Sorpresas[1] matemáticas en 3D

por

Claudi Alsina Català, Universitat Politècnica de Catalunya

Dedicado a todos los que viven en Planilandia con la esperanza de que algún día puedan tener el placer de descubrir la tridimensionalidad. *C.A.*

Bienvenidas y bienvenidos a este humilde paseo geométrico por la tridimensionalidad, un lugar hermoso de la matemática donde aún se puede experimentar la maravillosa sensación de sorprenderse. En la investigación matemática, en la enseñanza, o en la vida en general, resulta fundamental no perder nunca el interés por descubrir cosas curiosas y dejarse sorprender por los resultados. Las matemáticas no son solo una producción rigurosa de teoremas sino el resultado de muchos razonamientos plausibles, intuiciones diversas y grandes dosis de creatividad. Por esto las matemáticas son también una forma singular de pensar y de mirar al mundo que nos rodea con una mirada especial.

Mi objetivo esencial en esta conferencia es compartir una serie de hechos geométricos en 3D que creo pueden sorprender a pesar de ser elementales y fáciles de entender.

Algunos son viejos conocimientos repartidos en mil referencias dispersas. Otros provienen de mis indagaciones personales. En cualquier caso todas las sorpresas que aquí mencionaremos son una defensa apasionada del estudio geométrico sintético, una invitación a redescubrir la visualización, la experimentación, el

[1]La denominación "sorpresa matemática" es ciertamente ambigua y en última instancia debería relativizarse al nivel de conocimientos de cada uno. Lo que para unos puede parecer normal, esperable o de sentido común para otros puede resultar novedoso, inesperado o extraordinario. Nos gustaría que aquí estas sorpresas fueran una forma amable de descubrir hechos geométricos atractivos o útiles.

uso de los modelos geométricos y sus aplicaciones rompiendo con la tradicional formalización que ahoga con expresiones formales o generalizaciones audaces la encantadora aventura de vivir la geometría tridimensional.

1. Sorpresas de la tridimensionalidad

Empecemos pues nuestro sorprendente paseo.

Sorpresa 1. ***Las dificultades de la dimensión 3.***

Desde un punto de vista estrictamente matemático el estudio de la dimensión 3 parece presentar dificultades, inusuales en otros espacios. Para empezar el espacio $\mathbb{R}^3$ es algebraicamente pobre.

$\mathbb{R}$ es cuerpo conmutativo, $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ también lo es y $\mathbb{H} = \mathbb{R}^4$ es el cuerpo no conmutativo de los cuaterniones... sin embargo $\mathbb{R}^3$ no admite la estructura de álgebra normada (teorema de Hurwitz). $\mathbb{R}^3$ es un espacio vectorial y es un álgebra de Lie al considerar el producto vectorial, es un espacio normado de Banach y es un espacio de Hilbert... pero no deja de ser, sorprendentemente, más pobre algebraicamente que sus espacios vecinos $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^4$.

El hecho de que no haya isometrías entre esferas en $\mathbb{R}^3$ y planos tiene enorme repercusión en las representaciones planas de esferas: o se logran mapas (conformes) conservando ángulos o se conservan áreas (proyección cilíndrica). Las proyecciones estereográficas merecen también especial atención.

La enorme complejidad de la teoría de nudos y su clasificación según cruces, la famosa conjetura de Poincaré de 1904 (*"si una variedad compacta y conexa de dimensión 3 tiene grupo fundamental trivial entonces es homeomorfa a $\mathbb{S}^3$"*); la complejidad de la topología en dimensión 3 o del estudio de superficies desde diversos puntos de vista (diferencial, topológico, algebraico,...) nos lleva a la conclusión de que es precisamente el espacio tridimensional uno de los objetos matemáticos más sorprendentes y dignos de investigación. La Geometría Computacional aborda hoy nuevos problemas de representación y nuevas disciplinas, como el reconocimiento de patrones e imágenes, tienen hoy en la tridimensionalidad su gran reto.

Sorpresa 2. ***Cuatro colores no son suficientes.***

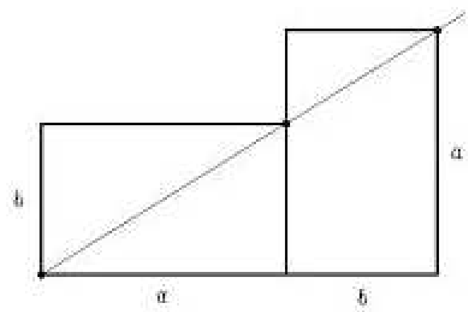
El famoso teorema de los 4 colores establece que en el plano 4 colores son suficientes para colorear un mapa (grafo poligonal) de forma que caras con fronteras comunes (no puntuales) tengan color diferente. ¿Qué ocurre en 3D?... pues que se necesitan infinitos colores. Descubrí esta propiedad inventando una secuencia de formas poliédricas de manera que cada una toca a las anteriores y de forma recurrente van necesitándose más y más colores.

Sorpresa 3. ***El número plástico en 3D, el número de oro en 2D.***

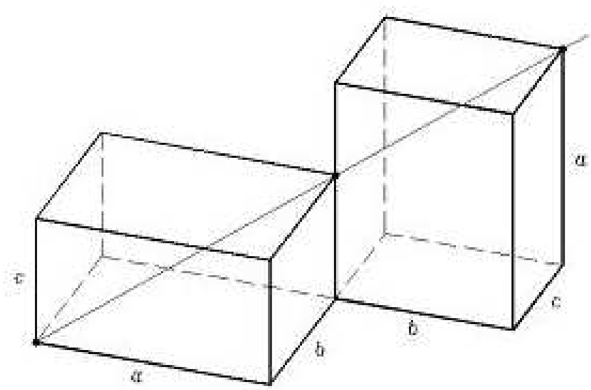
El número de oro 1.618... es esencialmente plano. El número plástico 1.3214 es esencialmente tridimensional (C. Alsina y J. García-Roig).

Nuestro querido número de oro $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ lo obtenemos como solución de la ecuación $x^2 = 1+x$ o como límite de las razones entre cada término y su anterior de la sucesión de Fibonacci 1, 1, 2, 3, 5, 8, ... ($a_0 = a_1 = 1$, $a_{i+1} = a_i + a_{i-1}$, $i \geq 1$).

El rectángulo de proporción $a : b = \Phi$ puede caracterizarse como el único donde la propiedad de la siguiente figura vale ($a > b$)



¿Cómo se generaliza esta propiedad al espacio, con cajas? La siguiente figura nos da una versión posible ($a > b > c$):



¿Cómo son las cajas que verifican esto? Esta es una versión genuinamente tridimensional. La sorpresa es que las cajas deben ser con medidas del tipo $a = cP^2$, $b = cP$ y c arbitrario (note que $b = \sqrt{ac}$), siendo P el número plástico $P = 1{,}3214...$ solución de la ecuación $x^3 = 1 + x$. ¿Se fija en el "3"? Este número fue considerado por el arquitecto Van der Laand como límite de las razones de cada término por su anterior en la sucesión 1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 7, 9,... ($a_0 = a_1 = a_2 = 1$, $a_{i+2} = a_i + a_{i-1}$, $i \geq 1$). ¿Se fija en los "tres" unos y en el salto? Y en dimensión N con $N \geq 4$ las hipercajas que resultan están ligadas a la ecuación $x^N = 1 + x$.

Sorpresa 4. ***Poliedros con vértices enteros.***

En el plano tenemos interesantes familias de polígonos cuyos vértices tienen coordenadas enteras (polígonos en cuadrículas) y algunas fórmulas sorprendentes como la de Pick. Consideremos una cubicación del espacio y en ella poliedros primitivos convexos cuyos vértices tengan siempre las tres coordenadas enteras ($\pm p$, $\pm q$, $\pm r$) y no tengan puntos de este estilo ni en el interior ni en la frontera. El área de los polígonos primitivos convexos no puede sobrepasar el valor 1 pero los tetraedros con vértices $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(1, 1, m)$ son primitivos y convexos con volumen $\frac{m}{6}$, número tan grande como se quiera.

Sorpresa 5. ***Duplicación del cubo.***

Imposible la duplicación del cubo con regla y compás al ser $\sqrt[3]{2}$ no construible con dichos instrumentos. Sin embargo la duplicación es posible con diversos mecanismos tridimensionales [14].

Sorpresa 6. ***Inscripción del polígono regular de 7 lados.***

Otro problema clásico irresoluble con regla y compás que se resuelve con cartulinas, tijeras, regla y compás y lápiz (Alsina). Construido un círculo de radio R en una cartulina, en otra se traza semicírculo de radio $r = \frac{8R}{7}$ en el cual se inscribe un octógono regular, trazando sus triángulos interiores desde el centre a los lados. Se recorta uno de estos triángulos y se forma un cono cuya circunferencia base mide $2R$ y tiene una división exacta en 7 partes. Al colocar como sobre círculo de partida se podrá marcar el heptágono regular en el círculo de partida.

Sorpresa 7. ***Repartición justa de un pastel 3D.***

Dado un pastel en forma ortoédrica con chocolate en la cara de arriba y mantequilla en las caras laterales ¿se puede repartir el pastel entre n personas de manera que cada una reciba la misma cantidad (peso) de pastel, la misma cantidad de chocolate y la misma cantidad de mantequilla? Si no se dice nada más trituren el pastel en el pimer y repartan a cucharadas según peso ¿y con cortes de cuchillo?

Hay infinitas maneras de hacerlo pero no se conoce una solución donde cada trozo sea conexo e igual a los demás.

Sorpresa 8. ***La tetraedrización de poliedros.***

La triangularización de polígonos es una operación clave en muchos estudios y aplicaciones poligonales. ¿Pueden dividirse los poliedros en tetraedros? Muchos si... pero no todos. Con convexos no hay problema pero se conocen cóncavos que no admiten tal disección.

Sorpresa 9. ***Vértices, caras, aristas e igualdades.***

Los vértices en el espacio no determinan en general los mismos poliedros. Diferentes poliedros pueden tener todas sus caras situadas en los mismos planos. Idénticos vértices e igual conjunto de planos conteniendo las caras tampoco dan poliedros iguales.

Sorpresa 10. ***En los poliedros convexos vale la fórmula de Euler*** $C + V = A + 2$ ***pero hay relaciones subyacentes entre*** C ***y*** V***.***

Como con menos de 4 vértices no tiene poliedro es $4 \leq V$ y como en cada vértice necesita al menos 3 aristas $3V \leq 2A = 2C+2V-4$ y resulta $4 \leq V \leq 2C-4$. Análogamente resulta $4 \leq C \leq 2V - 4$. Así pues los valores de V y C tienen notables restricciones.

Sorpresa 11. ***En todo poliedro convexo siempre tendrá al menos una cara triangular o una cara cuadrangular o una cara pentagonal.***

Si C_n indica el número de caras con n aristas y V_n el número de vértices con n aristas y se combinan las relaciones $C + V = A + 2$, $2A = 3C_3 + 4C_4 + \ldots$, $2A = 3V_3 + 4V_4 + \ldots$ resulta una nueva presentación de la fórmula de Euler sin aristas y sin C_6:

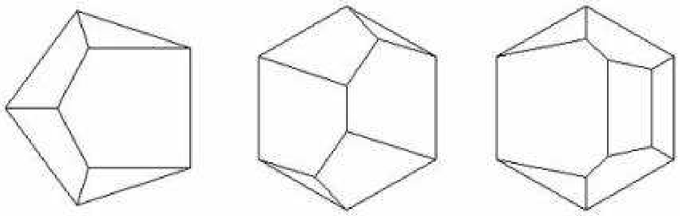
$$3C_3 + 2C_4 + C_5 = 12 + (2V_4 + 4V_5 + \ldots) + (C_7 + 2C_8 + \ldots)$$

Como la suma de la derecha es mayor o igual que 12 los términos C_3, C_4 y C_5 no pueden ser nulos a la vez y la sorpresa 2 queda justificada. Nótese que la relación $3C_3 + 2C_4 + C_5 \geq 12$ le da ya maravillosas e inesperadas relaciones, por ejemplo, si no hay ni triángulos ni cuadriláteros ($C_3 = C_4 = 0$), al menos hay 12 pentágonos (!).

Sorpresa 12. ***No puede existir un poliedro convexo donde todas las caras tengan un número diferente de aristas.***

Parece que la “repetición” es algo ligado al espacio.

Sorpresa 13. ***Sólo hay tres tipos de poliedros donde ninguna cara se repite tres veces.***



Sorpresa 14. ***Si un poliedro convexo*** P ***tiene*** n ***vértices*** $v_1, v_2, \ldots, v_n$ ***y*** D_i ***indica el defecto angular de*** v_i ***(o sea la diferencia en*** 2π ***y la suma de los ángulos concurrentes en*** v_i***) entonces la suma*** D ***de todos los defectos angulares de*** P ***siempre vale*** 4π.

La fórmula de Euler (1707-1783) nos da la relación $C + V - A = 2$ para poliedros convexos. Para estos animales Descartes (1596-1650) mostró que el defecto angular total era $D = 4\pi$. Estos resultados se relacionan con la curiosa igualdad $D = 2\pi\ (C + V - A)$ que los hace equivalentes. Cabe notar que el resultado de Descartes no se publicó hasta 1883, cien años después de la muerte de Euler.

Sorpresa 15. ***Todo poliedro regular o es una pirámide o es un antiprisma o es reunión de un antiprisma con pirámide o troncos de pirámides.***

¿Cómo diseccionaría el cubo en un antiprisma y dos pirámides?

Sorpresa 16. ***Ningún cubo puede diseccionarse en un número finito de cubos todos ellos diferentes.***

Note que algunos cuadrados si admiten disección en cuadraditos todos diferentes.

Sorpresa 17. ***En dimensión 2 hay infinitos polígonos regulares,... en dimensión 3 solo hay 5 tipos de poliedros regulares... en dimensión 4 solo hay 6 tipos de "politopos" regulares... en dimensión n con*** $n \geq 5$ ***hay... 3 tipos de "politopos" regulares.***

Así pues los n-cubos, los n-tetraedros y los n-octaedros son politopos regulares omnipresentes en los diferentes "espacios", lo cual permite contemplar en el mundo tridimenisional a icosaedros y dodecaedros como objetos singulares del espacio.

Al ir aumentando las dimensiones las sorpresas también aumentan. Resulta sorprendente, por ejemplo, la evolución creciente al principio de los volúmenes de las n-esferas de radio unidad para luego cambiar el carácter monótono inicial.

También hay sorpresas derivadas del desconocimiento, del no saber, aún hoy, las soluciones posibles a un problema:

Sorpresa 18. ***Las cajas perfectas.***

¿Puede existir una caja (ortoedro) con las aristas de longitudes enteras y las diagonales de las caras y la diagonal principal también con valores enteros?

¡Esta es la caja más buscada desde hace décadas!

Hay infinitos rectángulos perfectos con lados y diagonales enteras (ternas pitagóricas) pero no se conoce ni una caja con tal perfección. Sin embargo otros poliedros si que son perfectos sin ser cajas. B.E. Peterson y J.H. Jordan encontraron un hexaedro con 8 vértices y 6 caras que son cuadriláteros con todas las aristas, diagonales de las caras y diagonales interiores enteras. Los dobles tetraedros de H. Harboth y A. Kenniz o las pirámides de A. Millar y M. Möller son otras criaturas perfectas.

Sorpresa 19. ***Pitágoras en 3D.***

¿Hay un teorema de Pitágoras en 3D?

La pregunta es totalmente ambigua y admite diversas respuestas según se vaya matizando lo que se persigue. Para muchas personas el teorema de Pitágoras clásico permite el cálculo de la distancia euclídea entre dos puntos del plano

$$d((a,b),(c,d)) = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}$$

expresión que en el espacio lleva a la fórmula

$$d((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + (x_3-y_3)^2}$$

y se considera a esta fórmula como la versión 3D de Pitágoras: el cuadrado de la diagonal principal de una caja (ortoedro) es igual a la suma de los cuadrados de las otras aristas principales de la caja.

Para otras personas, la figura espacial que debe generalizar al típico triángulo rectángulo plano es la pirámide de base triangular en cuyo vértice superior inciden las tres aristas perpendiculares dos a dos y en este caso, es fácil verificar, que el cuadrado del área del triángulo de la base es igual a la suma de los cuadrados de las áreas de las tres caras triangulares laterales... otra versión posible.

Una tercera alternativa es pensar que si el teorema de Pitágoras del plano permite “sumar dos cuadrados” para obtener un tercer cuadrado cuya área es la suma de la de los dos de partida, la versión 3D debería dar un procedimiento para “sumar dos cubos”, para obtener un cubo cuyo volumen fuese la suma de los volúmenes de los cubos de partida. Pero una relación del tipo $z^3 = x^3 + y^3$ no es tratable con regla y compás (si $x = y$, $z = \sqrt[3]{2}x$ y la duplicación del cubo es imposible). Con otros instrumentos adecuados puede construirse $z = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$... pero no es obvio que exista una versión de dicho procedimiento vía disecciones de cubos.

Sorpresa 20. ***El significado geométrico de la asociatividad.***

Considérese una operación binaria continua $F : I \times I \longrightarrow I$ siendo I un intervalo real ($[0, 1]$, $\mathbb{R}^+$, $\mathbb{R}$,...) y asociemos a dicha operación la superficie $z = F(x, y)$. Si se sabe por cálculo que F es asociativa ($F(x, F(y, z)) = F(F(x, y), z)$), F es conmutativa, no decreciente con unidad y con elemento nulo (o incluso que F sea diferenciable) ¿qué influencia tiene la asociatividad en la geometría de la superficie? ¿Podría concluirse la asociatividad a partir de alguna propiedad geométrica? Esta cuestión sigue abierta después de muchos años, con contribuciones parciales de C. Alsina, M.J. Frank, B. Schweizer y A. Sklar.

2. Sorpresas de la geometría cotidiana

Recientemente Raúl Ibáñez ([22]) ya ofreció un magnifico paseo por las formas geométricas en arquitectura. Una de mis áreas de investigación es la geometría de Gaudí pero les remito a los escritos que puedan encontrar, por ejemplo en (Giralt-Miracle, 2002) para conocer los secretos tridimensionles de la geometría gaudiniana.

Lo que aquí en la última parte de la conferencia quisiera compartir a través de imágenes es el tema que he tratado en la publicación [6] sobre geometría cotidiana.

Nuestro entorno, y por tanto nuestra vida, está llena de formas geométricas. Algunas son naturales pero una enorme cantidad de dichas formas son el resultado de un inteligente proceso de diseño.

El diseño busca soluciones geométricas óptimas para dar formas y medidas a objetos que deben cumplir determinadas funciones. En esta búsqueda para dar respuestas a las relaciones formas-funciones surge la geometría aportando figuras o transformaciones. Pero el diseño no se reduce a la creatividad geométrica sino que debe conjugar la dimensión geométrica con las consideraciones ergonómicas, económicas, perceptivas, las texturas, los colores, etc. La geometría cotidiana no es, en consecuencia, un corolario de la geometría euclídea sino una componente de un proceso creativo más complejo.

Entre las curvas más relevantes en diseño encontraremos las cónicas, las espirales, la catenaria, las hélices, las sinusoides... Entre las superficies las planas, las cuadráticas y ciertas superficies regladas, mínimas y de revolución. Las formas poliédricas también tienen su papel. Y también en la geometría cotidiana encontramos un mundo de sorpresas que en primera aproximación podríamos describir así:

3. Sorpresas en las formas

Podríamos citar, por ejemplo, las espirales en las mecedoras de Thonet, el uso de catenarias en arcos, el uso del triángulo de Reuleaux en motores, taladros y en las pastillas de menta SMINT®, conos para helados, espirales en discos de vinilo, hiperboloide de una hoja en gramófonos, campanas y trompetas, paraboloide hiperbólico en patatas fritas, etc., etc., etc.

4. Sorpresas en las soluciones

El diseño minimalista, el tecnológico avanzado o el más creativo nos puede sorprender con soluciones (propuestas) inesperadas: las escaleras plegables telescópicamente, las estructuras plegables de mesas, los paraguas super-plegables, las nuevas llaves de habitaciones de hotel basadas en bandas magnéticas, la tecnología Wifi, los lápices digitales, etc.

Objetos como los clips, las pinzas de tender la ropa o las tradicionales hueveras contienen en su minimalismo, su economía y su funcionalidad duradera esta perfección de diseño donde se tiene una forma óptima para una solución estupenda.

5. Conclusión

A través de veinte pequeñas sorpresas geométricas y la colección de resultados de diseño no gustaría haber suscitado un cierto interés puro o aplicado por trabajar en 3D.

Quedan invitados a visitar el apartado “Un viaje al espacio” en mi web

http://www.upc.edu/ea-smi/personal/claudi/materials.html

¡Muchas gracias por dejarse sorprender! Y si se dedican a la enseñanza de la matemática ojalá que sepan transmitir interés hacia nuestra disciplina con las sorpresas como estrategias docentes.

Bibliografía

[1] C. Alsina, *Una matemática feliz y otras conferencias*, Buenos Aires, OMA, 1995.

[2] C. Alsina, *Contar bien para vivir mejor*, Rubes, Barcelona, 1998.

[3] C. Alsina, *Sorpresas Geométricas*, Buenos Aires, OMA, 2000.

[4] C. Alsina, *La matemática hermosa se enseña con el corazón*, Buenos Aires, OMA, 2000.

[5] C. Alsina, *Geometría y realidad en Aspectos didácticos de Matemáticas 8 ICE*, Univ. Zaragoza, Zaragoza, 11-32, 2001.

[6] C. Alsina, *Geometría Cotidiana. Placeres y sorpresas del diseño*, Rubes, Barcelona, 2005.

[7] C. Alsina, C. Burgués y J.M. Fortuny, *Materiales para construir la Geometría*, Síntesis, Madrid, 1990.

[8] C. Alsina, C. Burgués, J.M. Fortuny, J. Giménez y M. Torra, *Enseñar Matemáticas*, Graó, Barcelona, 1996.

[9] C. Alsina, J.M. Fortuny y R. Pérez, *¿Por qué Geometría?*, Propuestas Didácticas para la ESO, Síntesis, Madrid, 1997.

[10] B. Bolt, *Mathematics meets technology*, U.P., Cambridge, 1991.

[11] G. Boltyanskii, *The Decomposition of figures into smaller parts*, U. Chicago Press, Chicago, 1980.

[12] D. Burger, *Sphereland: A Fantasy about curved spaces and expandind universe*, Harper and Row, New York, 1983.

[13] T.A. Cook, *The Curves of Life: Being an Account of Spiral Formations and their Applications to Growth in Nature, to Science, and to Art*, Dover Publications, New York, 1979.

[14] R. Courant and H. Robbins, *What is Mathematics?*, Oxford Univ. Press, New York, 1941.

[15] H.S.M. Coxeter, *Fundamentos de Geometría*, Limusa, Wiley, México, 1971.

[16] J. Estalella, *Ciencia Recreativa*, Gustavo Gili, Barcelona, 1920.

[17] F. Etayo, *La Geometría de las Esferas*, Un Paseo por la Geometría, Pub. Dep. Matemáticas, UPV-EHU, 65-80, 2004.

[18] D. Giralt-Miracle (editor), *Gaudí: la búsqueda de la forma. Espacio, geometría, estructura y construcción*, Lunwerg, Barcelona, 2002.

[19] G. Guillén, *Poliedros*, Síntesis, Madrid, 1990.

[20] M. de Guzmán, *Para pensar mejor*, Labor, Barcelona, 1991.

[21] R. Honsberger, *Ingenuity in Mathematics*, MAA, Washington, 1970.

[22] R. Ibáñez, *El vientre de un arquitecto (La búsqueda de la forma)*, Un Paseo por la Geometría, Pub. Dep. Matemática, UPV-EHU, 155-186, 2004.

[23] I. Lakatos, *Pruebas y refutaciones. La lógica del descubrimiento matemático*, Alianza, Madrid, 1978.

[24] J. Malkevitch, *Geometry and reality*, Mammana, 85-99, 1988.

[25] J. Malkevitch, *Geometry's future*, COMAP, Lexington, 1988.

[26] C. Mammana and al., *Perspective on the Teaching of Geometry for the 21st Century*, An ICMI Study, Kluwer, Dordrecht, 1998.

[27] R. Nelsen, *Proofs without words I/II*, MAA, Washington, 1991-2000.

[28] G. Plugh, *Polyhedra, a visual approach*, Univ. Calif. Press, Londres, 1976.

[29] G. Pólya, *Cómo plantear y resolver problemas*, Trillas, México, 1985.

[30] M. Salvador, *Why buildings stand up*, WW Norton, New York, 1990.

[31] M. Senechal and G. Fleck, *Shaping Space: A Polyheral Approach*, Design Science Collection, Birkhäuser, Boston, 1988.

[32] L.A. Steen, *For all practical purposes*, COMAP Lexington, W.H. Freeman Co., New York, 1994. Versión española: *Matemáticas en la vida cotidiana*, Addison-Wesley, Madrid, 1999.

[33] D. Thomson, *On growth and form*, Cambridge, UP, Cambridge, 1961.

[34] E. Veloso, *Geometria: Temas actuais*, Min. Educ., Lisboa, 1998.

Claudi Alsina Català
Universitat Politècnica de Catalunya
Secció Matemàtiques i Informàtica - ETSAB
Avda. Diagonal 649
08028 Barcelona
e-mail: ***claudio.alsina@upc.edu***
http://www.upc.edu/ea-smi/personal/claudi/