La Divina Proporción

por

J. Ignacio Extremiana Aldana[1], Universidad de La Rioja

> La Geometría tiene dos grandes tesoros: uno el Teorema de Pitágoras; el otro es la división de una línea en una proporción extrema y una media.
>
> Kepler

Esta charla es parte de un trabajo emprendido hace tiempo con motivo del homenaje a un querido compañero y amigo: José Javier Guadalupe (Chicho). Sin prisas (y esperamos que con pocas pausas) estudiamos y recopilamos temas geométricos que han tenido (y tienen) gran trascendencia en la historia de la humanidad y que, además, pueden ser aprovechados para "acercar las matemáticas a la sociedad" que era uno de los grandes objetivos que se planteó el Año Mundial de las Matemáticas 2000, año en el que un desgraciado accidente nos privó de Chicho para siempre.

Hemos titulado la charla "La Divina Proporción" podíamos haber elegido otro título distinto para hablar del mismo tema; por ejemplo "el número de oro", "el número aúreo", "la proporción aúrea", "la estética de las proporciones", "la sucesión de Fibonacci" , etc... Hay mucha bibliografía al respecto. Al final daremos las razones "teológicas" por las que hemos elegido este título. Antes comentaremos algo de sus orígenes, de sus primeras propiedades y contaremos alguna historieta.

> La esperanza es el único bien común a todos los hombres; los que todo lo han perdido la poseen aún.
>
> Tales de Mileto

[1]Trabajo en colaboración con L. Javier Hernández Paricio y M. Teresa Rivas Rodríguez

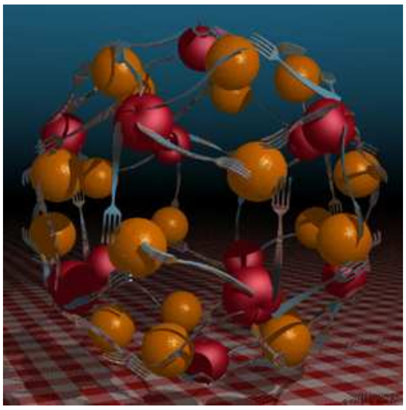

Figura 1 Manzanas y naranjas

“Retorna a lo antiguo y serás moderno” (Giuseppe Verdi)

Comenzamos mostrando una imagen (Figura 1) tomada de la página web de George W. Hart (cuya visita recomiendo encarecidamente). Esta imagen aparece en el cartel anunciador de la presente edición del Seminario Permenente de Actualización en Matemáticas, que organiza el Departamento de Matemáticas y Computación de la Universidad de La Rioja desde hace 24 años.

Se trata de un dodecaedro y de un icosaedro cuyos vértices son naranjas y manzanas respectivamente. Cuando los organizadores del Seminario eligieron la imagen se nos ocurrió que podíamos preparar una charla sobre la proporción que rige la construcción de ambos poliedros: la Divina Proporción; quizá porque, como dice Luca Pacioli en su tratado cuyo título es el mismo que el de esta charla *“no hay nada en el intelecto que previamente no se haya ofrecido de alguna manera a los sentidos”*. Nuestros sentidos se inclinan hacia lo que les resulta más agradable y atractivo, lo que les resulta bello. Ahora bien, ¿qué es la belleza? ¿por qué unos objetos son bellos y otros no? Estas preguntas han tratado de ser respondidas muchas veces en diferentes culturas. La idea más extendida es que la belleza podría consistir de, por ejemplo, las proporciones en las dimensiones. Esta idea se atribuye a Pitágoras quien habría descubierto el hecho de que ciertas proporciones aritméticas en los instrumentos musicales, como las longitudes de las cuerdas, producen armonía de tonos. En la Figura 2 mostramos una ilustración de la Theorica Musice, de Gafurio, 1492, en la que aparecen los números marcando o dirigiendo la escala musical. Sobre la base de estas armonías musicales los antiguos griegos intentaron explicar también la belleza en las proporciones del cuerpo humano, de la arquitectura y otros objetos.

Figura 2 Escala musical

Pitágoras y los Pitagóricos

Llegados a Grecia, recordaremos su geometría. Herodoto (485-425 a.C.) afirma que los orígenes de la geometría griega están en Egipto:

...Dijeron también que este rey (Sesostris) dividió la tierra entre todos los egipcios de modo que a cada uno le tocara un cuadrángulo de igual tamaño y tomara de cada uno sus ingresos, estableciendo un impuesto que se exigía anualmente. Pero cuando el río invadía una parte de alguno, éste tenía que ir a él y notificar lo que había sucedido. Enviaba entonces supervisores, quienes tenían que medir en cuanto se había reducido el terreno, para que el propietario pudiera pagar sobre lo que le quedaba, en proporción al impuesto total que se había fijado. En esta forma, me parece que se originó la geometría y pasó entonces a Hélade (Grecia).

La principal fuente de información que tenemos sobre la Geometría griega es el *Sumario de Eudemo* de Proclo, que es un esbozo muy breve del desarrollo de la geometría griega desde los tiempos primitivos hasta Euclides. Proclo vivió en el siglo V d. C., pero tuvo acceso a varios trabajos históricos y críticos que ahora se han perdido. Entre ellos una historia completa de la geometría griega escrita por Eudemo el cual había sido alumno de Aristóteles.

El primer gran matemático al que hace referencia es Tales de Mileto[2]. El se-

[2]Uno de los 7 sabios de Grecia junto con Pítaco de Mitilene, Bías de Priene, Cleóbulo

gundo gran matemático que se cita en el Sumario es Pitágoras de Samos. Ambos viajaron a Egipto y Mesopotamia. El primero pudo haber iniciado al segundo en la matemática[3].

Pitágoras juega un papel decisivo en la historia de las matemáticas (y de la humanidad). Nació en la isla de Samos, colonia jónica cercana a Mileto en la costa del mar Egeo, su padre fue Menesarco. Se distinguen tres etapas en su vida. De la primera se destaca su relación con Tales, quien, como hemos dicho antes, pudo iniciarle en las matemáticas. En esta etapa pudo haber participado en los Juegos de la 48° Olimpiada, en los que habría obtenido la rama de olivo en las competencias de pugilato.

La segunda etapa corresponde a sus viajes (pudo haber viajado a Egipo y Mesopotamia) de los que regresa a Samos en la que gobierna el tirano Policrates. Por "divergencias" con éste, Pitagoras se exilia a Crotona, en el golfo de Tarento, al sur de la actual Italia. En esta ciudad se asienta y crea la hermandad Pitagórica[4]. Vive en la casa de Milo, con cuya hija, Theano, se casa. De Theano se dice que fue la primera mujer matemática y que dirigió la hermandad después de la muerte de Pitágoras, a pesar de que en ella estaban prohibidas las mujeres (al menos para asistir a las reuniones públicas). Esta hermandad se extendió rápidamente y llegó a alcanzar el poder político en varias ciudades como la propia Crotona, Síbaris (vecina a Crotona y famosa por su gusto a la vida opulenta) y otras ciudades.

En Crotona se produce la primera gran rebelión contra los pitagóricos, en la que durante una revuelta se incendia la casa de Milo, en la que vivía Pitágoras. Éste se refugia en Tarento y luego en Metaponto, donde muere. En Metaponto, años más tarde, hacia el 450 a. C., durante otras revueltas, mueren en un incendio gran parte de los miembros de la comunidad. Entre los que lograron salvarse se encuentran Filolao de Crotona, Hipaso de Metaponto e Hipócrates de Chios. Filolao fue acusado de haber divulgado los secretos matemáticos y filosóficos de la Comunidad en sus escritos y de haber vendido a Dionisio de Siracusa tres libros que contenían la

de Linde, Periandro de Corinto, Quilón de Lacedemonia y Solón de Atenas. Platón en el dilogo Protágoras señala a Mirón en lugar de Periandro.

[3]Como curiosidad señalemos que el siglo VI a. C. fue el de los grandes místicos; en ese periodo vivieron: Zoroastro (Zaratustra) (660-583 a. C.), Lao Tse (604-510 a. C.), Confucio (551-479 a. C.), Buda (560-477 a. C.) y Pitágoras (580-500 a. C.).

[4]Fraternidad esotérica, dedicada a la práctica del ascetismo, la comunidad de bienes y el estudio de las matemáticas para obtener la realización de la armonía interior, acorde con la gran armonía del cosmos, a la que se accede por la gnosis numeral ("Todo está dispuesto conforme al Número").

doctrina secreta del pitagorismo. Platón pudo tener acceso a estos escritos, dada su amistad con el hermano de Dionisio, Dión. Arquitas de Tarento, discípulo de Filolao, que fue Regente de Tarento y siete veces generalísimo, fue quien inició a Platón en el pitagorismo. Hipaso fue expulsado de la comunidad por dar a conocer a los profanos el secreto *de la esfera de los doce pentágonos* y de *la naturaleza de lo conmensurable y lo inconmensurable*; sus excompañeros le construyeron una tumba para escenificar que para ellos ya había muerto. Moriría años más tarde en un naufragio del que se sospecha que fueron responsables sus excolegas. Parece que fue Hipaso quien planteó la existencia de magnitudes inconmensurables estudiando la figura del pentágono regular (luego hablaremos de esto); sin embargo, Yámblico le concede el descubrimiento al propio Pitágoras.

Los Pitagóricos recopilaron las enseñanzas del Maestro en el *Ieros Logos* (Discurso sagrado). Se dividían en dos tipos: Matemáticos (conocedores) y Acusmáticos (oídores).

Hemos mencionado que tanto Tales como Pitágoras habrían viajado a Egipto. Pues bien, es posible que en los constructores y decoradores del antiguo Egipto usasen algún tipo de teoría matemática de las proporciones. Se sabe que en torno al 600 a. C. investigadores egipcios midieron los relieves en Sakkara, en la tumba del faraón Zhoser, que fueron hechos hacia el 2800 a. C. Sobre esta base, construyeron un sistema de proporciones que más tarde fue ampliamente usado. Tal vez es este sistema lo que ahora podemos ver en muchos relieves egipcios como finas líneas sin significado aparente. En la Figura 3 podemos ver un ejemplo típico de Lepsius (1849): Denkmaler aus Agypten und Athiopien.

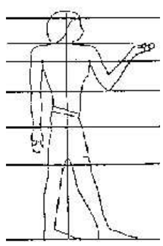

Figura 3 Proporciones (?) egipcias

Creación y belleza

Platón, de quien ya hemos comentado su relación con el Pitagorismo, en el Timeo, quizás el más platónico de sus diálogos según los expertos, nos ofrece su visión de construcción del Universo, del Cosmos (orden), en oposición al Caos.

Según Platón el mundo real es una copia imperfecta del mundo de las ideas hecha por el Demiurgo, ser inteligente y bueno al que le atrae la belleza y trata de recrearla. Este personaje crea en primer lugar el alma del mundo y la esfera celeste (lo hace dándole forma esférica, la más perfecta) en cuyo centro está la Tierra. Después se ocupa de la materia con la que está hecho el mundo; se compone de cuatro elementos: fuego, tierra, aire y agua. Los elementos han de ser "sólidos" (pues las cosas no solamente son planas sino que tienen profundidad) y han de ser capaces de recomponerse unos en otros. Puesto que han de ser sólidos, esto es, limitados por planos y un plano está compuesto por piezas sencillas (triángulos), el Demiurgo elige de éstos los más bellos: el triángulo rectángulo isósceles (con dos piernas —catetos— iguales, es decir, la escuadra) y el triángulo rectángulo escaleno (cojo) que posee la propiedad de tener la hipotenusa de doble longitud que uno de sus catetos (el cartabón). A partir de seis de estos últimos triángulos construye el triángulo equilátero y, con estas piezas, el tetraedro, el octaedro y el icosaedro. Con cuatro triángulos rectángulos isósceles construye el cuadrado y con seis de éstos el cubo. Concluye, analizando las propiedades de los elementos y de los cuatro poliedros anteriores, que los átomos de tierra son cubos, los de agua octaedros, los de aire icosaedros y los de fuego tetraedros. Como le queda una última configuración regular (el dodecaedro) la asocia con el cosmos, con la quintaesencia.

Como podemos comprobar, la idea de belleza está presente en toda la creación platónica, relacionada con la de bondad, simplicidad y orden.

Esta idea de belleza sigue considerándose así a lo largo de la historia de la humanidad. Repasaremos a continuación algunos ejemplos.

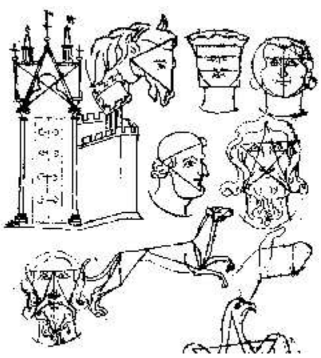

Figura 4 Proporciones medievales

Vitruvio decía que un edificio es bello cuando la apariencia de la obra es agradable y de buen gusto, y cuando sus miembros son de las debidas proporciones de acuerdo a los principios correctos de "simetría" (donde "simetría" significa "una concordancia correcta entre los miembros de la obra misma, y relación entre las diferentes partes y el esquema general del conjunto en concordancia con una cierta parte elegida como estándar"). En la Edad Media, la investigación de la belleza solía ser clasificada como una rama de la teología. El argumento era que la belleza es un atributo de Dios. El investigador más notable fue San Agustín. Dijo que la belleza consiste en unidad y orden que surgen de la complejidad. Tal orden podría ser, por ejemplo, ritmo, simetría o simples proporciones.

Tomás de Aquino (1225 - 1274), escribió sobre la esencia de la belleza. Pensaba que la belleza era el resultado de tres prerrequisitos: integridad o perfección, armonía y claridad o brillantez. El mayor arquitecto-escritor del Renacimiento, Leon Battista Alberti (1404-72), puso el énfasis en los atributos formales de los edificios y sus detalles, proporcionalidad y ornamentación. La Belleza es "una armonía de todas las Partes, en cualquier sujeto en que aparezca, ensamblado con tal proporción y conexión, que nada podría añadirse, disminuirse o alterarse, si no es para peor". Como curiosidad quiero añadir que el estudio de la belleza como una cualidad de los objetos fue reavivado en un enfoque moderno en 1928 cuando el matemático norteamericano George David Birkhoff presentó la siguiente ecuación:

$$\text{valor estético} = \frac{\text{cantidad de orden}}{\text{complejidad del artefacto}}$$

El mismo Birkhoff sometió a prueba la ecuación diseñando un vaso (Figura 5) que, en su opinión, tenía un gran valor de belleza.

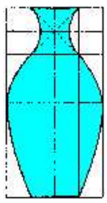

Figura 5 Vaso de Birkhoff

No es Birkhoff el único matemático que se preocupa por la belleza. Hardy decía que no hay lugar en el mundo para las matemáticas feas. ¿Cuáles son las matemáticas más bellas? No sé responder a esta pregunta. A mí todas las matemáticas me parecen guapas. Sí sé responder a otra pregunta: ¿cuáles son los teoremas más bellos? Me fío de David Wells, quien, hacia 1989, publicó un listado de los teoremas más bellos en el Mathematical Intelligencer. En la actualidad puede encontrarse un listado similar en la siguiente página web:

www.geocities.com/CapeCanaveral/Lab/6386/geobook.html

Además puede votarse por el teorema que más le guste a cada visitante. Reproducimos, por orden de belleza, un listado de algunos de los teoremas que allí aparecen referidos.

1.- $e^{i\pi} = -1$

2.- Fórmula de Euler: V + F = E + 2.

3.- El número de primos es infinito.

4.- Existen 5 poliedros regulares.

5.- $\dfrac{\pi^2}{6} = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^2}.$

6.- Una aplicación continua del disco unidad en sí mismo tiene un punto fijo.

7.- $\sqrt{2}$ no es racional.

8.- π es trascendente.

9.- Todo plano puede ser coloreado con 4 colores.

10.- Todo número primo de la forma 4n+1 es la suma de dos cuadrados de exactamente una manera.

13.- Un icosaedro regular inscrito en un octaedro regular divide los ejes en la Razón áurea.

Remarcaremos que los que ocupan los lugares 2°, 4°, 7° y 13° tienen relación directa con el tema que estamos tratando y que en todos los que aparece el número π indirecta, como veremos más adelante.

Experimento

Antes de continuar vamos a hacer un pequeño experimento. En la Figura 6 aparecen cinco rectángulos pintados cada uno de diferente color. Pedimos al lector que, haciendo abstracción del color en que cada uno está pintado, piense cuál le resulta más agradable por su forma, por sus proporciones.

Confío en que, la mayoría de los observadores hayan elegido el rectángulo azul (¡menudo chasco si no es así!). El rectángulo rojo es el que marca el formato 16/9 (el de las televisiones panorámicas), el verde es el habitual de las hojas A0, A1, A2, A3, A4... es decir el formato $\sqrt{2}$,[5] el amarillo es el 36/24 de las fotografías y

[5] Si a y b denotan, las longitudes de los lados de un rectángulo y se verifica que $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$, también $b/\frac{a}{2} = \sqrt{2}$. Es decir, doblando por la mitad del lado más largo este rectángulo se

diapositivas; el que está en blanco y negro tiene en su interior una galaxia, lo hemos dejado así pues del cosmos y de la creación del universo algo hemos hablado. Del azul es del que nos vamos a ocupar.

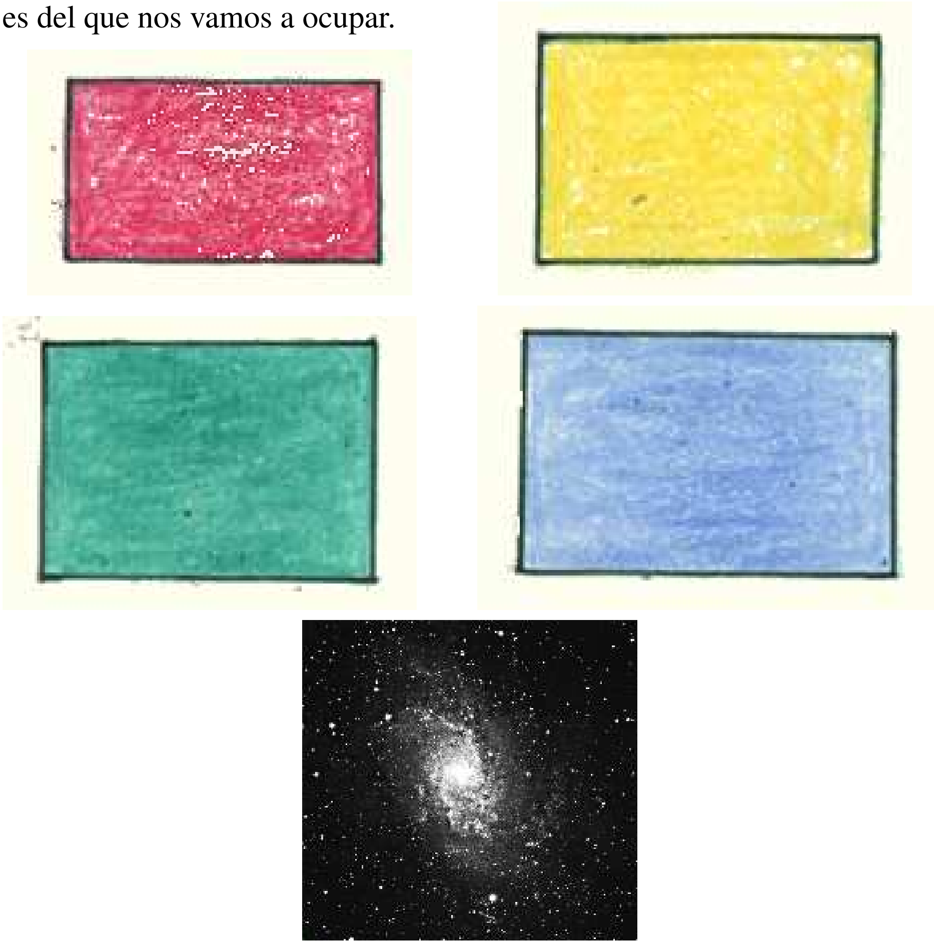

Figura 6 Rectángulos (rojo, amarillo, verde, azul y cosmos)

En 1876, Fechner[6], inventor de la psicología física, estudió las ideas de belleza

---

obtiene en cada una de las dos partes otro rectángulo $\sqrt{2}$.

[6]Gustav Theodor Fechner nació el 19 de abril de 1801. Murió el 18 de noviembre de 1887. Estudió medicina en la Universidad de Leipzig, Alemania, y posteriormente fue profesor de Física en esta misma universidad. Fue el padre de la Psicofísica (vinculación de sensación y percepción con magnitudes de estímulos físicos.) El interés de Fechner por la psicofísica derivaba de su esperanza de resolver con ella el clásico problema de la mente y el cuerpo. Fechner creía que había resuelto dicho problema, demostrando gracias a la psicofísica que mente y cuerpo son sólo dos aspectos distintos de una misma realidad subyacente.

e hizo experimentos en su laboratorio sobre las preferencias estéticas de gente corriente sin ningún aprendizaje estético. Pidió a numerosas personas que escogieran entre diferentes rectángulos (incluyendo el cuadrado) aquél cuya forma les agradase más. Los rectángulos que resultaron mayoritariamente elegidos fueron los que tienen proporciones similares a las del azul.

Figura 7 Gustav Theodor Fechner

Este rectángulo tiene una importante característica geométrica, similar a la del verde, que puede observarse en la figura 8 si se "quita" un cuadrado de lado la parte más pequeña, la región que queda es otro rectángulo de las mismas proporciones que el original.

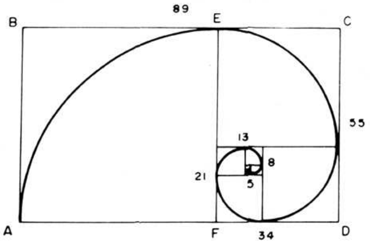

Figura 8 Varios rectángulos de las mismas proporciones

Proporciones (El número de oro)

Así pues, aunque hay otras definiciones y opiniones acerca de lo que es la belleza, buena parte de las mismas coinciden en que la belleza es armonía en las proporciones. Estudiemos pues proporciones. Y, como queremos seguir siendo modernos, volvamos a lo antiguo: ¿qué entendían los griegos por proporción?

Entendían por proporción la igualdad de dos razones y por razón el cociente de dos magnitudes homogéneas. Las magnitudes deben ser medidas y para ellos se necesitan números, pero, por ahora mejor no entramos en lo que los griegos entendían por número, ni las ciencias que lo estudian: Aritmología (Mística del

Número) que se ocupa del número puro; Aritmética, que se ocupa del número científico abstracto y Cálculo, que trata de números concretos. Vamos a hacer como siempre han hecho los matemáticos para tratar de cosas complicadas, comenzamos simplificando y tratando los casos más sencillos. De paso, comenzamos a cumplir alguno de los requisitos que Chicho exigía para las charlas de Matemáticas: ¡que haya alguna fórmula!

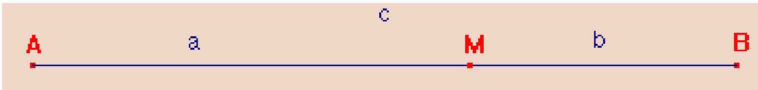

Figura 9

Consideramos la figura geométrica más sencilla que podamos imaginar (Figura 9): un segmento de línea con extremos A y B. Consideramos un punto M que esté en el segmento. Vamos a estudiar la forma en la que este punto M parte o divide el segmento original. Denotamos por a el segmento AM por b el segmento MB y por c el segmento AB. Podemos formar las siguientes 6 razones:

$$\frac{a}{b}; \frac{a}{c}; \frac{b}{a}; \frac{b}{c}; \frac{c}{a}; \frac{c}{b}$$

Obviamente con estas 6 razones podemos formar las siguientes 15 proporciones (combinaciones de 6 elementos tomadas de 2 en 2).

i) $$\frac{a}{b} = \frac{a}{c}; \frac{b}{a} = \frac{c}{a}; \frac{b}{c} = \frac{c}{b}$$

ii) $$\frac{a}{b} = \frac{c}{b}; \frac{b}{a} = \frac{b}{c}; \frac{a}{c} = \frac{c}{a}$$

iii) $$\frac{a}{c} = \frac{c}{b}; \frac{c}{a} = \frac{b}{c}$$

iv) $$\frac{a}{c} = \frac{b}{c}; \frac{c}{a} = \frac{c}{b}; \frac{a}{b} = \frac{b}{a}$$

v) $$\frac{a}{b} = \frac{c}{a}; \frac{b}{a} = \frac{a}{c}$$

vi) $$\frac{a}{b} = \frac{b}{c}; \frac{b}{a} = \frac{c}{b}$$

De cualquiera de las tres primeras proporciones se obtiene que $b = c$ es decir, que el punto M concide con el punto A, luego no hay partición del segmento. De las tres segundas se obtiene $a = c$, el punto M coincide con el punto B y tampoco hay partición. La igualdad propuesta en iii) es imposible pues una razón es mayor que 1 y la otra menor que 1.

Nos quedan pues 7 razones "vivas". De iv) se sigue que $a = b$, es decir obtenemos una partición simétrica (M es el punto medio del segmento).

De v) y de vi) se sigue que la longitud de AB se ha dividido en dos partes desiguales de modo que la mayor es a la menor como la suma de las dos es a la mayor.

$$\frac{b+a}{a} = \frac{a}{b}$$

Dicho de otra forma, el punto M divide al segmento AB en *media y extrema razón*. Esta es la partición asimétrica más directa y más en armonía con el mínimo esfuerzo. Esta igualdad puede escribirse: $b^2 + ab = a^2$ y, haciendo $\frac{a}{b} = x$, se obtiene la ecuación:

$$x^2 - x - 1 = 0,$$

de soluciones:

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad ; \quad \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

cuyo producto es -1 y cuya suma es 1.

A la primera de estas raíces, siguiendo a Mark Barr y a Schooling en los anexos de *Las curvas de la vida*, la denotamos por ϕ, en honor a Fidias. Este número es llamado (se dice que por primera vez por Leonardo) **el número de oro**.

Observaciones sobre ϕ

i) Obviamente ϕ es un número irracional ya que es solución de la ecuación $x^2 - x - 1 = 0$, cuyas únicas posibles raíces racionales son 1 y -1.

ii) ϕ es un número algebraico (no es trascendente). Recordar que los números algebraicos son aquellos que pueden ser raíces de una ecuación algebraica de coeficientes racionales cuyos términos sean potencias enteras de x. Algunos de estos números (como es el caso de ϕ) pueden ser representables por una construcción euclidiana, es decir, con regla y compás.

Propiedades de ϕ

i) $\phi^2 = 1 + \phi$. (ϕ es solución de la ecuación $x^2 - x - 1 = 0$).

ii) $\phi = 1 + 1/\phi$.

iii) $\phi = 1,618\ldots$; $1/\phi = 0,618\ldots$; $\phi^2 = 2,618\ldots$

iv)

$$\begin{array}{rcll} \phi^2 & = & 1 & + \ \phi \\ \phi^3 & = & \phi & + \ \phi^2 \\ \phi^4 & = & \phi^2 & + \ \phi^3 \\ \phi^5 & = & \phi^3 & + \ \phi^4 \\ \vdots & = & \vdots & + \ \vdots \\ \phi^n & = & \phi^{n-1} & + \ \phi^{n-2} \end{array}$$

Esta relación es válida para valores negativos y fraccionarios de los exponentes. Notar que esta progresión geométrica $(1, \phi, \phi^2, \phi^3, \dots)$ cuya razón es ϕ verifica que cada término es la suma de los dos anteriores. En realidad esto es válido para cualquier progresión geométrica cuya razón sea ϕ. Algunos autores dicen: *esta serie es, pues, a la vez multiplicativa y aditiva, es decir, participa al mismo tiempo de la naturaleza de una progresión geométrica y de una aritmética.*

v)

$$\begin{array}{rcrcl} \phi^0 & = & 1 & + & \\ \phi^1 & = & 1 & + & 1/\phi \\ \phi^2 & = & 2 & + & 1/\phi \\ \phi^3 & = & 3 & + & 2/\phi \\ \phi^4 & = & 5 & + & 3/\phi \\ \phi^5 & = & 8 & + & 5/\phi \\ \phi^6 & = & 13 & + & 8/\phi \\ \vdots & = & \vdots & + & \vdots \end{array}$$

Notar que en la segunda y tercera columna (en los numeradores) aparece la sucesión 1,1,2,3,5,8,13,21,. . .

vi)

$$\begin{array}{rcl} \phi & = & 1/2\,(1+\sqrt{5}) \\ \phi^2 & = & 1/2\,(3+\sqrt{5}) \\ \phi^3 & = & 1/2\,(4+2\sqrt{5}) \\ \phi^4 & = & 1/2\,(7+3\sqrt{5}) \\ \phi^5 & = & 1/2\,(11+5\sqrt{5}) \\ \phi^6 & = & 1/2\,(18+8\sqrt{5}) \\ \vdots & = & \vdots \end{array}$$

Notar que en la segunda columna aparece la sucesión 1,3,4,7,11,18,. . . y en la tercera columna la sucesión 1,1,2,3,5,8,13,21. . .

vii) Denotar $\psi = 1/2\,(1-\sqrt{5})$. Entonces:

$$\begin{array}{lcl}
\psi & = & 1/2\,(1-\sqrt{5}) \\
\psi^2 & = & 1/2\,(3-\sqrt{5}) \\
\psi^3 & = & 1/2\,(4-2\sqrt{5}) \\
\psi^4 & = & 1/2\,(7-3\sqrt{5}) \\
\psi^5 & = & 1/2\,(11-5\sqrt{5}) \\
\psi^6 & = & 1/2\,(18-8\sqrt{5}) \\
\vdots & = & \vdots
\end{array}$$

viii) Sumando las igualdades de los dos ítems anteriores obtenemos:

$$\begin{array}{lclcl}
\phi & + & \psi & = & 1 \\
\phi^2 & + & \psi^2 & = & 3 \\
\phi^3 & + & \psi^3 & = & 4 \\
\phi^4 & + & \psi^4 & = & 7 \\
\phi^5 & + & \psi^5 & = & 11 \\
\phi^6 & + & \psi^6 & = & 18 \\
\vdots & = & \vdots & &
\end{array}$$

ix) y restándolas:

$$\begin{array}{lclcl}
\phi & - & \psi & = & \sqrt{5} \\
\phi^2 & - & \psi^2 & = & \sqrt{5} \\
\phi^3 & - & \psi^3 & = & 2\sqrt{5} \\
\phi^4 & - & \psi^4 & = & 3\sqrt{5} \\
\phi^5 & - & \psi^5 & = & 5\sqrt{5} \\
\phi^6 & - & \psi^6 & = & 8\sqrt{5} \\
\vdots & = & \vdots & &
\end{array}$$

x)

$$\phi = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{\ldots}}}}}$$

Para obtener esta ecuación basta aplicar "indefinidimente" la fórmula $\phi^2 = 1+\phi$.

xi)

$$\phi = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots}}}}}$$

Para obtener esta ecuación basta aplicar "indefinidamente" $\phi = 1+1/\phi$.

xii)
$$\frac{1}{\phi} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\dots}}}}}$$

Consecuencia inmediata del ítem anterior.

Conejos y pasatiempos

Las sucesiones

$$1\ 1\ 2\ 3\ 5\ 8\ 13\ 21\ 34\ 55\ 89\ 144\ 233\ 377\ldots.$$

y

$$1\ 3\ 4\ 7\ 11\ 18\ 29\ 47\ 76\ 123\ 199\ 322\ldots.$$

que han aparecido repetidamente en la subsección anterior son, respectivamente, las sucesiones de Fibonacci y de Lucas.

Figura 10 Leonardo de Pisa (Fibonacci)

El primero de ellos, Leonardo de Pisa (Figura 10), conocido como Fibonacci (hijo de buen carácter) nació en Pisa hacia 1170 y murió alrededor de 1250 (es contemporáneo de Ricardo Corazón de León). Estuvo en contacto con la cultura árabe y escribió, además de Practica Geometriae (1220) y Liber quadratorum (1225), el Liber Abaci (libro del ábaco) en 1202, de éste último sólo se conserva la versión de 1228. En él, entre otras cosas, resalta la importancia del sistema de numeración indoarábido[7]. En las páginas 123 y 124 de este libro propone el conocido problema

[7]Como curiosidad cabe resaltar que el primer documento del occidente europeo en el que

sobre el nacimiento de conejos que da lugar a esta famosa sucesión que, curiosamente, aparece en multitud de situaciones en la naturaleza. Cabe resaltar que la sucesión cuyos términos son los cocientes de los números consecutivos de la sucesión de Fibonacci converge a ϕ.

El segundo de ellos, Francois Edouard Anatole Lucas (1842-1891) (Figura 11), es conocido por sus resultados en teoría de números y en particular por haber estudiado la Sucesión de Fibonacci. Probó (¡sin ordenador!) que el número de Mersenne $2^{127}-1 = 170141183460469231731687303715884105727$ es primo. Escribió entre 1882 y 1894 los cuatro tomos de *Récréations mathématiques*, famoso libro de pasatiempos matemáticos, y fue el inventor del juego Las Torres de Hanoi, que apareció en 1883 como inventado por M. Claus (acrónimo de Lucas).

Figura 11 F. Edouard Anatole Lucas

Orígenes de ϕ

Antes de continuar poniendo fórmulas y hablando de las propiedades algebricas de ϕ es conveniente hacer algunos comentarios sobre este número y la forma de obtenerlo.

1.- La división de un segmento en dos de tal manera que la "medida" del segmento dividida por la "medida" del trozo mayor sea igual que la "medida" del trozo mayor dividida por la del trozo menor, viene propuesta en la proposición 30 del libro VI de Los Elementos de Euclides: *Dividir una recta finita dada en extrema y media razón.* Si bien esta proporción aparece antes en la Proposición 11 del libro II: *Dividir una recta dada de manera que el rectángulo comprendido por la (recta)*

aparecen escritas las cifras indoarábigas, del que se tienen noticias, es el Códice Vigilanus, del siglo X; el documento está escrito por el monje Vigila en el desaparecido monasterio de San Martín que estaba situado en Albelda (La Rioja). No está escrito el 0.

entera y uno de los segmentos sea igual al cuadrado del segmento restante.

Reproducimos (Figuras 12 y 13) dos imágenes que explican dos sencillas maneras de obtener la división de un segmento en extrema y media razón y de construir un rectángulo áureo (el cociente de las longitudes de sus lados es ϕ).

La comprobación de que el punto B divide al segmento AC en extrema y media razón es una simple aplicación del teorema de Pitágoras. Notar que únicamente se necesita regla y compás para obtener un segmento cuya medida sea ϕ o $1/\phi$; basta considerar AC como unidad de longitud para lo primero o bien AB para lo segundo.

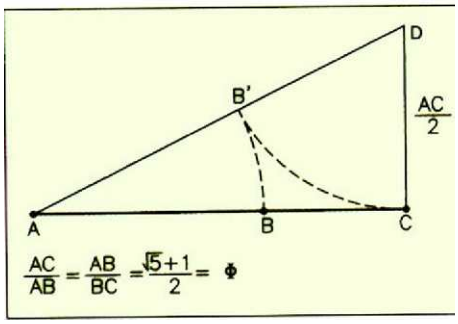

Figura 12 División en media y extrema razón

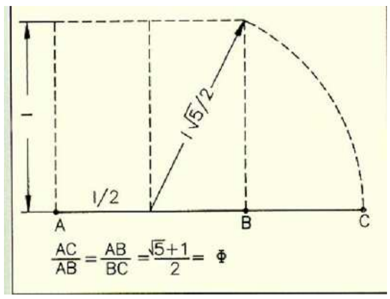

Figura 13 rectángulo aúreo

2.- ¿Por qué los griegos se preocuparon de dividir un segmento en extrema y media razón? La contestación tiene que ver con la armonía, la belleza, la cosmología, la primera gran crisis de fundamentos matemáticos, la creación de método axiomático-deductivo, etc. Trataré de dar algunas ideas al respecto.

Antes de Grecia la matemática tenía una carácter empírico. Carecía de la idea de demostración. Esto no quiere decir que no obtuviese logros importantes, pero desde luego es en Grecia donde la matemática toma su carácter actual. El nacimiento de la matematica está ligado a las cuencas de grandes ríos; no sólo el Nilo, también el Eufrates y el Tigris de Mesoptamia, el Indus y el Ganges en la India y el Hwang Ho y el Yangtze en China. Se conservan algunas tablas de arcilla de la zona de Mesopotamia (las más antiguas son del 3000 a. C.) y algunos papiros de Egipto, fundamentalmente los de Moscú y Rhind (1850 a. C.; 1650 a. C.) el primero contiene 25 problemas y el segundo 85.

No hay vestigios antiguos de las geometrías india y china, probablemente por los materiales que utilizaron (bambú, etc).

Son los griegos los que convierten las matemáticas en la ciencia axiomático-deductiva que es hoy. Como ya hemos comentado antes, el primer gran matemático del que tenemos noticia es Tales y el segundo Pitágoras. Éste, según dicen, oyendo los sonidos de martillos de diferentes tamaños, concibe la idea de la relación de los números con la armonía musical. Se da cuenta de que las longitudes de una cuerda que proporcinan una nota, su cuarta, su quinta y su octava son proporcionales a los números 12, 9, 8 y 6, o bien a 1, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$ y 2, es decir, que las notas fundamentales están determinadas por 1, 2, su media aritmética y su media armónica. O, dicho de otra manera, están determinadas por los números 1, 2, 3 y 4. Estos hechos, y otros, conducen a Pitágoras y a los Pitagóricos a buscar el orden y la armonía del universo en la ciencia de los números. En su juramento de silencio nombran al Maestro (Pitágoras) y a la Tetracto, que era la sucesión de los 4 primeros números naturales, considerada como sucesión y como conjunto:

$$1 + 2 + 3 + 4 = 10.$$

10 es el cuarto número triangular y tiene las cualidades trascendentes de la Década (número simbólico del Universo). Su mitad, la Péntada, característica del cinco, participa de la esencia e importancia de la década y es también el número de Afrodita, diosa de la unión fecundadora, del Amor generador, arquetipo abstracto de la generación. En efecto, 5 es combinación del primer número par, femenino (dos, díada) y del primer número impar, masculino (tres, tríada). La péntada es también el número de la armonía en la salud y la belleza realizadas en el cuerpo humano. Su imagen gráfica es el pentagrama, que llegó a ser el símbolo de los Pitagóricos y de otras muchas sociedades secretas, satánicas, cabalísticas, etc.

Llegados a este punto, al pentagrama, vamos a analizar ahora algunas relaciones numéricas que se dan entre la diagonal y el lado del pentágono regular y de la forma en que pudieron descubrirse las magnitudes inconmensurables, o sea, los números irracionales. Dos son las hipótesis, la primera es la relación de la hipotenusa con el lado del triángulo rectángulo isósceles. La segunda, la relación entre la diagonal del pentágono y el lado del mismo. La primera es de sobra conocida. La segunda se obtiene mediante un proceso similar al del algoritmo de Euclides para calcular el máximo común divisor de dos números (lo que los griegos llamaban la antiphairesis). Iniciando el proceso en la relación de la diagonal con el lado y repitiéndolo tres veces, se llega a la misma relación de la diagonal del pentágono que determinan las diagonales del pentágono original y su lado. De tal manera que el proceso se repite indefinidamente sin llegar a ningún "divisor" común.

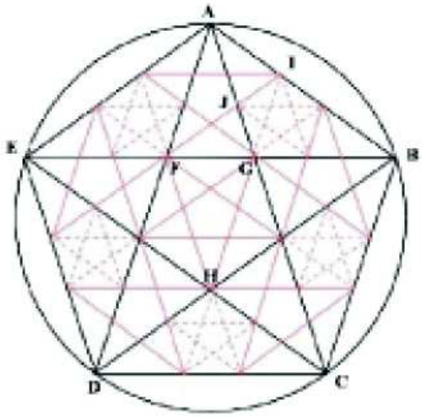

Figura 14 Relación entre la diagonal y el lado de un pentágono regular

Vamos a hacer, en la Figura 14 la antiphairesis de la diagonal del pentágono con su lado con el objetivo de conseguir el segmento que "mide" a los dos. En la figura se observa que:

i) $EB = EG + GB$; notar que $EG = EA$, luego

$$EB = EA + GB.$$

La diagonal del pentágono contiene al lado del mismo y le sobra "el trozo pequeño" de la división que produce en ella otra diagonal.

ii) $EA = EF + FG$; notar que $EF(= HG)$ es la diagonal del pentágono determinado por las diagonales y FG el lado del mismo.

iii) $HG = HK + KG$, ahora bien, $HK = FG$, luego

$$HG = FG + KG,$$

que es exactamente la misma relación que la obtenida en el primer paso.

Es obvio que este proceso puede seguirse indefinidamente. Es decir jamás encontraremos un segmento que esté contenido un "número exacto" de veces en la diagonal y en el lado. Por lo tanto la diagonal y el lado de un pentágono regular son segmentos inconmensurables. Por otra parte, ¿cuál es entonces la relación entre la diagonal y el lado? Veamos:

i) Notar que los triángulos EAB y BGA son semejantes, como consecuencia:

ii) $\frac{EB}{AB} = \frac{AB}{GB}$;

iii) Haciendo $EG = a$ y $GB = b$, se obtiene:

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}.$$

Es decir, **la relación entre la diagonal y el lado del pentágono regular es** ϕ. Como consecuencia, ϕ pudo haber sido el primer número irracional conocido.

Relaciones de ϕ

Con el Triángulo de Pascal.

Recordemos que $\phi^n = \phi^{n-1} + \phi^{n-2}$. Aplicando reiteradamente esta igualdad obtenemos la siguiente tabla:

$$\begin{array}{lllllllllllll}
\phi^n & = & 1\phi^n & + & & & & & & & & & \\
\phi^n & = & 1\phi^{n-1} & + & 1\phi^{n-2} & & & & & & & & \\
\phi^n & = & 1\phi^{n-2} & + & 2\phi^{n-3} & + & 1\phi^{n-4} & & & & & & \\
\phi^n & = & 1\phi^{n-3} & + & 3\phi^{n-4} & + & 3\phi^{n-5} & + & 1\phi^{n-6} & & & & \\
\phi^n & = & 1\phi^{n-4} & + & 4\phi^{n-5} & + & 6\phi^{n-6} & + & 4\phi^{n-7} & + & 1\phi^{n-8} & & \\
\phi^n & = & 1\phi^{n-5} & + & 5\phi^{n-6} & + & 10\phi^{n-7} & + & 10\phi^{n-8} & + & 5\phi^{n-9} & + & 1\phi^{n-10} \\
\phi^n & = & \cdots & + & \cdots & + & \cdots & + & \cdots & + & \cdots & + & \cdots \quad \cdots
\end{array}$$

Fijándonos en los coeficientes de la parte derecha de las igualdades, queda el triángulo de Pascal

$$\begin{array}{llllllll}
1 & & & & & & & \\
1 & 1 & & & & & & \\
1 & 2 & 1 & & & & & \\
1 & 3 & 3 & 1 & & & & \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & & \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & & \\
1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots
\end{array}$$

Como ya es conocido, cada una de las filas del triángulo son los coeficientes del desarrollo del binomio de Newton. Lo que no es tan conocido es que en la segunda columna aparecen los núneros naturales n, en la tercera los números $triangulares$

$$\frac{n(n+1)}{2!},$$

en la cuarta los números $tetraédricos$

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{3!},$$

en la quinta los $pentaédricos$

$$\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4!},$$

etc.

Diferencias finitas

Consideramos la sucesión infinita

$$\ldots, \phi^{-n}, \ldots, \phi^{-2}, \phi^{-1}, 1, \phi, \phi^2, \phi^3, \phi^4, \phi^5, \phi^6, \phi^7, \phi^8, \phi^9, \ldots, \phi^n, \ldots$$

calculando sus diferencias primeras y, teniendo en cuenta que $\phi^n - \phi^{n-1} = \phi^{n-2}$, volvemos a obtener la misma sucesión

$$\ldots, \phi^{-2}, \phi^{-1}, 1, \phi, \phi^2, \phi^3, \phi^4, \phi^5, \phi^6, \phi^7, \phi^8, \phi^9, \ldots, \phi^n, \ldots$$

Evidentemente, lo mismo ocurre si calculamos las diferencias segundas, terceras, etc.

Relaciones "trascendentes" de ϕ

Vamos a analizar si el número de oro tiene alguna relación con los dos números trascendentes más importantes de las matemáticas: e y π. Para ello vamos a recordar algunos desarrollos de estos últimos:

i) e = 2,71828128. . . .

ii)

$$e = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n.$$

iii)

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots$$

iv)
$$e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{8 + \cfrac{1}{1 + \dots}}}}}}}}}$$

v) π = 3,14159265. . . .

vi)
$$\pi = \frac{2^2 \times 4^2 \times 6^2 \times 8^2 \times \dots}{3^2 \times 5^2 \times 7^2 \times 9^2 \times \dots}.$$

vii) Recuerdo especial
$$\frac{\pi^2}{6} = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}.$$

viii)
$$\frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots +$$

ix)
$$\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \cfrac{7^2}{2 + \cfrac{9^2}{2 + \cfrac{11^2}{2 + \cfrac{13^2}{2 + \dots}}}}}}}$$

Relaciones con e

- Una primera similitud es que en los desarrollos de estos números irracionales se ven aparecer “cortejos rimados” de números naturales.

- De la relación de ϕ con el triángulo de Pascal, obtenemos una segunda relación con el número e. Proviene del hecho reflejado en el ítem ii), los coeficientes de la sucesión cuyo límite es e son los números de las filas del triángulo de Pascal.
- Una tercera similitud es que todas las derivadas de la función $y = e^x$ son la misma función. Hemos puesto de manifiesto que realizando diferencias finitas en la sucesión ϕ se vuelve a obtener la misma sucesión.

Relaciones con π

La relación con π está mas cogida por los pelos pero, precisamente por ello, es muy curiosa.

- Evidentemente hay una relación indirecta entre ϕ y π que viene dada a través de e. Basta recordar las dos siguientes relaciones:

$$1 + e^{i\pi} = 0; \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{n}} = \sqrt{2\pi}.$$

- Una curiosa segunda relación se debe a los siguientes hechos:

$$\frac{4}{\pi} = 1,273\cdots; \quad \sqrt{\phi} = 1,272\cdots; \quad \frac{\pi}{4}^2 = 0,617\cdots; \quad \frac{1}{\phi} = 0,618\cdots$$

Vamos a detenernos ligeramente en esta relación.

Es bien conocido que el triángulo rectángulo 3, 4, 5 es (esencialmente) el único cuyos lados están en progresión aritmética[8]. Nos preguntamos ahora cuántos triángulos rectángulos existen de tal manera que sus lados estén en progresión geométrica. Llamamos a y b a los catetos y c a la hipotenusa. Se verifica, por una parte, que:

$$c^2 = a^2 + b^2,$$

y, por otra, al estar los lados en progresión geométrica que:

$$\frac{c}{b} = \frac{b}{a}; \quad ca = b^2.$$

Es decir

$$c^2 = a^2 + ac.$$

[8]Los agrimensores egipcios ya usaban cuerdas divididas en 12 partes iguales con el fin de “construir” ángulos rectos.

Como consecuencia,

$$\frac{c}{a} = \phi; \quad \frac{c}{b} = \frac{b}{a} = \sqrt{\phi} = 1,272\cdots$$

Es decir, el único triángulo rectángulo cuyos lados están en progresión geométrica es (esencialmente) aquel cuya razón es $\sqrt{\phi}$. En este triángulo rectángulo ABC el ángulo en B vale 51° 50'....

Volvemos a Egipto

En 1840, el general Howard Vyse midió el ángulo en la base del triángulo meridiano de la gran pirámide del Gizeh y obtuvo que ese ángulo es precisamente 51° 50', es decir, el semitriángulo "central" de la gran pirámide es semejante al triángulo "aúreo". Piazzi-Smyth[9] encontró la aproximación 148,208 m para la altura de la gran pirámide y 232,805 m para el lado de la base.

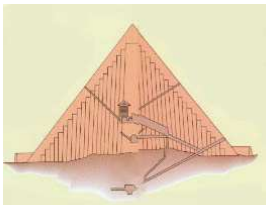

Figura 15 Triángulo meridiano de la Pirámide de Keops

Ahora bien, haciendo las cuentas oportunas, se obtiene:

$$\frac{148,2}{116,4} = 1,273 \quad ; \quad \frac{148,2}{116,5} = 1,272$$

lo que ha hecho ver diferentes relaciones en la construcción de la gran pirámide, unas veces con π y otras con la razón aurea. Es decir se puede suponer que, si llamamos h a la altura de la gran pirámide, $2a$ al lado de la base y c a la hipotenusa del triángulo meridiano formado por a y h los constructores de la gran pirámide

[9]Charles Piazzi Smyth (Astrónomo Real de Escocia, denominación que hasta recientemente otorgaba la Corona británica a sus astrónomos más eminentes) organizó un experimento en el Monte de Guajara, en la isla de Tenerife, a 2.715m de altitud (cumbre más elevada del Teide, al sur de la Caldera de las Cañadas).El principal objeto de esta expedición era determinar cómo podrían mejorar las observaciones astronómicas eliminando el efecto de la baja atmósfera. Además, en esta expedición se tomaron medidas geológicas y meteorológicas de la zona, observaciones de la Luna (las primeras infrarrojas), de los planetas, de estrellas dobles y de la radiación ultravioleta del Sol.

hayan querido reproducir:

$$\frac{c}{h} = \frac{h}{a} = \sqrt{\phi}.$$

También es posible pensar que lo que realmente han querido reproducir es:

$$\frac{h}{a} = \frac{4}{\pi} \quad ; \quad \frac{a}{h} = \frac{\pi}{4},$$

lo que implica:

$$8a = 2\phi$$

y como consecuencia se obtiene que el cociente entre el área de la base $(4a^2)$ y el área de la sección meridiana (ha) de la gran pirámide es precisamente π.

Igualmente es posible suponer que el perímetro de la base $(4a)$ es precisamente el perímetro de la circunferencia de radio h. Conclusión: el constructor de la gran pirámide consiguió la cuadratura del círculo. Algunos egiptólogos (Piazzi-Smyth, Petrie) defendieron la teoría de π. Otros (W Price), sin embargo defendieron la teoría aurea. Parece más probable esta última pues emana de una construcción geométrica más rigurosa. Curiosamente, el abad Moreux, autor de *La science mystériuse des Pharaons* que fue partidario de la tesis π dice: "Herodoto relata que los sacerdotes egipcios le habían enseñado que las proporciones establecidas para la Gran Pirámide entre el lado de la base y la altura eran tales que el cuadrado construido sobre la altura vertical era exactamente igual al área de cada una de las caras triangulares". Traduciendo esto a lenguaje matemático se obtiene la hipótesis aurea.

¿Por qué Divina Proporción?

Falta cumplir uno de los compromisos iniciales. Ya hemos señalado que la división de un segmento en media y extrema razón se conoce desde antiguo, que se ha utilizado como canon de belleza, que ha guiado la construcción de muchos edificios y ha sido el esquema base de muchas obras de arte. ¿De dónde viene el nombre de Divina Proporción? La respuesta la encontramos en el libro al que hemos aludido al principio: La Divina Proporción, de Fra Luca Pacioli (Figura 16).[10] Fra Luca da las siguientes razones:

[10] De los tres códices de la Divina Proporción que Fra Luca Pacioli mandó copiar se conservan el que el autor dedicó al Duque de Milán Ludovico il Moro, en la Biblioteca Cívica de Ginebra, y otro en la Biblioteca Ambrosiana de Milán. Más tarde, en 1509, el libro fue impreso en Venecia por Paganino Paganini.

Figura 16 LUCA PACIOLI

1.- “es una sola y no más” (unidad supremo epíteto de Dios mismo);

2.- “una misma proporción se encontrará siempre entre tres términos, y nunca de más o de menos” (como la Santísima Trinidad);

3.- “no puede nunca determinarse con un número inteligible ni expresarse mediante cantidad racional alguna” (Dios no puede definirse propiamente);

4.- “es siempre la misma y siempre invariable y de ninguna manera puede cambiar” (Dios no puede cambiar);

5.- “confiere, según Platón, el ser formal al cielo mismo” (Dios confiere el ser a la virtud celeste).

No quiero acabar sin comentar alguna curiosidad, que me parece interesante. En el Capítulo I de La divina Proporción, el autor agradece al Duque de Milán su mecenazgo sobre las artes y la ciencias y, entre otras cosas, escribe: *... Vuestra Alteza dijo, con sus áureas y melifluas palabras, que es digno de grandísima consideración de Dios y del mundo aquel que, estando dotado de alguna virtud, la comunica a los demás de buen grado, cosa que es caridad para con el prójimo y alabanza y honor para él mismo, imitando el sagrado dicho quod ne sine figmento didice et sine invidia libenter comunico ...... grandemente excitado por las mencionadas palabras recobré aliento en la solitaria pendiente* *para preparar este breve compendio y utilísimo tratado titulado La Divina Proporción...... como afirman Aristóteles y Averroes, nuestras matemáticas son las más verdaderas de las cosas verdaderas, en el primer grado de la certeza, y a ellas siguen todas las demás ciencias naturales...*

Estos párrafos, en mi opinión, explican buena parte del pensamiento y de la conducta de los matemáticos. Creemos que "nuestras matemáticas son las más verdaderas de las cosas verdaderas" y por otra parte que "es digno de grandísima consideración de Dios y del mundo aquel que, estando dotado de alguna virtud, la comunica a los demás de buen grado, cosa que es caridad para con el prójimo y alabanza y honor para él mismo". Por lo tanto, no sólo no es necesario patentar teoremas ni algoritmos; es obligación difundirlos.

Más Divina Proporción

El equilibrio entre el saber y el poder está hoy roto en partes. El instinto sólo da fragmentos; pero el arte magno debe corresponder al hombre completo. La Divina Proporción es la medida generalizada. Paul Valèry

La sucesión de Fibonacci o la razón áurea aparecen en multitud de ocasiones en la naturaleza y en el arte (...es la medida generalizada). Señalo (porque no hay espacio para más) alguno de ellos: arquitectura, diseño, filotaxia, proporciones del cuerpo humano, danza, música, pintura, urbanismo, tipografía, fractales, etc. Hasta Alan Turing se dedicó a estudiar la razón por la que esta proporción aparecía tanto en la Naturaleza. Para hacerse idea de ello, recomiendo uno de los textos literarios que han aparecido en www.divulgamat.net (página web de divulgación de la Real Sociedad Matemática Española), concretamente el de 2 de abril de 2004; se trata de un texto correspondiente a "El código da Vinci" de Dan Brown. El tratado La Divina Proporción está ilustrado con dibujos realizados por Leonardo de diferentes poliedros. Estudiando el tratado y analizando profundamente los maravillosos dibujos de Leonardo, he llegado a la conclusión de que, efectivamente, la divina proporción "el Universo armónico origina". Para cerciorarse de ello, no hay más que contemplar la siguiente figura que pone de manifiesto cómo Leonardo, además de pintor, diseñador, cocinero,..., era futurólogo y vislumbró con gran precisión cuál iba a ser, rodando los tiempos, la actividad que iba a mover el mundo ... ¡EL FÚTBOL!

Por último, creo que, una vez que ha aparecido el fútbol, hay que finalizar el tema poéticamente, con un soneto que Rafael Alberti dedicó a la Divina Proporción:

A ti, maravillosa disciplina,
media, extrema razón de la hermosura,
que claramente acata la clausura
viva en la malla de tu ley divina.

A ti, cárcel feliz de la retina,
áurea sección, celeste cuadratura,
misteriosa fontana de mesura
que el Universo armónico origina.

A ti, mar de los sueños angulares,
flor de las cinco formas regulares,
dodecaedro azul, arco sonoro.

Luces por alas un compás ardiente.
Tu canto es una esfera transparente.
A ti, divina proporción de oro.

Existen muchísimas páginas web que tratan del número de oro. el lector tiene toda internet disponible para encontrarlas. Igualmente, hay muchísima bibliografía que trata los temas de los que hemos hablado; doy tres referencias que son básicas.

Bibliografía

[1] GHYKA MATILA C. *El Número de Oro I y II,* Poseidón, 1968.

[2] GHYKA MATILA C. *Estética de las proporciones en la naturaleza y en las artes,* Poseidón, 1977.

[3] PACIOLI LUCA. *La Divina Proporción,* Ediciones Akal, S.A. 1991. Traducción del original de 1509.