

# La enseñanza de la geometría en dimensión tres vista por Grace Chisholm Young

por

**Adela Salvador Alcaide, Universidad Politécnica de Madrid**

Quiero utilizar la biografía de Grace Chisholm Young para hacer una propuesta sobre la enseñanza de la geometría en dimensión tres, y animar a hacer geometría en el aula.

Esta charla consta de cuatro partes, la primera trata sobre la biografía de esta mujer matemática, de sus dificultades y de sus logros, y la segunda de comentarios sobre situaciones similares de algunas otras mujeres matemáticas.

En la tercera se recogen párrafos de su obra, *Primer libro de Geometría* en la que comenta los obstáculos que encuentra la enseñanza de la geometría en dimensión tres e invita a pesar de ello a su enseñanza.

Por último, en la cuarta parte, siguiendo sus consejos, se sugieren actividades adecuadas para el aula.

## 1. Grace Chisholm Young

Grace Chisholm Young nació en 1868, en Inglaterra, durante el reinado de la reina Victoria. Para hacernos una idea clara sobre el estado de la educación en esa época recordemos que hacia 1881, el 20 por ciento de la población de Inglaterra todavía no sabía escribir su nombre (Perl; 1978, 149).

Su familia era una familia de clase alta, con elevada educación. El padre, Henry William Chisholm, había tenido un prestigioso cargo en el Departamento de Pesas y Medidas del Gobierno británico y la madre, Anna Louisa Bell, era una consumada pianista que, junto a su padre, daba recitales de violín y piano en

Haslemere Town Hall. Tenían 44 y 59 años, respectivamente, cuando ella nació. Uno de sus hermanos mayores, Hugo Chisholm fue famoso por la edición de la Enciclopedia Británica e tuvo influencia en la edición de The Times.

### 1.1. Estudios

Era la más pequeña de cuatro hermanos y también la más consentida. Sólo le enseñaban lo que ella quería aprender y en este sentido su educación fue un tanto informal. Le gustaba el cálculo mental y la música, y como en ambas materias su madre podía darle clases, se educó en su casa hasta que tuvo diez años. La educación de sus hermanos varones fue muy diferente. A los diez años su madre la puso una institutriz, que constituyó la única educación formal en su infancia. Sin embargo fue una preparación suficiente para, a los 17 años, pasar los exámenes de Cambridge (Cambridge Señor Examination). Si hubiese sido un varón, al año siguiente hubiese comenzado sus estudios universitarios, pero al ser una mujer, esta posibilidad no fue considerada, y siguiendo los deseos de su familia se ocupó de trabajos sociales con la gente pobre de Londres.

Cuando Grace, con 21 años, decidió continuar estudiando, su madre no deseaba que ella estudiase medicina, su primera elección, y con el apoyo de su padre comenzó a estudiar matemáticas (Lafortune y Kayler; 1992, 66). En abril de 1889 entró en la universidad de Cambridge, en el Gritón Collage, el mejor centro en matemáticas en aquella época, donde, entre otros profesores, enseñaba Arthur Cayley (1821-1895). Su tutor fue William Young.



Su tutor la sugirió que fuese a las clases de Cayley. Pidió a su amiga Isabel Maddison que la ayudase y ambas hicieron la solicitud que se requería para poder asistir a las clases de un determinado profesor. El permiso no fue autorizado con facilidad, pero al ser por indicación de su tutor, finalmente fue concedido. En 1892 Grace obtuvo su diploma en Cambridge, pero allí todavía una mujer no podía doctorarse.

Para proseguir su carrera como matemática debió abandonar su país e ir a Göttingen (la ciudad universitaria alemana donde se habían doctorado Sofía Kovalévskaya y Emmy Noether). Grace había elegido el lugar adecuado en el momento oportuno. Allí estaba Felix Klein, que la ayudó con su cordialidad y su

apoyo. Pero la conformidad para admitirla tenía que darla el Ministerio de Cultura de Berlín. También fue en esto Grace afortunada pues el oficial encargado de la educación superior en Alemania era en ese momento Friedrich Althoff, liberal e interesado en la educación superior de la mujer.

Ella describió así a Felix Klein en una carta: *"La actitud del Profesor Klein es esta, no admite la admisión de cualquier mujer que no haya ya realizado un buen trabajo y que pueda superar las pruebas de grado o equivalentes... El Profesor Klein es moderado. Hay miembros en la Facultad que no están de acuerdo con la admisión de mujeres y otros que lo desapruueban totalmente"*.

### 1.2. Doctorado

Bajo la supervisión de Felix Klein obtuvo su doctorado en 1895. El título de su memoria de doctorado es *"Grupos algebraicos y trigonometría esférica"*. Por lo tanto se puede considerar a Grace como la primera mujer que consiguió su doctorado en matemáticas de una forma *"normal"*. A las clases de Klein asistían ella y otras dos mujeres. Como anécdota se cuenta que Klein tenía por costumbre comenzar con "¡Caballeros!" y debió modificarlo con "¡Oyentes!", aunque alguna vez se confundió y rectificó con una sonrisa. Se examinó de doctorado y volvió a Inglaterra. Su tesis fue reproducida y enviada a las personas que podían estar interesadas. Una de ellas, William Young, su futuro esposo, le pidió colaboración para un libro de astronomía. Es muy difícil separar la aportación de ella en dicho libro de la de él.

### 1.3. Matrimonio



La primera vez que la pidió en matrimonio ella rehusó pero la insistencia de William no cesó hasta que se casaron en Londres en Junio de 1896. El primer año de su matrimonio vivieron en Cambridge donde ella pudo continuar investigando y escribiendo, pero al final de ese año nació su primer hijo y William Young decidió trasladarse a Alemania. Entre 1897 y 1908 tuvo seis hijos y una familia tan numerosa no la permitía desarrollar muchas actividades fuera del hogar.

### 1.4. Su obra

Su creatividad se dirigió fundamentalmente a la educación de sus hijos a quienes están dirigidas las obras que escribió en aquella época. Escribió por ejemplo un libro para enseñar biología a uno de sus hijos, en el que describe el proceso de la división celular, que se publicó en 1905, con el nombre de *Bimbo*. En ese

mismo año escribe *Primer libro de Geometría* en colaboración con su marido. Además, el temperamento de William fue muy bohemio, y debido a esto pasaron gran parte de su vida viajando por Alemania, Inglaterra, Italia,...

Ocupó mucho de su tiempo en la educación de sus hijos. Su hijo Frank (Bimbo) que murió durante la primera guerra mundial prometía ser un gran científico. Janet fue física, como le hubiese gustado ser a Grace. Cecily se doctoró en matemáticas en Cambridge, como también hubiese deseado Grace. Laurie también fue matemática. Pat fue un químico reconocido.

Observemos cómo estoy contando en su biografía los nombres de sus hijos, de su marido... y que si leemos una biografía de Euler, Gauss, Weierstrass... no sabremos lo mismo de su familia. En todas las biografías de mujeres científicas se da esta circunstancia. Sabremos si estuvo casada o no lo estuvo, el nombre de su marido, de sus hijos, cuántos tuvo... Por ejemplo sabemos que Hipatia nunca se casó, igual que Sophie Germain, Caroline Herchel, María Gaetana Agnesi o Emmy Noether, y sabemos los nombres de los maridos de la marquesa de Châtelet, de Mary Sommerville o de Sofía Kovalevskaya.

Comenzó la segunda guerra mundial. A William le causaba preocupación la reacción que pudiera haber en su país por su simpatía por Alemania y Grace volvió sola a Inglaterra. En el verano de 1942, cuando llevaban dos años separados, William murió repentinamente, pocos días antes de cumplir 79 años. Ella murió dos años después, en 1944, con 76 años.

Como ella trabajó a menudo en colaboración con su marido es difícil distinguir su contribución en las obras en las que trabajaron juntos. Cuando ella estudiaba en Cambridge era considerada como una matemática brillante. Por otro lado, William era considerado un buen profesor pero no hizo ninguna investigación original antes de trabajar con ella. Después de su matrimonio colaboraron en muchas ocasiones y William, de repente, a la edad de 35 años, se convirtió en un matemático creativo. En las ausencias de su marido, cuando él iba a trabajar fuera, a



pesar de sus seis hijos, ella reencontraba su energía productiva y se ponía a trabajar, y fue durante una de esas ausencias, cuando William estuvo en la India en la universidad de Calcuta, cuando ella elaboró una serie de textos sobre los fundamentos del cálculo diferencial e integral. No podía producir a su lado. *"Cuando William estaba en casa monopolizaba completamente la vida de Grace. Él sabía*

*que sus demandas eran excesivas, pero...*" (Grattan-Guinness; 1972, 117).

A pesar de sus difíciles condiciones de vida fue capaz de conseguir una considerable cantidad de excelentes trabajos y desgraciadamente las obras y los más de 200 artículos que publicaron juntos llevaron impresa la autoría exclusiva de su marido.

## **2. Logros y dificultades de otras mujeres matemáticas**

El desarrollo de las Matemáticas, como el de cualquier ciencia, ha tenido un proceso de elaboración muy distinto al que se presenta cuando estudiamos su historia, que aparece como una acumulación de descubrimientos individuales con una estructura lineal, olvidando, además de los intentos fallidos y las hipótesis refutadas, todas las colaboraciones que han contribuido mediante pequeños logros a la construcción del conocimiento.

La Historia de las Matemáticas que conocemos, forma parte de la Ciencia occidental y está centrada en los descubrimientos de un grupo selecto de hombres de raza blanca, cuya situación de privilegio por haber recibido una esmerada formación y pertenecer a una familia de clase acomodada, les permitió cultivar sus inquietudes científicas.

Entre estos nombres podemos destacar el de algunas mujeres que han logrado sobrevivir a la influencia masculina de una sociedad patriarcal, que les ha puesto muchas dificultades para desarrollar un trabajo científico y aún más para que éste sea reconocido en los libros de historia, en muchos de ellos, como por ejemplo en el Boyer, no se menciona la biografía de ninguna mujer matemática y a duras penas se reconocen los logros de Sonia Kovalevskaya y Emmy Noether.

Las barreras que tuvieron que superar estas mujeres para acceder a la Ciencia son muchas y muy variadas pero tienen ciertos elementos comunes que queremos resaltar, ya que son la base para explicar por qué se conocen tan pocos nombres de mujeres matemáticas.

El problema de su educación que las mantuvo alejadas del conocimiento científico, las que por fin accedieron a él, habían recibido, previamente, una educación femenina y casi todas tuvieron que ocuparse de las tareas que la sociedad ha tenido asignadas a las mujeres, cuidar enfermos, hijos, hermanos, y en general de "sus labores".

Los distintos elementos que impidieron o al menos obstaculizaron su reconocimiento como autoras. Algunas tuvieron que ocultarse bajo un seudónimo o unas siglas, otras vincularon su trabajo a la sombra de una figura masculina y sólo fueron reconocidas cuando sobrevivieron a su compañero, sin olvidar a las que han sido maltratadas por la Historia y al cabo del tiempo son más recordadas por una anécdota de su vida, sin importancia, que por su trabajo matemático.

Los graves problemas que se encontraron para vivir de la Ciencia, así como

para poder acceder a las distintas instituciones científicas y obtener un merecido reconocimiento por su trabajo.

### 2.1. La educación de las mujeres

Hasta hace poco más de un siglo a la mayoría de las mujeres se les ha vetado el derecho a la educación. De esta situación sólo se salvaron algunas por su posición social, pero, en general, se pretendía orientarlas hacia el arte, la literatura y por supuesto hacia todas las habilidades domésticas y sólo en casos excepcionales recibieron una instrucción orientada al conocimiento científico.

A pesar de ello en todas las épocas han existido mujeres que han escrito su nombre en la historia de las Matemáticas. Por supuesto estas mujeres habían recibido una esmerada educación, así Emilia Breteuil, marquesa de Châtelet (1706-1749) y Ada Byron, condesa de Lovelace (1815-1852), eran aristócratas y tuvieron a su servicio buenos profesores de matemáticas. Hipatia (370-415), María Gaetana Agnesi (1718-1799) y Emmy Noether (1882-1935) eran hijas de matemáticos, crecieron en un ambiente donde las matemáticas eran conocidas y apreciadas, y su talento reconocido.

El acceso a los libros fue también un factor de importancia ya que no existían las bibliotecas públicas y sólo algunas como Sophie Germain (1776-1831) y Sonia Kovalevskaya (1850-1891) pudieron encontrarlos en las bibliotecas de sus familias.

Sin embargo muchas de ellas tuvieron que compartir sus estudios matemáticos con las tareas domésticas, cuidar de niños, enfermos y demás funciones que la sociedad les tenía asignadas. Es el caso de María Gaetana Agnesi que a los veintidós años se encontró sin madre y con veinte hermanos pequeños, o de Carolina Herchel (1750-1848) que después de estar durante veinticuatro años como ayudante de su hermano William, a la vez que se encargaba de las tareas domésticas, a los cincuenta y ocho años tuvo que cuidar de su hermano Dietrich durante cuatro años.

### 2.2. El reconocimiento de su trabajo científico

Muchas de ellas son recordadas más por su posición social que como mujeres de ciencia. Así, Emilia Breteuil, marquesa de Châtelet, que contribuyó a divulgar, estudiar, traducir y hacer comprensible el pensamiento de Leibniz y de Newton es recordada como amante de Voltaire, y Sophie Germain que después de sus importantes trabajos sobre teoría de números, sus investigaciones sobre la teoría de superficies elásticas, y de sus obras filosóficas, en su certificado de defunción, el empleado municipal escribió "*rentière*" (rentista) para indicar su profesión.

Al no tener acceso a la educación formal, dependían de padres, hermanos o maridos. Por ejemplo, Sonia Kovalevskaya hubo de casarse con Kovalevsky para poder salir de su país, Rusia, e ir a Alemania a estudiar matemáticas, donde fue

alumna de Weierstrass.

En no pocas ocasiones su trabajo estaba en peligro de ser atribuido a sus colegas masculinos, como es el caso de muchas astrónomas de los siglos XVII y XVIII que accedieron a esta ciencia como ayudantes de sus hermanos, padres o maridos. Pero muchas veces sus importantes aportaciones quedaron enmascaradas por las del hombre con el que trabajaron, y sólo en casos muy concretos o cuando al morir éstos, ellas siguieron trabajando solas, se les reconoció la autoría del trabajo realizado. Entre las astrónomas más importantes de esta época tenemos a Sophia Brahe (1556-1643), que trabajó con su hermano Tycho Brahe y a la que se le atribuye la observación del eclipse lunar de diciembre de 1573; María Cunitz (1610-1664) que encontró algunos errores en las tablas astronómicas de Kepler; Elisabetha Hevelius (1647-1693) que trabajó con su marido Johannes Hevelius, treinta y seis años mayor que ella y después de la muerte de éste publicó muchos trabajos, entre ellos un catálogo con mil quinientas sesenta y cuatro estrellas con su posición y magnitudes; María Winkelman (1670-1720) que se casó con Gottfried Kirch, treinta y un años mayor que ella, realizó los cálculos necesarios para confeccionar el calendario, descubrió un cometa, y se han podido identificar dos publicaciones suyas, pero a la muerte de su marido le fue denegada la plaza que él tenía en la Academia de Ciencias de Berlín y como nadie ponía en duda su capacidad profesional para ocupar este puesto, el argumento que soportó esta decisión de los miembros de la Academia es que no era un ejemplo para otras mujeres; Nicole Lepaute (1723-1788) que trabajó con su esposo y calculó la tabla de las oscilaciones de los péndulos, que fue publicada en el "Traité d'horlogerie" como obra de su marido, y Carolina Herchel que es la astrónoma más famosa de todos los tiempos, pues además del trabajo que realizó a la sombra de su hermano, descubrió diez cometas y tres nebulosas, una de ellas la compañera de Andrómeda y realizó un catálogo con dos mil quinientas nebulosas por el que recibió la Medalla de Oro de la Real Sociedad de Astronomía.

También se vieron, a veces, obligadas a utilizar un seudónimo masculino para garantizar que su trabajo fuese tomado en serio. Es el caso de Sophie Germain que firmaba como Monsieur Le Blanc cuando mantenía correspondencia con Gauss, y presentó una memoria anónima para acceder al premio extraordinario de la Academia de Ciencias o el de Ada Byron que firmaba sus trabajos únicamente con sus iniciales.

Por último cuando los apellidos de estas mujeres aparecen en los libros de matemáticas no se identifican con ellas. Cuando se estudian en Álgebra Conmutativa los anillos noetherianos o el teorema de Noether no se sabe que Noether se llamaba Emmy y era una mujer; cuando en teoría de números aparecen los primos de Germain o el teorema de Germain seguro que casi nadie piensa que el nombre que precede a Germain es Sophie, y quién va a sospechar al estudiar en ecuaciones diferenciales el teorema de Cauchy-Kovalevskaya que este apellido ruso se refiere

a una mujer.

En el plano de la anécdota es curioso recordar como fue desvirtuada la personalidad de María Gaetana Agnesi con la curva que lleva su nombre, cuando al traducir al inglés su libro *"Istituzioni Analitiche"*, en su referencia a la cúbica de Agnesi, o curva sinusoidal versa (versiera en italiano), se cambió el término versiera por witch que en inglés significa bruja, que fue mantenido en posteriores ediciones y traducciones y como "La bruja de Agnesi" se recuerda a esta mujer en muchas referencias históricas de las Matemáticas.

### **2.3. Su acceso a las instituciones científicas y su trabajo profesional**

Estas mujeres tuvieron, en general, grandes dificultades para ganarse la vida con su trabajo profesional. Por ejemplo, Sonia Kovalevskaya, que se había casado únicamente para salir de Rusia y continuar sus estudios de matemáticas, al llegar a Heidelberg se encontró con que allí tampoco se permitía el acceso de las mujeres a la Universidad y después de muchos esfuerzos logró que la admitieran como oyente, y cuando más tarde quiso estudiar en la Universidad de Berlín sólo logró que Weierstrass accediera a trabajar con ella de modo privado. Con él comenzó su trabajo de doctorado y obtuvo en 1874 un título "in absentia" en Göttingen con una brillante tesis sobre ecuaciones diferenciales, pero no se la permitió dar clases que no fuesen de párvulos, hasta que mucho más tarde fue admitida como profesora de Matemáticas Avanzadas en la Universidad de Estocolmo.

También la vida de Emmy Noether, fue una continua lucha por acceder a la Ciencia, comenzó a estudiar en la Universidad de Erlangen, donde su padre era profesor, con un permiso especial para asistir a clase pero que le impedía examinarse, pues dicha Universidad había prohibido el ingreso de las mujeres ya que esto "destrozaría el orden académico", más tarde cambió la ley y pudo continuar sus estudios de una forma normal, después de una brillante tesis sobre invariantes, intentó trabajar en la Universidad de Göttingen, pero de momento no tuvo éxito a pesar de los esfuerzos de Hilbert que para conseguirlo dijo al respecto: *"no veo por qué el sexo de la candidata es un argumento contra su nombramiento como docente. Después de todo no somos un establecimiento de baños"*. Tuvo que conformarse con impartir cursos que se anunciaban bajo el nombre de Hilbert hasta que después de la Primera Guerra Mundial, se modificó la ley y pudo impartir cursos con su nombre, primero sin derecho a sueldo y posteriormente en 1922 con un salario modesto, hasta que en 1933 con la llegada de Hitler al poder, como era judía, tuvo que exiliarse a Estados Unidos, allí trabajó en Princeton donde estaba también A. Einstein.

### **2.4. Utilización del nombre**

Observemos el problema de la utilización del nombre. Si las mujeres cambian de nombre al casarse, como Mary Somerville, se dificulta mucho conocer

su autoría. Mary se casó en 1804 con Samuel Greig, capitán de la marina rusa, y adquirió una mayor libertad para continuar sus estudios en matemáticas a pesar de que su marido no tenía ningún conocimiento científico y no le gustaban las mujeres sabias. La pareja vivió en Londres. Samuel murió pronto, en 1807, y Mary se encontró viuda, con dos hijos pequeños e independiente familiar y económicamente. Pudo continuar sola su educación matemática. Por primera vez era libre para conducir su vida, sin el control de padres y esposo. Ganó una medalla de plata por la solución de un problema sobre las ecuaciones diofánticas en el *Mathematical Repository* de W. Wallace. Sus amigos la animaron a que siguiera estudiando. Adquirió un conjunto de libros, recomendados por un profesor amigo. Poco después ya leía los "Principia" de Newton. Se levantaba temprano, y estudiaba o escribía durante horas para estar disponible para la familia, las amistades o los compromisos sociales que tuviera.

En 1812, con 32 años, volvió a casarse con el Dr. William Somerville, su primo, de profesión médico, que la apoyó y la alentó en sus trabajos, y que compartió su interés por la ciencia. Era un hombre de gran inteligencia y poca ambición personal. Estaba orgulloso de los éxitos y la fama de Mary. Fue un matrimonio duradero y feliz. Su marido podía usar la biblioteca de la Real Sociedad en beneficio de Mary, le presentaba a científicos importantes, y cuando ya era famosa la ayudó a editar sus libros.... Dice Ch. Lyell: *"Si nuestra amiga la señora Somerville se hubiera casado con Laplace, o con un matemático, nunca habríamos oído hablar de su trabajo. Lo habría fundido con el de su marido, presentándolo como si fuera de él"*. Tuvieron dos hijas. Su otra hija, la mayor murió en 1823, causando uno de los mayores disgustos de la vida de Mary. En su rutina diaria también se incluía la educación de esas otras dos hijas, Marta y Mary.

El 27 de marzo de 1827, lord Henry Brougham, presidente de la Cámara de los Lores, escribió a su marido pidiéndole que convenciera a Mary para que escribiera una traducción de la *Mecánica Celeste* de Laplace para su "Biblioteca de Conocimientos Útiles", dirigida a personas no instruidas. (Es curioso que en ese tiempo, y a pesar de que Mary ya era muy conocida, la correspondencia que le enviaban iba dirigida a su marido). Mary vacilaba, pero decidió hacerlo con la condición de que se mantuviera el proyecto en secreto, y con el compromiso de que su manuscrito fuese quemado si no lo consideraba aceptable. Con una organización excepcional, sin renunciar a su vida social y doméstica, trabajó en su libro e hizo frente a todas las dificultades durante cuatro años. Escribió en su autobiografía: *"Frecuentemente abandonaba mi trabajo tan pronto como me anunciaban una visita, para que nadie pudiera descubrir mi secreto"*. *"Un hombre siempre puede tener el control de su tiempo alegando que tiene negocios, a una mujer no se le permite tal excusa"*. (Alic; 1991, 217).

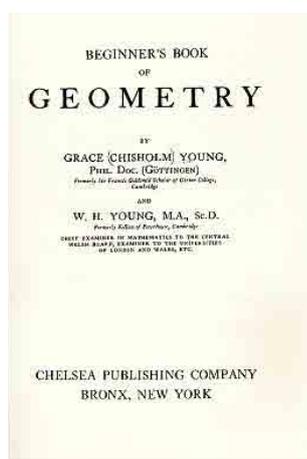
En su obra, Laplace estudiaba el sistema solar y observaba los cometas, satélites y planetas, utilizando la teoría de la gravitación de Newton. En 1808 John Playfair

comentaba que en Gran Bretaña apenas había una docena de matemáticos capaces de siquiera leerla. Era una obra larga y compleja. Se comentaba que, un día, cuando Laplace estaba cenando con los Somerville en 1817 afirmó ingenuamente: "*He escrito libros que nadie puede leer. Sólo dos mujeres han leído la "Mecánica Celeste"; ambas son escocesas: la señora Greig y usted*", pues Laplace no conocía el nombre del primer marido de Mary: Samuel Greig.

Pero, además, muchas mujeres no utilizaban su nombre, como Sophie Germain que utilizaba un pseudónimo. Tenía 19 años en 1795, cuando se fundó la Escuela Politécnica. Aunque las mujeres no eran admitidas, (la Escuela Politécnica no admitirá mujeres hasta 1970) consiguió hacerse con apuntes de algunos cursos, entre ellos, el de Análisis de Lagrange. Los estudiantes podían presentar sus eventuales investigaciones y observaciones a sus profesores. Al final del período lectivo, presentó un trabajo firmándolo como Antoine-Auguste Le Blanc. El trabajo impresionó a Joseph Lagrange por su originalidad y quiso conocer a su autor. Al conocer su verdadera identidad, fue personalmente a felicitarla y le predijo éxito como analista, animándola de esta forma a seguir estudiando. Su nivel de conocimientos era absolutamente inhabitual para una mujer de su época ya que ella había estudiado realmente las obras científicas, no los ensayos escritos para mujeres.

A partir de 1801, después de leer *Disquisitiones Arithmeticae* que Karl Friedrich Gauss acababa de publicar, se dedicó al estudio de la Teoría de Números. Entre 1804 y 1809 escribió varias cartas a Gauss mostrando sus investigaciones. Temerosa del ridículo que en aquella época suponía una mujer erudita, esta correspondencia estaba firmada con el seudónimo "*Monsieur Le Blanc*". Gauss estaba tan ocupado en su propia investigación monumental que sólo contestaba cuando el trabajo de Sophie estaba relacionado con sus propios teoremas. (Alic; 1991, 176).

### 3. Primer libro de geometría



Este libro, *Primer libro de Geometría (First Book of Geometry)* fue publicado en 1905 en Londres, traducido al alemán se publicó en Leipzig en 1908 bajo el título "*Der Kleine Geometer*", al hebreo en Dreden en 1921 y ha sido recientemente reeditado en 1970 bajo el título "*Beginner's Book of Geometry*" edición prácticamente igual a la original salvo la corrección de erratas, y causado sorpresa por lo *moderno* que aún hoy resulta.

En su introducción, Grace escribía que el estudio de la geometría en primaria y en secundaria padece considerablemente por el hecho de que los escolares no han adquirido previamente el hábito de la observación geométrica, no se les ha animado a la práctica natural del pensamiento en dimensión tres, que recibía mucha menos atención que la geometría del plano. Opinaba que esto no debía ser así porque *"en cierto sentido la geometría plana es más abstracta que la tridimensional, o también llamada Geometría del Sólido"*, (Young; 1970, Introduction), y consideraba que la geometría tridimensional era más cercana a la experiencia, era más natural.

Una de las razones por las que la geometría plana ha mantenido esta situación privilegiada durante cientos de años y se estudia en los cursos preliminares es probablemente debido al valor didáctico del dibujo de los diagramas planos en papel o en la pizarra o en otros medios equivalentes. Estos métodos tienen las siguientes ventajas:

1. No requieren un equipamiento especial.
2. Es fácil de enseñar y comprender, y sólo requiere cuidado y práctica.
3. Los diagramas pueden reproducirse tan a menudo como sea necesario, incluso por el estudiante, adquiriendo la necesaria destreza.

Pero admitía, sin embargo, muy difícil representar figuras tridimensionales en una superficie bidimensional como es una página de un libro, y consideraba que ésta era la razón por la que no se trabajaba (y actualmente tampoco se trabaja) adecuadamente.

*"El obstáculo en el camino del propio desarrollo de las ideas geométricas ha sido la carencia de un método que ocupe el lugar del dibujo de la geometría plana. El dibujo de los cuerpos sólidos es demasiado difícil. Los modelos, la mayor parte de cartón, tienen el mismo defecto... relativamente caros y requieren constante supervisión "*.

Grace opinaba que el alumnado debía construir figuras espaciales, utilizando *papel, lápiz, alfileres, tijeras, cosas que cualquier niño pequeño debe y puede tener*, por lo que incluyó en su libro muchos diagramas de figuras tridimensionales para ser recortados y construidos. *"Los métodos adoptados en el presente libro requieren pocos utensilios, sólo papel, ocasionalmente unos pocos alfileres, un lápiz y un par de tijeras"*. Opinaba que esa era la forma en que el alumnado debía familiarizarse con las propiedades de estas figuras y que utilizándolas, con su ayuda, podía visualizar los teoremas de la geometría tridimensional.

Podemos observar como estas teorías didácticas resultan muy actuales.

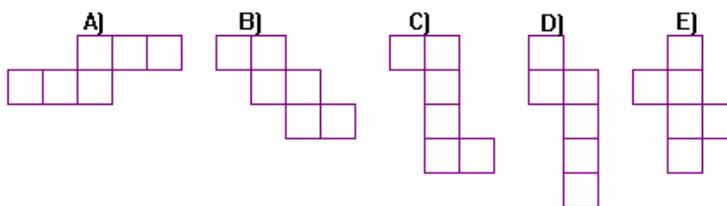
## 4. Enseñanza de la Geometría: Algunas sugerencias

### Construcción de muchos cuerpos geométricos mediante sus desarrollos

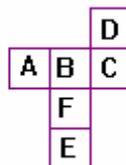
#### 4.1. Tramas de cuadrados

Utilizar una trama de cuadrados en actividades como:

**Actividad a):** ¿Cuál de las siguientes figuras no representa el desarrollo de un cubo?

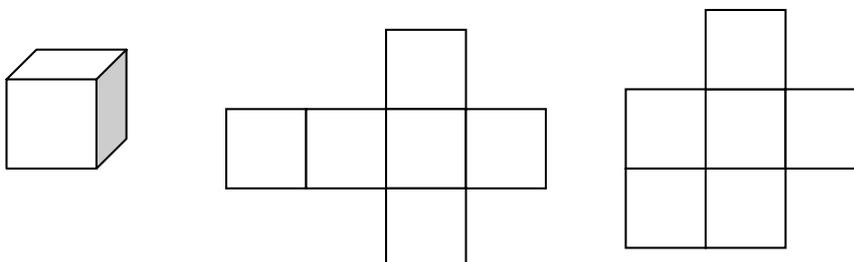


**Actividad b):** Al formar un cubo con el desarrollo de la figura, ¿cuál será la letra opuesta a F?

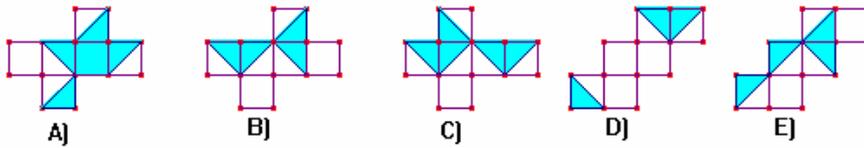


**Actividad c):** Obtener todos los hexaminos con los que sea posible construir un cubo.

**Actividad d):** Utiliza una trama de cuadrados o papel cuadriculado, y busca todos los diseños de seis cuadrados que se te ocurran. Decide cuáles pueden servir para construir un cubo.

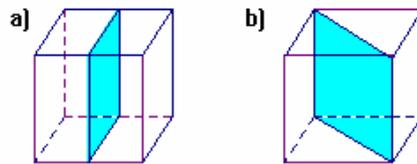


**Actividad e):** A partir de uno de estos desarrollos bicolors, se puede fabricar un cubo, de forma que los colores sean los mismos en las dos partes de cada una de las aristas. ¿Cuál de ellos lo verifica?



### 4.2. Secciones del cubo

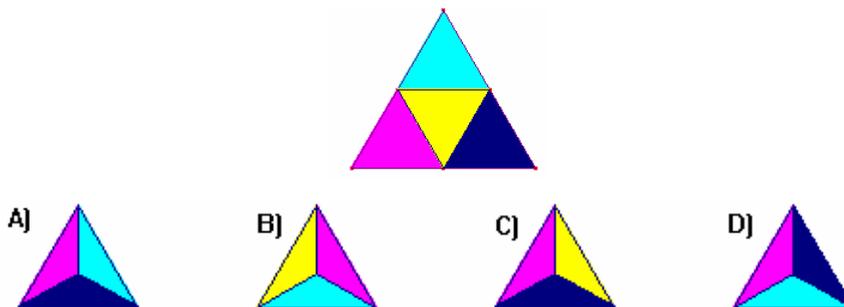
Una actividad muy interesante es la de construir distintas secciones de un cubo. Se puede hacer cortando mediante un hilo candente cubos de estiropor, para luego confeccionar su desarrollo plano y construirlos en cartulina:



**Actividad:** Es posible cortar un cubo en dos cuerpos geométricos iguales, de muchas formas, como por ejemplo, mediante un plano que pase por dos aristas y dos diagonales de las caras, tal y como se observa en la ilustración. Haz el desarrollo plano de esa sección del cubo, y construye dos de esos cuerpos. Descríbelos. Piensa otros ejemplos de secciones del cubo en dos cuerpos geométricos iguales, confecciona su desarrollo plano y construye dichas secciones.

### 4.3. Trama de triángulos

**Actividad:** El triángulo de la figura se ha plegado para obtener un tetraedro. Teniendo en cuenta que el triángulo no está pintado por detrás. ¿Cuál de las siguientes vistas en perspectiva del tetraedro es falsa?



**Actividad:** Dibuja desarrollos planos que sirvan para construir un tetraedro regular.

#### 4.4. Deltaedros

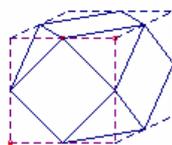
Utilizar una trama de triángulos para investigar los poliedros que se pueden construir con ellos. Construirlos. Contar sus vértices, aristas, caras y comprobar como existe el deltaedro de 4, 6, 8,..., 20 caras, pero hay uno, el de 18 caras, que no se puede construir.

**Actividad:** Dibuja en una cartulina una trama de triángulos y útilízala para construir deltaedros. Un deltaedro es un poliedro que tiene todas las caras triángulos. Con cuatro triángulos puedes construir un tetraedro. Con seis, la bipirámide triangular. Con ocho, el octaedro. Con veinte, el icosaedro. Comprueba que no puedes construir ningún poliedro convexo con cinco caras triángulos. Construye los deltaedros de 10, 12, 14, y 16 caras. Completa el cuadro siguiente:

Nº de caras	Nº de vértices	Nº de aristas	Nº de vértices de orden 3	Nº de vértices de orden 4	Nº de vértices de orden 5
4					
6					
8					
10					
12					
14					
16					
20					

#### 4.5. Otros desarrollos

**Actividad:** Haz el desarrollo del cuerpo siguiente:

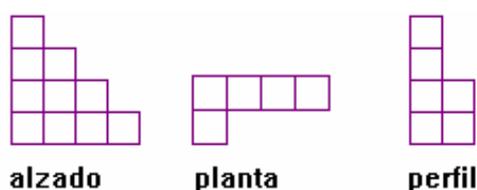


#### 4.6. Otros desarrollos

En todas estas actividades, siguiendo a Grace, pasamos del desarrollo plano de un cuerpo, a construirlo en el espacio. O bien, de conocer al cuerpo en el espacio y diseñar su **desarrollo plano**. Es decir, se pasa del plano al espacio y del espacio al plano.

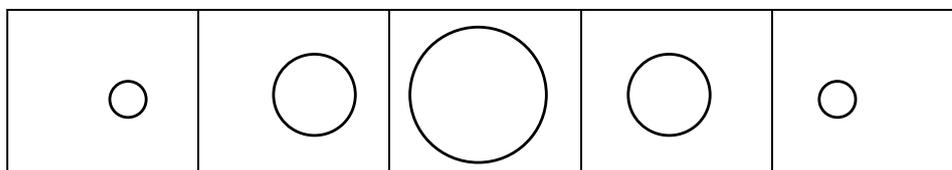
Otros trabajos son, utilizar la **planta, perfil y alzado** de los cuerpos. Cuando los arquitectos y los ingenieros necesitan representar en papel los edificios o las piezas de las máquinas que diseñan, las dibujan tomando diferentes puntos de vista. De nuevo se trabaja pasando del espacio, con un cuerpo o una pieza, al plano, dibujando sus tres proyecciones. O bien dadas las tres proyecciones, tener que obtener el cuerpo del que provienen:

**Actividad:** Aquí tenemos las tres vistas, alzado (de frente), planta (desde arriba) y perfil (lateral) de un mismo "castillo" de cubos. ¿Con cuántos cubos se ha construido el castillo?



Los médicos y otros profesionales utilizan técnicas distintas. Para conocer la forma de un órgano, o de otro objeto, hacen tomografías. Esta técnica consiste en obtener imágenes de distintas secciones paralelas del objeto.

**Actividad:** Por ejemplo: ¿de qué objeto es la tomografía siguiente?:



Igual que en los casos anteriores se proponen actividades que hagan ir del plano al espacio y del espacio al plano.

#### 4.7. Otros poliedros

**Actividad:** Es posible construir poliedros utilizando **materiales** muy variados: cartulina, material plástico... si queremos ver sus caras y aristas, o como una armazón de aristas, utilizando palillos, varillas, pajitas de refresco, escobillas de limpiar pipas... Utiliza pajitas de refresco que puedes unir con aguja e hilo, y puedes afianzar con pegamento una vez construido, y construye tres poliedros.

**Actividad:** Utiliza el procedimiento anterior para construir bpirámides, es decir, poliedros que se obtienen al juntar dos pirámides iguales haciendo coincidir sus bases. Construye una bpirámide triangular y otra cuadrangular. Dibújalas en perspectiva caballera. Haz su desarrollo plano. ¿Puedes construir una bpirámide

triangular con todas sus caras triángulos equiláteros e iguales? ¿Y una biperámide cuadrangular? ¿Alguna biperámide, es un poliedro regular?

**Actividad:** Utiliza el procedimiento anterior para construir **antiprismas**, es decir, poliedros que tienen dos bases iguales, pero cuyas caras laterales no son rectángulos, sino triángulos. Construye un antiprisma de base triangular y otro de base cuadrangular. Dibújalos en perspectiva caballera. Haz su desarrollo plano.

#### 4.8. Movimientos en el espacio

Traslaciones, giros, simetrías pueden estudiarse en dimensión tres analizando el entorno que nos rodea. En general, en un edificio se aprecian **traslaciones**, elementos que se repiten.

Una puerta gira, las patillas de las gafas giran, las ruedas de un coche giran... Observa que para determinar un giro en el espacio se necesita, además del ángulo (y su sentido), conocer el **eje de giro**. ¿Qué puntos se transforman en sí mismos? El giro en el espacio deja invariantes a los puntos del eje de giro.

Si  $P'$  es el simétrico de  $P$  respecto a la **simetría central** de centro  $O$ , entonces,  $O$  es el punto medio del segmento  $PP'$ . La simetría central en el espacio no es un giro. Además solo deja un punto invariante, el centro.

Muchos animales son casi simétricos. Los coches son simétricos. Si nos miramos en un espejo vemos una imagen reflejada que es simétrica a la nuestra. Para determinar una **simetría** en el espacio es necesario conocer un plano, el plano de simetría. Una simetría en el espacio deja invariantes los puntos pertenecientes al plano de simetría.

Además se tiene la simetría con deslizamiento, la simetría rotativa y el movimiento helicoidal.

Es interesante estudiar el grupo de autosimetría de objetos cotidianos.

**Actividad:** ¿Cuál es el grupo de autosimetría de estas pirámides?



**Actividad: Un juego de dos jugadores.** Se forma sobre la mesa un polígono regular utilizando monedas (o fichas o bolitas de papel) como vértices. Cada jugador retira, alternativamente, o una moneda o dos monedas adyacentes. Gana quien retire la última moneda. (Ayuda: Es un juego de estrategia ganadora que puedes descubrir utilizando la simetría central).

## 5. Conclusiones: Geometría y coeducación

En la enseñanza de las Matemáticas en Secundaria se proponen algunas estrategias, como hacer Matemáticas en la clase de Matemáticas, promover la investigación en el aula, la colaboración y la cooperación frente a la competitividad, prestar atención a las exposiciones orales y escritas, trabajar la visión espacial en el aula especialmente en la enseñanza de la geometría, proporcionar modelos de mujeres matemáticas en la historia y analizar datos en la clase de estadística que tengan en cuenta la variable de género.

Quiero hacer especial mención a que, en mi opinión, se están dando pasos hacia atrás en este sentido. Hubo un momento en que se trabajó al menos por una educación conjunta de chicos y chicas, y sin embargo ahora hay muchos centros subvencionados con separación de géneros. Por esa razón he querido comentar lo importante que es para las mujeres el tener acceso a la mejor formación. Cuando todavía no hemos llegado a tener una auténtica coeducación ya se ha comenzado a separar, lo que conduce a tener una formación diferente.

Conviene no descuidar la **enseñanza de la geometría en la clase de matemáticas**. No dejar los trabajos de geometría "para casa" sino dar un tiempo y un lugar para hacerlos en el aula. Es conveniente poder dotar de intuiciones geométricas apoyándonos en materiales de aula adecuados según la edad del alumnado. Si no proporcionamos este trabajo en el aula, desmerecerá el aprendizaje de todos, pero en particular de aquellas chicas que, por el tipo de juegos de su infancia, han desarrollado poco la visión espacial. Tradicionalmente el niño salta, corre, juega con construcciones mientras que la niña juega tranquilamente sentada con una muñeca entre los brazos.

Utilizar la historia en clase es adecuado pues se enseña que ésta no es algo que ha nacido ya elaborado sino que surge para resolver problemas. La historia de la ciencia que conocemos es una historia de hombre, de raza blanca, en la ciencia occidental. Sin embargo el conocimiento científico se acumula en un proceso lento de descubrimiento. Las mujeres también han contribuido a este proceso.

*"El trabajo científico necesita de inteligencia, creatividad, instrucción y decisión. Como resultado de ello, la historia de la ciencia es siempre la de un grupo selecto de individuos. Por desgracia, la historia de las mujeres en la ciencia es aún más selectiva. Es, en su mayoría, la historia de mujeres privilegiadas, con una situación que les permite instruirse y cultivar sus intereses científicos a pesar*

*de estar excluidas de las instalaciones educativas y de las fraternidades formales e informales de los hombres de ciencia"* (Alic; 1991, 14).

## Bibliografía

- [1] M. Alic, *El legado de Hipatia. Historia de las mujeres desde la Antigüedad hasta fines del siglo XIX*. Siglo veintiuno editores. Madrid. 1991.
- [2] J. Arrieta, *La discriminación positiva hacia las chicas en las aulas de matemáticas ¿debe conducir a su segregación?*, Revista SUMA Revista sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas de la F.E.S.P.M., nº 20, pag. 19-27, 1995.
- [3] J. Brihuega, M. Molero, A. Salvador, *Didáctica de las Matemáticas*. ICE de la Universidad Complutense. Madrid. 1995.
- [4] E. Eychenne, *Mathématiciennes, ... des inconnues parmi d'autres*. Brochure de l'IREM de Besançon. 1993.
- [5] L. Figueiras, M. Molero, A. Salvador, N. Zuasti, *Dificultades y logros de una mujer matemática: Mary Somerville*, Revista SUMA. Revista sobre la Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas. Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas. Volumen 25. Zaragoza. 1997. 45-52.
- [6] L. Figueiras, M. Molero, A. Salvador, N. Zuasti, *Género y Matemáticas*, Editorial Síntesis. Madrid. 1998.
- [7] L. Figueiras, M. Molero, A. Salvador, N. Zuasti, *El juego de Ada. Matemáticas en las Matemáticas*, Proyecto Sur de Ediciones, S. L. Granada. 1998.
- [8] I. Grattan-Guinness, *A Mathematical Union: William Henry and Grace Chisholm Young*, Annals of Science, 29. 2 Agosto de 1972.
- [9] S. Kovalevskaya, *A Russian Childhood*, Spriger Verlag (1978). New York. 1889.
- [10] L. Lafortune, H. Kayler, *Les femmes font des Maths*, Les Éditions du remue-ménage. Montreal. 1992.
- [11] S. Mataix, *Matemática es nombre de mujer*, Editorial Rubes. 1999.
- [12] M. Molero, A. Salvador, *Sonia Kovalevkaya*, Editorial Orto.
- [13] T. Perl, *Biographies of Women Mathematicians + Related Activities*, Math Equals. Addison-Wesley Innovative Series. USA. 1978.
- [14] A. Salvador, A. Salvador, M. Molero, *Mujeres y Matemáticas. Propuestas para una acción compensatoria*, Números. 22. 37-40. Tenerife. 1992.
- [15] A. Salvador, M. Molero, *Émilie de Breteuil, Marquesa de Châtelet*, Editorial Orto.
- [16] S. M. Smith, *Agnesi to Zeno: Over 100 Vignettes from the History of Math*, Key Curriculum Press. Berkeley. 1996.
- [17] N. Solsona, *Mujeres Científicas de todos los tiempos*, Talasa Ediciones. Madrid. 1997.

[18] G. J. Tee, *The pioneering Women Mathematicians. The Mathematical Intelligencer*, Vol 5. nº 4. 1983.

[19] G. Ch. Young, *Beginners Book of Geometry*, Chelsea Publishing. New York. 1970.

**Adela Salvador Alcaide**

Universidad Politécnica de Madrid  
E.T.S.I. Caminos, Canales Y Puertos  
Departamento de Matemáticas e  
Informática Aplicada a la Ingeniería Civil.  
c/ Profesor Aranguren, s/n - 28040 Madrid  
e-mail: [ma09@caminos.upm.es](mailto:ma09@caminos.upm.es)

