 1968 un sistema propio (el sistema L) para simular el crecimiento de los organismos vivos. En 1984 A.R. Smith y en 1986 P. Prusinkiewicz incorporaron estos sistemas a los gráficos por ordenador produciendo modelos de plantas de aspecto casi real. Con estos sistemas es posible construir de forma muy elegante conjuntos fractales clásicos como las curvas de Peano, Koch, Hilbert, etc.

Por nuestra parte pensamos que podría ser de gran utilidad su aplicación musical y acabamos de abrir un frente de búsqueda basado en estos sistemas. Por su enorme simpleza de partida lo hacen muy apto para controlar procesos de forma (dada su versatilidad conceptual), sin embargo si nos adentramos en niveles profundos los resultados obtenidos son de tal densidad que su aplicación es más idónea para generar curvas u otro tipo de material gráfico. Dadas estas características, en dependencia del nivel de la obra en el que estemos trabajando, su aplicación solo diferirá en el aumento del número de recursiones.

Los sistemas L funcionan básicamente del siguiente modo:
Un sistema L sería un conjunto $G = [V, C, A, P]$, donde:

- V es un conjunto de variables que podremos reemplazar.
- C son las constantes o elementos fijos.
- A lo que llamamos Axioma o estado inicial.
- P conjunto de reglas que definen la forma en que las variables serán reemplazadas.

Las reglas se aplican iterativamente a partir del estado inicial. Si la aplicación de las reglas se refiere a cada símbolo individualmente se dice que el sistema es libre de contexto. Si la aplicación depende de sus vecinos el sistema es sensitivo al contexto. Por otro lado el sistema es determinista a no ser que haya una probabilidad de elección entre varias reglas; con ello se convertiría en estocástico. Con posterioridad, cada constante debe tener un significado gráfico o de otra índole para poder hacer una trancripción.

Este tipo de sistemas admiten un sinfín de variaciones en dependencia de lo que se quiera conseguir, lo que los hace muy versátiles. Pongamos un sencillo ejemplo de sistema L:

Variables: A, B, C
Constantes: $+$ (puede no haberlas)
Axioma: $BA+$
Reglas: A pasará a BC, B pasará a AC y C pasa a A
Nivel 0 $= (B) - AC$, $(A) - BC$, $+$ por lo tanto $ACBC+$
Nivel 1$=$ $BCAACA+$
Nivel 2$=$ $ACABCBCABC+$

Rápidamente el crecimiento entra en magnitudes exageradas. A cada una de las variables, al igual que las constantes, se les puede asignar un significado. Pensemos por ejemplo A como una recta de un determinado valor, B la curva procedente de $F(x)$, C una recta de A^2 y $+$ un giro de 90 grados a la izquierda. De este modo podríamos configurar un gráfico que fuese la interpretación de la cadena de enésimo nivel en base a los significantes asociados a cada letra.

Su aplicación musical puede resultar altamente atractiva sobre muchos de los parámetros musicales y a diferentes niveles de la factura de la pieza que llevemos entre manos. Los sistemas L podrían sernos útiles para organizar la forma general de una pieza ya que en este nivel manejamos sobre todo listas de letras o números que tienen una significación puramente conceptual. En este caso a escasas iteraciones deberíamos cortar el proceso pues sería suficiente. En la pieza *Quimeras* de C. Satué se ha experimentado con los sistemas L para obtener la forma general.

A continuación mostramos la tabla de significados de variables y constantes. Recordamos que las variables son las letras que se sustituyen a lo largo del proceso y no las constantes, al margen de que nosotros podamos darle un valor concreto como es este el caso.

A	B	C	D	E	F	G	$+$	$-$
23,6	9,0145	61,8	5,5709	38,1924	14,5865	100	constante	constante

Los números significan una duración temporal que puede ser absoluta o bien proporcionarse a otra duración de carácter más general. La procedencia de los mismos obedece a cuestiones que no vienen al caso explicar. Las reglas serán las siguientes:

A	B	C	D	E	F	G
AD	BD	CF	ABC	DEF	libre(a)	$ABCDEF$

La pieza esta elaborada con cuatro tipos de material y cada material tiene su propio axioma partiendo de las mismas variables y constantes. Dichas constantes para lo que se lleva entre manos no tienen ningún significado, por lo tanto, aunque entran en los cálculos para futuras utilizaciones ahora serán obviadas. El material 1 tiene el siguiente axioma:

$$A + C - B - D + A - C - D + B - F - E + C.$$

En una primera y única iteración obtendremos la forma general de la pieza a partir de dicho material (no hace falta que entremos en consideraciones sobre qué es el material 1 para lo que queremos explicar):

$$AD + CF - BD - ABC + AD - CF - ABC + BD - \text{libre(a)} - DEF + CF.$$

Los significantes de duración se proporcionarán a la duración global de toda la obra, cantidad ésta que obedece a otras consideraciones. Cada letra sería en estos momentos un espacio de tiempo que por el momento estaría vacío de contenidos y se comportaría como el gran molde donde vamos a introducir los distintos elementos que configurarán la obra.

Los distintos materiales a partir de su axioma propio iterados una sola vez producirán patrones de partición que se proporcionarán a cada uno de los espacios donde se asienten a lo largo de la pieza. Si algunas letras producen espacios excesivamente anchos podríamos segmentarlos de nuevo reintroduciendo el mismo patrón con el escalado necesario para que se ajuste a dicho espacio, repitiendo la operación tantas veces como lo consideremos oportuno.

La distribución de materiales a lo largo de la pieza se realizó mezclando procedimientos de combinatoria y sistemas L en los que las variables ya no significan duraciones, sino determinadas posibilidades de elección de conjuntos de letras. Para ello se utiliza la misma lista de letras que marca la forma general de la pieza y un conjunto de 15 grupos de letras procedentes de la combinatoria de los materiales. Puesto que éstos son cuatro (llamémosles A, B, C y D) su combinación produce 15 grupos diferentes (despreciaremos las combinaciones basadas en el orden de los elementos).

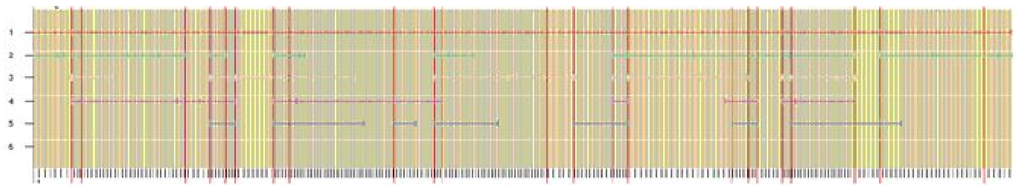
La tabla siguiente muestra el cambio de los significantes de las variables:

A	B	C	D	E	F a G
grupo de 1 letra	grupo de 4 letras	grupo de 2 letras	grupo de 3 letras	grupo de 4 letras	grupo de 1 letra

La siguiente distribución de materiales satisface las propuestas de partida.

A	D	C	F	B	D	A	B	C	A	D	C	F	A	B	C	B	D	a	D	E	F	C	F
A	A	A	C	A	B	B	A	C	D	A	B	B	D	A	A	A	A	A	A	A	D	A	A
	B	C		B	C		B	D		B	D			B	B	B	C		B	B		D	
	C			C	D		C			D				C		C	D		C	C			
				D			D							D		D				D			

A continuación mostramos una imagen que representa el plano general de la pieza en cuanto a duración temporal. En ella podemos ver las 24 secciones (los cortes verticales de las líneas gruesas nos separan cada una de ellas). Tras la línea 1, que representa las magnitudes de las distintas secciones, vemos el reparto de los materiales en las líneas 2 (material A), 3 (material B), 4 (material C) y 5 (material D). Podemos observar muchas líneas verticales que representan las particiones en compases en dependencia de las velocidades de negra, que a su vez han sido calculadas con técnicas similares de cambio de significantes en las variables. Observamos también en algunas secciones cómo alguno de los materiales no ocupa todo el espacio de la misma. Ello obedece a otras consideraciones de proporcionalidad entre los mismos que no vamos a comentar. Cada vez que trabajemos en una determinada sección tomaremos en consideración el patrón que le corresponda a cada material para producir nuevas segmentaciones del espacio (que representa al tiempo).



Podemos continuar con la aplicación de los sistemas L a las distribuciones instrumentales de la pieza tomando en consideración que el axioma de cada material servirá únicamente para el mismo. Donde hubiese acumulación de materiales como es el caso de la sección 2 (ABC) otro tipo de reglas nos indicarán qué material tiene preponderancia sobre los otros de modo que se establecerá un sistema de prioridades. Cambiaremos los significantes con objeto de saber a que atenernos cuando se aplique la misma lista que hemos utilizado para elaborar la forma general en la que éstos representaban cantidades de duración temporal. En este caso se determinarán ciertas combinaciones instrumentales que aplicaremos según la lista L que si recordamos, surgió de iterar una sola vez el axioma del material 1.

La plantilla instrumental para esta pieza es de 6 intérpretes: flauta, clarinete, saxofón, violín, viola y violoncelo. A continuación mostramos los nuevos significantes para la distribución instrumental:

$A =$ Flauta baja, Clarinete bajo, Saxofón barítono y Violoncelo (grupo grave).

$B =$ Tres grupos a elegir: (1) Violín, Viola; (2) Flauta en do, Clarinete sib, Violín y Viola; (3) Piccolo, Clarinete sib, Violín y Viola (grupo agudo).

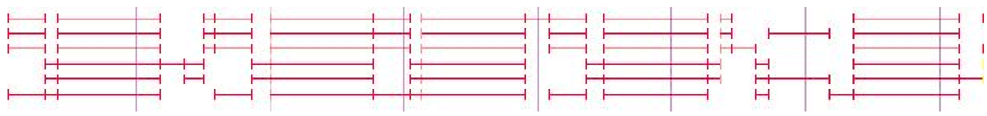
$C =$ TODOS.

$D =$(grupos tímbricos) Maderas o cuerdas.

E = Dúo mixto en que alguno de los componentes esté en la partición temporal anterior.

F = Instrumento solo a elegir.

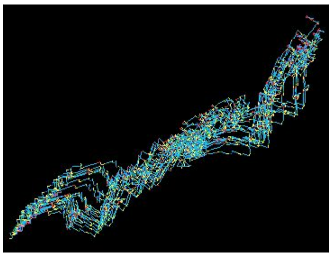
El siguiente gráfico muestra la distribución instrumental (qué instrumentos suenan y cuales de ellos callan) de la sección primera en que únicamente aparece material A. La primera línea horizontal corresponde a la flauta, la 2 al clarinete, la 3 al saxofón, la 4 al violín, la 5 a la viola y la 6 al violoncelo. Obsérvense las 24 particiones verticales del espacio temporal que están en proporción con la forma global de la pieza ya que están elaboradas a partir de la misma lista L de duraciones. El espacio coloreado significa únicamente que el instrumento que lo tiene suena, aquello que ejecutará responderá a otras consideraciones. El gráfico debe satisfacer las condiciones que se han comentado respecto del cambio de significantes para la distribución instrumental.



Desenvolviéndonos en el ámbito de distribución instrumental y trabajando con grupos más amplios (pensemos en una orquesta de cuatro grupos de maderas, cuatro de metales, cuatro de percusión y cuatro de cuerda) conseguiríamos mayor o menor número de densidad según el adentramiento que fuésemos a recorrer; de esta manera, el árbol de distribución de instrumentos crecería multidimensionalmente pero siempre tendríamos como último nivel el instrumento solo o la ausencia de todo instrumento. Hay otras formas diferentes en la manera de ramificar; una de ellas sería comenzar a partir de cualquiera de los nodos con una lista de significantes distintos (manteniendo el axioma) con lo que el resultado variaría sustancialmente.

Este tipo de procedimientos basados en los sistemas L pueden aplicarse a los distintos parámetros del nivel compositivo en el que nos hallemos. Imaginemos una distribución con la lista L aplicada a las dinámicas, a las alturas, a las mallas de rítmica subyacente (más adelante hablaremos de éstas)... Algunos parámetros, como el de las alturas, necesitarían muchos niveles de recursividad en el sistema, y es aquí donde pasaríamos a situaciones gráficas con el objetivo de facilitar la interpretación de las mismas y cotejar sus posibilidades musicales.

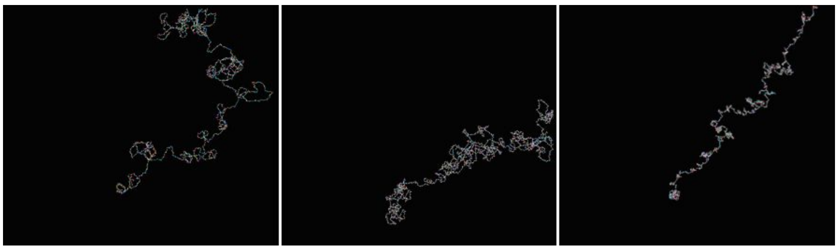
Si nos desenvolvemos en un ámbito puramente geométrico y deseamos que la lista de símbolos se transforme en una o varias curvas, simplemente cambiaremos el significado de las letras; incluso podremos introducir en estas secuencias otros símbolos tales como giro G de n grados o espacio vacío que podrían haber formado parte de las listas aplicadas a los ámbitos anteriores y por tener un significado incongruente para el tipo de tarea en que se aplicó la lista simplemente se hubiesen obviado.



A continuación, mostramos un hipotético ejemplo gráfico basado en un tratamiento libre de la lista L que se utilizó para generar estructuras como las anteriores. En él, se aplicó ruido mediante funciones random en X e Y con objeto de distorsionar estos puntos y se trabajó con un grupo orquestal de 20 líneas instrumentales.

El objeto de este ejemplo gráfico no es otro sino mostrar la riqueza a la que se puede llegar partiendo de un elemento tan simple como el axioma. Con pequeñas variaciones en cualquiera de los parámetros, se obtienen considerables cambios en las imágenes.

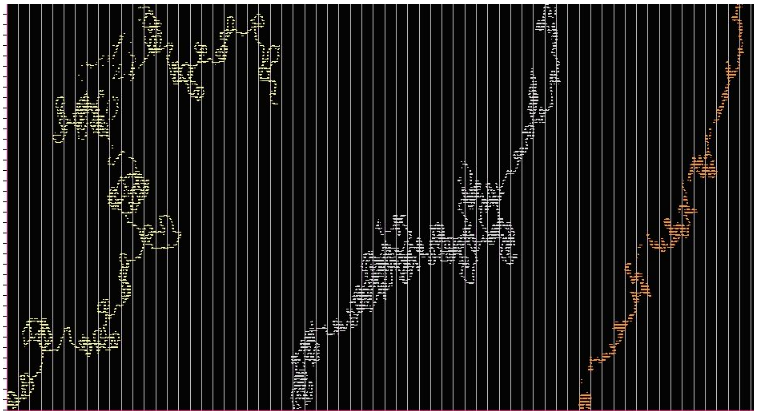
La aplicación de los sistemas L al espacio musical puede ser de gran riqueza. Por nuestra parte nos queda explorar un sinfín de posibilidades todavía en espera de estudio, tales como la utilización en el ámbito armónico en el que cada letra puede significar un conglomerado sonoro o una lista de ellos o una función que en dependencia de los datos entrantes nos devuelva diferentes resultados. En la búsqueda de una coherencia global de la obra, un mismo axioma debería controlar cada uno de los parámetros que entran en juego en la misma cambiando únicamente sus significantes.



En la imagen superior, de izquierda a derecha, tenemos los objetos generados por una lista L para una sola línea instrumental; aquí las iteraciones fueron 4, de una lista de 12 elementos, para poder generar así mayor número de puntos. Al primero de ellos se le aplicó un ángulo de 35^0, ruido en X de valor 1 y ruido en Y con valor 2. El segundo (imagen central) cambia el ángulo a 45^0. El tercero (imagen de la derecha) mantiene el ángulo de 45^0 pero el ruido en X es de 2 y el ruido en Y es de 6.

En la imagen inferior, su representación en alturas-duración-material una vez pasado al milimetrado virtual. En su traspaso, al comprimir el resultado por salirse de los límites marcados por las alturas (1-127) pueden observarse los objetos en su totalidad, de ahí las pequeñas divergencias en los extremos superiores con las figuras *de la imagen superior (en la audición se aprecian los cambios dinámicos, cambios que obedecen también a resultados de la lista L).*

Cualquiera de estos ejemplos, leídos secuencialmente tal como se han producido ("desenrollados") produciría líneas melódicas de considerable duración.



3. Mallas o redes de rítmica subyacente y creación de espacios musicales arrugados

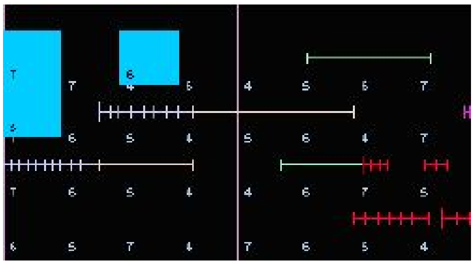
Este sistema de trabajar la partitura pertenece a Francisco Guerrero. Nuestra tarea ha sido dotarlo de múltiples herramientas informáticas para que su aplicación fuese mucho más sencilla y rápida. Con el paso del tiempo y gracias al estudio del propio sistema, se han abierto muchas puertas y ampliaciones en el mismo, pero también nos hemos dado cuenta de una gran cantidad de límites difíciles de traspasar; no tanto en el campo de las ideas, sino en el terreno de la programación y también en el mundo de la praxis instrumental. Utilizaremos ejemplos de la obra *"Laberinto de la noche"* de Carlos Satué (para saxofones, orquesta de cámara y dispositivo electroacústico) acompañados de imágenes que ilustrarán ciertos procedimientos relativos al tema que nos ocupa.

Para comenzar tenemos que referirnos otra vez a la idea de trabajar con cuadrículas mínimas que representarán, de manera virtual, al papel milimetrado (donde se trabaja la partitura codificada). Este será el espacio (tiempo en realidad) donde asentaremos todas nuestras ideas musicales cuantificadas. Nos basaremos en los cuadraditos tomando cada uno de ellos como una unidad mínima temporal. Si por ejemplo una duración es de 30 la podremos representar con una línea que atravesará 30 cuadros. Si a dicha duración le asignamos una altura (como por ejemplo Do4) tendremos una duración de 30 cuadrados cuya altura es Do4. Si le asignamos una dinámica tendremos todo la anterior más la dinámica. Si se le asigna un color con significado de material tendremos... En el milimetrado (así lo llamaremos en referencia al antiguo papel milimetrado donde se trabajaban las partituras a mano) podremos guardar de forma codificada no sólo toda nuestra partitura, sino un sinfín de borradores que utilizaremos con posterioridad si así lo queremos. En realidad, el milimetrado virtual no es plano sino multidimensional (informáticamente está elaborado por matrices de muchas dimensiones), y cada cuadradito contiene muchísima información; es como poseer un sinfín de mapas de cada uno de los parámetros que usamos. Ello nos permitirá realizar todo tipo de operación con cualquier parámetro, relacionar unas estructuras con otras, teñirlas de colores diferentes para representar el significado que nosotros queramos, algo así como digitalizar la trabazón interna de la obra en que estemos trabajando. Tras un periodo largo de entrenamiento, el sistema llegará a ser muy rápido y podremos trabajar la música casi como un objeto plástico.

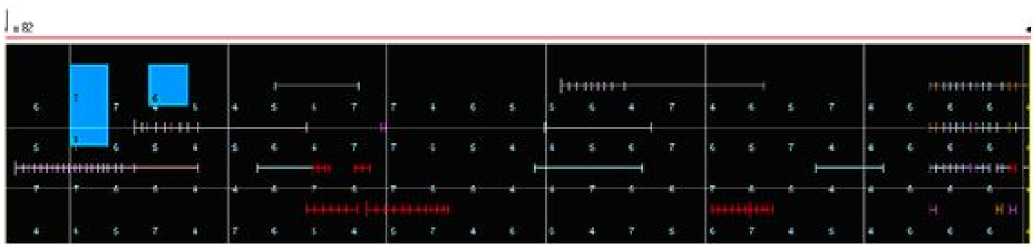
Cada cuadro es una unidad mínima temporal, pero ¿de qué? Hará falta relacionarlo con una figura y una velocidad. Pongamos un ejemplo: si tenemos una duración de 5 cuadrados y asignamos una figura de semicorchea (𝅘𝅥𝅯) a cada uno de ellos, nuestra duración será una negra ligada (sumada) a una semicorchea en el espacio de dos pulsos (4 + 1, ó ♩‿𝅘𝅥𝅯). Si asignamos a cada cuadrado un valor de semicorchea de cinquillo (pulso/5 o 1/5) nuestra duración será cinco semicorcheas de cinquillo ligadas, o bien una negra la cual esta vez ocupará el espacio de un pulso. Como vemos el sistema interpretará lo que está asentado en el milimetrado en función del valor de figura mínima que otorguemos a cada cuadrado. El camino que se sigue para aplicar estas mallas numéricas procede como sigue: colocaremos en cada pulso de cada línea instrumental un número que representará el tipo de figuración que se aplicará a dicha pulsación. Por ejemplo, si al primer compás de 4/4 (el compás es una unidad temporal que contiene un determinado número de pulsos y está en relación a una velocidad metronómica como por ejemplo ♩ = 60, en cuyo caso cada pulso de dicho compás estaría ocupado por una negra con valor temporal absoluto de 1 segundo) colocamos 5, 4, 7 y 6, entonces tendremos que el primer pulso no absorberá el estándar de pulso/4 es decir cuatro semicorcheas sino pulso/5 lo que será 5 cuadraditos como semicorcheas de cinquillo (si tomamos la unidad de cuadradito como semicorchea, puesto que podríamos decidir otra figura, como la fusa, lo que daría lugar a otro resultado), el segundo pulso, 4, como simples semicorcheas, el tercero absorberá 7 semicorcheas de sietecillo y el cuarto 6 semicorcheas de seisillo. Esta red numérica proyectará un tipo de rítmica tremendamente arrugada, pues un determinado objeto musical calculado con unidades mínimas globales al ser asentado en la malla subyacente estará moldeado por la numeración que ésta contenga. Ciertas zonas se encogerán mientras otras se dilatarán y el sistema deberá compensarse cada determinado número de pulsos (si así lo deseamos). Como podemos ver, un mismo objeto puede cambiar su apariencia formal en base a esta técnica de pensamiento guerreriano.

Si partimos de una demanda de un determinado número de segundos para un tramo de música y deseamos saber cuántos cuadrados necesitamos, efectivamente dependerá de la red de números que apliquemos a dicho tramo (si asignamos 7 a todos los números, la arquitectura musical pasará con mucha rapidez y el tramo durará menos que si aplicamos 4; esto es una forma de acelerar internamente la música sin que cambie el pulso del director). Para conseguir un espacio temporal uniforme de partida y que nos permita aplicar la red numérica subyacente sin especiales deformaciones, utilizaremos mallas promediadas en 5.5 unidades por pulso (22 por compás, lo que resulta de la suma de 4+5+6+7 y que para nosotros representa el patrón habitual de trabajo). El cociente de 5.5 resultará de dividir 22 unidades/4 pulsos ya que habitualmente trabajaremos en 4/4. Si cambiásemos esto deberíamos modificar igualmente el cociente promedio. La imagen que sigue muestra un par de compases de 4/4 con cuatro líneas instrumentales; las duraciones vienen en diversos colores (cada color, que por otra parte es un número, es el código de adscripción a un determinado tipo de material, así objetos o líneas con igual color comparten origen o son de igual naturaleza) y están asentadas en este caso inmediatamente por encima de las filas de números. Los espacios en negro están en silencio. Cada pulso tiene asignado un número en cada línea instrumental. Los cuadrados azules son selecciones que hemos hecho para modificar manualmente la numeración.

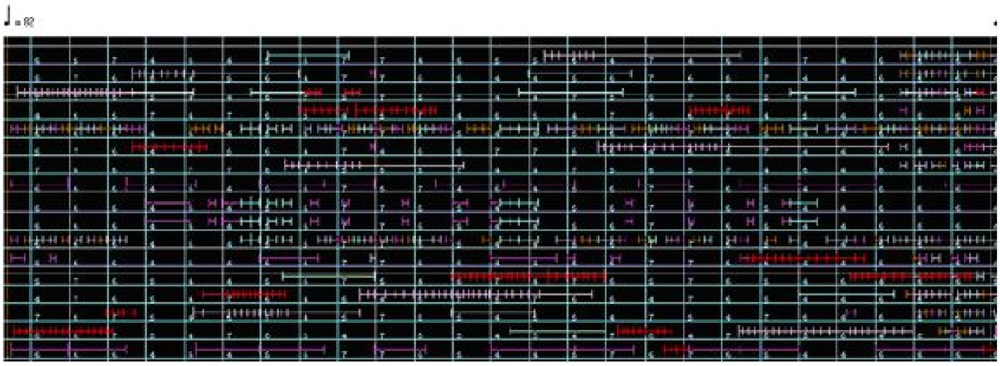
Obsérvese que la distancia de las duraciones que tenemos en la tercera línea del primer compás pertenecen a un sietecillo, y son más estrechas que las de la segunda línea del mismo compás, que son unidades de cinquillo.



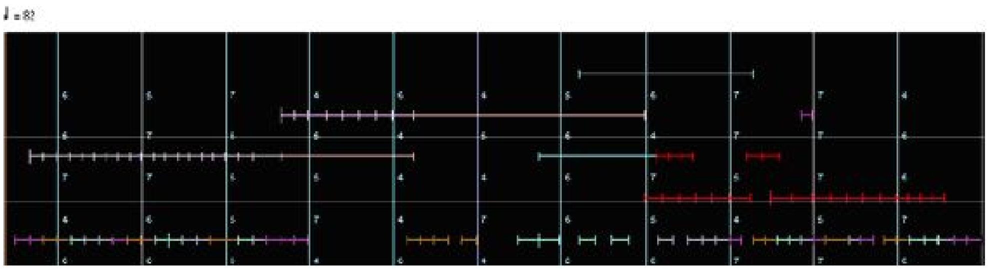
La siguiente imagen muestra lo mismo en una visión menos detallista, abarcando más territorio.



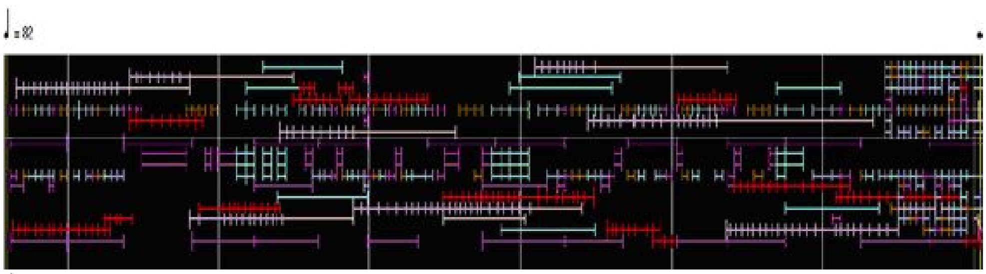
El siguiente cuadro muestra la sección segunda del movimiento 4 de “Laberinto de la noche” en la que sobreponemos la visión de instrumentos-duraciones-materiales a la malla de rítmica subyacente.

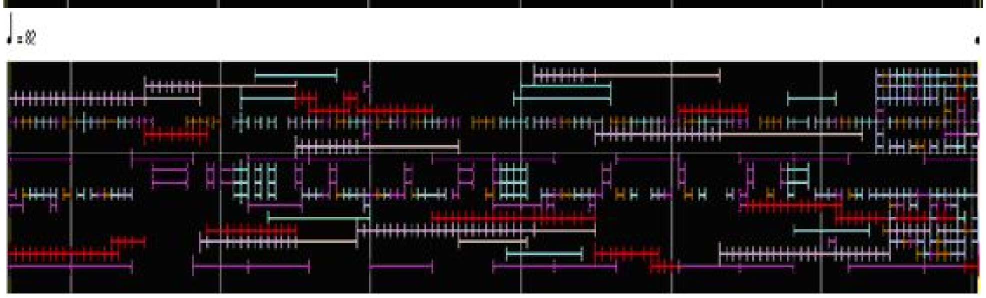


Aquí mostramos un detalle de la imagen superior con las 5 primeras líneas instrumentales. Cada línea vertical representa un pulso.



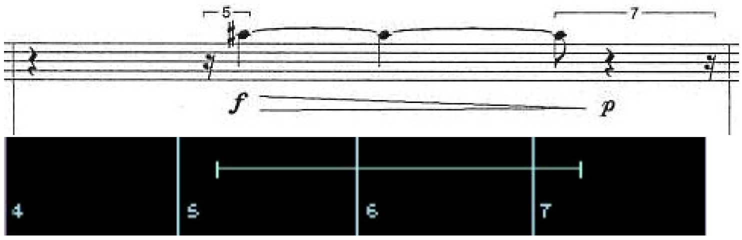
A continuación podemos ver la misma sección sin que la malla aparezca, sin embargo sí que está actuando. Obsérvense las desigualdades de algunas duraciones con valores de uno pero con diferentes números en la red. Nuevamente hacemos hincapié en la rugosidad que proyectará la actuación de la malla, para ello compárese con el cuadro siguiente en donde no actúa.





Habitualmente trabajamos la partitura en código gráfico, desactivando la función de la rítmica subyacente, pues aunque posible, resultará difícil operar (téngase en cuenta que todo está desajustado cuando la malla actúa; aunque realmente éste será el resultado final de la partitura). Hay una fase en la elaboración del tramo musical en la que debemos aplicarla. El trabajo resultará muy minucioso, no obstante el sistema informatizado para operar con la malla cuenta con un buen número de funciones que nos auxiliarán, tales como automatizaciones para copiar y pegar grandes extensiones de la red numérica, encapsuladores que son capaces de introducir una amplia zona de notas en un espacio muy reducido vacío gracias a la sustitución de los números que allí se encuentran por otros de valor mucho más alto, y todo ello despreocupándonos del cálculo..., aunque si lo deseamos, podremos trabajar minuciosamente número a número.
Normalmente la elaboración de la malla de rítmica subyacente siempre responde a consideraciones constructivistas que pueden estar en relación con planteamientos generales o locales de la pieza. Por ejemplo, podemos imaginarnos redes de números en cánones, en simetrías o en otro tipo de relaciones. La imagen que proyecta la red de rítmica subyacente cuando actúa es lo que realmente va a suceder, por lo tanto es la visión codificada de la partitura real como anteriormente hemos apuntado.
En las imágenes que siguen podemos ver un compás del saxofón soprano de la pieza que estamos tomando para los ejemplos, *"Laberinto de la noche"* (en alturas reales) y debajo la codificación de la partitura (4, 5, 6 y 7).

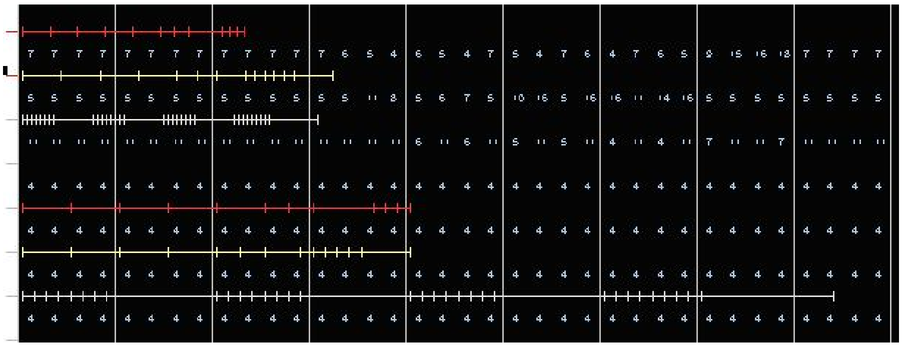
Las dos imágenes que siguen muestran una nota larga de la flauta. Obsérvese que la suma de los 6 cuadraditos del tercer pulso codifican como un simple valor de negra; esto es así porque el sistema tenderá siempre a la simplificación de la escritura, facilitando así el trabajo de los intérpretes.



A continuación ofrecemos una página en partitura tradicional relativa a la sección 2 del cuarto movimiento. Obsérvense los distintos valores que toma cada pulso y la rugosidad que se produce en el tejido musical.

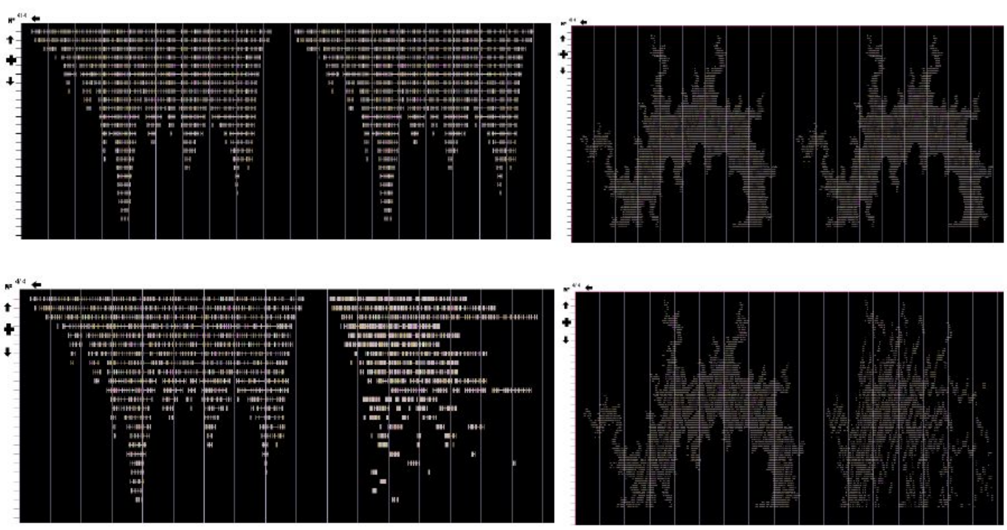
A continuación mostramos nuevos ejemplos basados en material de Bach, Beethoven y Berg.

Imagen en la que se pueden apreciar las "guías" utilizadas para controlar las mallas de rítmica subyacente. En la práctica, cada pulso puede albergar un número cualquiera entre 4 y 16.



Como muestra la imagen de arriba, los tres motivos han sido copiados para luego cambiarles los valores en cada uno de los pulsos. En la imagen de abajo se puede apreciar, ahora ya en grafía tradicional, las diferencias espaciales (y por tanto también temporales) a las que han dado lugar.

Otros ejemplos gráficos a partir de la imagen ya utilizada del conjunto Mandelbrot



Conclusiones y nuevas búsquedas a cerca de este apartado

La utilización de mallas de rítmica subyacente caracteriza fuertemente esta música, y el trabajo con las mismas todavía nos parece a día de hoy insustituible. La nuevas búsquedas, como se apuntó anteriormente, tienen sus dificultades en la complejidad del "software" más que en el mundo de las ideas. El camino lógico será adentrarse en niveles mas profundos, tales como la elaboración de una nueva malla, no para cada pulso, sino para cada cuadradito del milimetrado. También es posible caminar en el sentido contrario y añadir una malla cuyos números sean aplicables a cada compás, o a sumas de varios pulsos, o a varios cuadrados volviendo nuevamente a los espacios pequeños. Podríamos seguir creciendo tanto hacia fuera como hacia dentro.
Deberíamos tener en cuenta, si trabajásemos con varias mallas a la vez, la interrelación que se produciría entre ellas. Pensemos por ejemplo que si un pulso tiene un 7 y aplicamos una segunda red a cada uno de los 7 cuadraditos, necesitaríamos 7 números para controlar la malla interior que arrugarían considerablemente el espacio con objeto de preservar la misma cantidad de tiempo del pulso (tendríamos rugosidad dentro de la rugosidad). Los niveles de anidamiento podrán ser infinitos. Las rítmicas irracionales que se generarían, chocarían frontalmente con el mundo de los intérpretes dificultándoles en exceso su trabajo. Por otro lado, más allá de un cierto límite (y este se alcanza rápidamente), siempre se producirá redondeo en la interpretación y también en la escucha.

Antes de terminar este apartado nos gustaría hablar de lo que podría significar la aplicación de esta técnica de mallas a los espacios verticales o de las ordenadas (lo que podríamos traducir habitualmente en música como alturas, a diferencia de lo expuesto hasta el momento en el ámbito de las abscisas que afectaba a las duraciones). Pensemos por un momento en una columna de alturas cuyas divisiones irregulares se engrosasen en unos lugares del registro mientras que adelgazasen en otros y que en la siguiente vertical (siguiente punto de X) las zonas de tensión y relajación hubiesen cambiado de lugar: ¿no estaríamos hablando de un espacio armónico arrugado?... Este nuevo horizonte plantea nuevos retos en un futuro no muy lejano.

Bibliografía

[1] B. Mandelbrot, *La geometría fractal de la naturaleza*, Tusquets, 1997.

[2] M. de Guzmán, M.Á. Martín, M. Morán, M. Reyes, *Estructuras fractales y sus aplicaciones*, Labor, 1993.

[3] E.N. Lorenz, *La esencia del caos*, Debate, 1995.

[4] P. Smith, *El Caos*, Cambridge Univ. Press, 2001.
[5] J. Barrallo, *Geometría fractal. Algorítmica y representación*, Anaya, 1993.
[6] I. Xenakis, *Musiques formelles. Nouveaux principes formels de composition musicale*, Richard-Masse, 1963.
[7] I. Xenakis, *Musique. Architecture*, Casterman, 1976.
[8] F. Jedrzejewski, *Mathematical Theory of Music*, Delatour, 2006.
[9] C. Agon, G. Assayag, J. Bresson (ed.), *The OM composer's book 1*, Ircam-Centre Pompidou, Delatour, 2006.

Carlos Satué y Carlos Frías
e-mail: ***carlossatue@gmail.com***
http://www.carlossatue.com/

Como complemento a la conferencia de Carlos Satué y Carlos Frías, el saxofonista Josetxo Silguero y el músico electroacústico Borja Ramos interpretaron fragmentos de la obra *"Laberinto de la Noche"*, concierto para 4 saxofones, gran ensemble y electrónica en vivo del compositor Carlos Satué.

Josetxo Silguero
http://www.josetxosilguero.com

Borja Ramos
http://www.virb.com/borjaramos