El problema de la ruina del jugador

por

Jesús de la Cal, Universidad del País Vasco–Euskal Herriko Unibertsitatea, *mepcaagj@lg.ehu.es*

9.1 El problema

Supongamos en escena a dos jugadores: uno, al que llamaremos J (con el que nos identificaremos a lo largo de esta historia), dispone de n euros; el otro, al que llamaremos O (y que podemos identificar con la banca de un casino), tiene una fortuna ilimitada. Estos personajes juegan partidas sucesivas e independientes. En cada partida, la probabilidad de que gane J es p, y la de que gane O es $q = 1 - p$, y el perdedor entrega 1 euro al ganador. La fortuna de J evoluciona, por tanto, al azar, de acuerdo con los resultados de las sucesivas partidas. El juego solo termina cuando la fortuna de J alcanza una cantidad prefijada $T \geq n$ (momento en el que J se retira del juego), eventualidad que denotaremos por A_n^T, o bien cuando tal fortuna se reduce a 0 (es decir, cuando J se arruina), lo que denotaremos por B_n^T; finalmente, denotaremos por C_n^T la eventualidad de que no ocurra ninguna de esas dos cosas y el juego no termine.

El problema estriba en hallar las probabilidades

$$a_n^T := P(A_n^T), \qquad b_n^T := P(B_n^T), \qquad c_n^T := P(C_n^T),$$

lo que significa encontrar las fórmulas que expresan tales probabilidades en función de los parámetros que intervienen. Nótese que, como las tres eventualidades mencionadas son mutuamente excluyentes y abarcan todas las posibilidades, se tiene

$$a_n^T + b_n^T + c_n^T = 1. \tag{9.1}$$

9.2 Tipos de juego

Recordemos que, además de n y T, hay un tercer parámetro (que no se ha incluido en las notaciones anteriores para no recargarlas): la probabilidad p de que J gane cada partida, o bien la *ratio* $r := q/p$. Este tercer parámetro es precisamente el que permite distinguir el *tipo de juego* en el que participa J. Hay tres casos principales:

- *Juego equilibrado*, cuando $p = 1/2$, es decir, $r = 1$.
- *Juego desfavorable a J*, cuando $p < 1/2$, es decir $r > 1$.
- *Juego favorable a J*, cuando $p > 1/2$, es decir $r < 1$.

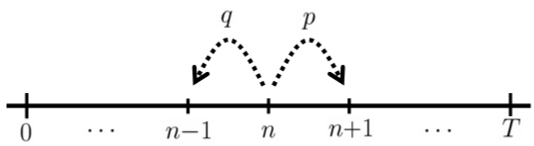
En los análisis matemáticos subsiguientes consideraremos solo los dos primeros casos. En realidad, por simetría, las conclusiones para el tercer caso pueden derivarse fácilmente de las que se obtengan para el segundo, sin más que adoptar *el punto de vista de O*.

Por otra parte, hay que decir que, para un jugador que frecuente los casinos, el único caso *realista* es el segundo. Veamos, por ejemplo, lo que ocurre con un jugador de ruleta. En una ruleta *francesa* hay 37 casillas numeradas de 0 a 36. La casilla del 0 es de color verde, y, de las restantes, la mitad son de color rojo, y la otra mitad de color negro. Por tanto, un jugador que apuesta a *rojo* (o a *negro*) gana con probabilidad $p = 18/37$ ($r = 19/18$). En una ruleta *americana*, la situación es aún más desfavorable para nuestro jugador, ya que ahora hay 38 casillas, dos de los cuales están numeradas con 0 y son de color verde, de manera que $p = 18/38$ ($r = 20/18$).

9.3 Paseo aleatorio

Pero antes de entrar en la resolución del problema, veamos una versión del mismo en términos completamente distintos.

Supongamos que una partícula se mueve (a saltos) por el eje x, ocupando las posiciones que corresponden a números enteros. Inicialmente ($t = 0$), se encuentra en $x = n$. En cada uno de los instantes $t = 1, 2, \ldots$, la partícula salta una unidad a la derecha, con probabilidad p, o a la izquierda, con probabilidad q. En las posiciones $x = 0$ y $x = T$ hay unas barreras que atrapan o absorben la partícula e impiden su posterior movimiento, de manera que tal movimiento cesa cuando la partícula cae en una de ellas; de no ocurrir tal cosa, la partícula continúa saltando indefinidamente.



En la literatura matemática, el movimiento de nuestra partícula recibe el nombre (muy apropiado, por cierto) de *paseo aleatorio (unidimensional) con dos barreras absorbentes*. Pero es evidente que tal movimiento es matemáticamente indistinguible del que realiza la fortuna de J en el problema del jugador. Los instantes $t = 1,\ 2, \ldots$, corresponden a lo que allí eran las partidas sucesivas, y las eventualidades denotadas por A_n^T, B_n^T y C_n^T se traducen ahora de la manera siguiente:

$A_n^T =$ la partícula es absorbida en $x = T$.

$B_n^T =$ la partícula es absorbida en $x = 0$.

$C_n^T =$ la partícula no deja de saltar.

No es difícil proponer otras versiones, algunas muy *pintorescas*, del mismo paseo aleatorio. Por ejemplo, podemos ver el intervalo $[0, T]$ como el ancho (de T metros) de una carretera que está bordeada, a la izquierda, por un río de frescas aguas, y, a la derecha, por una cuneta de mullida hierba. En $x = n$ (es decir, a n metros del agua y $T - n$ metros de la hierba) se encuentra un individuo cuyo estado de intoxicación etílica solo le permite el moviviento *lateral*, y, en los instantes $t = 1,\ 2, \ldots$, da un traspiés (de 1 metro) a la derecha, con probabilidad p, o a la izquierda, con probabilidad q... En fin, dejo al lector la tarea de terminar de traducir a la nueva situación las cuestiones que antes se formulaban en términos de juego o de movimiento de una partícula.

En todo caso, el lector estará de acuerdo en que la visión como paseo aleatorio del problema de la ruina del jugador justifica plenamente la inclusión de este tema en un ciclo de conferencias que tiene por título *Un paseo por la geometría*.

9.4 Relaciones de recurrencia

Entramos ya en la tarea de encontrar las fórmulas para a_n, b_n y c_n (obsérvese que hemos simplificado la notación, suprimiendo el superíndice T). El primer paso es ver que tales cantidades (probabilidades) cumplen una relación de recurrencia. Para ello, la idea es condicionar a lo que ocurre en la primera partida. Llamemos H al suceso J *gana la primera partida* y H^c al suceso contrario. Se tiene entonces, por la fórmula de la probabilidad total,

$$P(A_n^T) = P(H)P(A_n^T \mid H) + P(H^c)P(A_n^T \mid H^c), \tag{9.2}$$

donde $P(U \mid V)$ indica la *probabilidad (condicional) de que ocurra U supuesto que ha ocurrido V*. Ahora bien, es claro que si J gana (pierde) la primera partida, la probabilidad de que su fortuna alcance T partiendo de n es exactamente la probabilidad de que llegue a T partiendo de $n+1$ $(n-1)$, es decir,

$$P(A_n^T \mid H) = P(A_{n+1}^T), \qquad P(A_n^T \mid H^c) = P(A_{n-1}^T),$$

con lo que la ecuación (9.2) se reduce a

$$a_n = pa_{n+1} + qa_{n-1},$$

o bien, despejando a_{n+1} y recordando que $q/p = r$ y $1/p = r+1$,

$$a_{n+1} = (r+1)a_n - ra_{n-1}. \tag{9.3}$$

Además tenemos que

$$a_0 = 0, \qquad a_T = 1. \tag{9.4}$$

Todo esto lo resumimos diciendo que a_n es la solución de la *ecuación en diferencias* (9.3) (de segundo orden, lineal, homogénea, con coeficientes constantes) que cumple las *condiciones de contorno* (9.4).

Razonando ahora con B_n^T y C_n^T de la misma manera que con A_n^T, obtenemos que b_n y c_n cumplen lo siguiente

$$b_{n+1} = (r+1)b_n - rb_{n-1}, \qquad b_0 = 1,\ b_T = 0,$$

$$c_{n+1} = (r+1)c_n - rc_{n-1}, \qquad c_0 = 0,\ c_T = 0.$$

Así pues, a_n, b_n y c_n son tres soluciones de la misma ecuación en diferencias

$$\alpha_{n+1} = (r+1)\alpha_n - r\alpha_{n-1}, \tag{9.5}$$

que difieren entre sí por las condiciones de contorno.

9.5 Fórmulas explícitas

En esta segunda etapa, abordamos la tarea de encontrar las fórmulas para a_n, b_n y c_n a partir de las recurrencias anteriores. Existen, para ello, diversos métodos. Uno de ellos, quizá el más *popular*, es análogo al que se utiliza para resolver las ecuaciones diferenciales ordinarias lineales con coeficientes constantes. Otro, que es el que emplearemos aquí, es el método de la *función generatriz*.

Partamos de una sucesión $(\alpha_n)_{n\geq 0}$ que cumple (9.5), y supongamos (solo por un momento) que la función dada por la serie de potencias

$$g(s) := \sum_{n\geq 0} \alpha_n s^n, \tag{9.6}$$

está bien definida en un entorno de 0 (es decir, que el radio de convergencia de la serie de potencias es no nulo). Tendríamos entonces, usando (9.5),

$$\begin{aligned} g(s) &= \alpha_0 + \alpha_1 s + \alpha_2 s^2 + \cdots \\ &= \alpha_0 + \alpha_1 s + ((r+1)\alpha_1 - r\alpha_0)s^2 + ((r+1)\alpha_2 - r\alpha_1)s^3 \cdots \\ &= \alpha_0 + \alpha_1 s \\ &\quad + (r+1)s(\alpha_1 s + \alpha_2 s^2 + \cdots) \\ &\quad - rs^2(\alpha_0 + \alpha_1 s + \alpha_2 s^2 + \cdots) \\ &= \alpha_0 + \alpha_1 s + (r+1)s(g(s) - \alpha_0) - rs^2 g(s), \end{aligned}$$

de donde

$$g(s) = \frac{\alpha_0 + (\alpha_1 - (r+1)\alpha_0)s}{1 - (r+1)s + rs^2}. \tag{9.7}$$

Recíprocamente, es claro que la función dada por el lado derecho de (9.7) es analítica en un entorno de 0, que los coeficientes de su desarrollo en serie cumplen (9.5) (recórrase el camino anterior *hacia atrás*), y que los dos primeros son α_0 y α_1, luego la sucesión de tales coeficientes es necesariamente $(\alpha_n)_{n\geq 0}$.

En otras palabras, hemos encontrado la forma cerrada de la función definida en (9.6) (que se llama *función generatriz* de la sucesión $(\alpha_n)_{n\geq 0}$). Ahora no hay más que desarrollar en serie esta función para tener la expresión explícita de α_n. Para hacer este desarrollo, descompondremos la función racional en fracciones simples, lo que (al tenerse $1 - (r+1)s + rs^2 = (1-s)(1-rs)$) nos lleva a considerar por separado los casos correspondientes a $r = 1$ y $r > 1$.

(1) *El caso* $r = 1$. En este caso se tiene por la fórmula del binomio

$$\begin{aligned} g(s) &= [\alpha_0 + (\alpha_1 - 2\alpha_0)s](1-s)^{-2} \\ &= [\alpha_0 + (\alpha_1 - 2\alpha_0)s]\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-2}{n}(-s)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}[(n+1)\alpha_0 + n\alpha_1]s^n, \end{aligned}$$

luego

$$\alpha_n = (n+1)\alpha_0 + n\alpha_1, \tag{9.8}$$

lo que nos expresa α_n en función de n y los valores iniciales. Las condiciones de contorno permiten determinar estos valores iniciales y alcanzar la fórmula *concreta* para α_n, cosa que haremos más adelante, después de discutir el siguiente caso.

(2) *El caso* $r > 1$. Tenemos ahora

$$\begin{aligned} g(s) &= \frac{r\alpha_0 - \alpha_1}{r-1}\frac{1}{1-s} + \frac{\alpha_1 - \alpha_0}{r-1}\frac{1}{1-rs} \\ &= \frac{r\alpha_0 - \alpha_1}{r-1}\sum_{n\geq 0} s^n + \frac{\alpha_1 - \alpha_0}{r-1}\sum_{n\geq 0} r^n s^n \\ &= \sum_{n\geq 0}\left[\frac{\alpha_0(r - r^n) + \alpha_1(r^n - 1)}{r-1}\right]s^n, \end{aligned}$$

de donde

$$\alpha_n = \frac{\alpha_0(r - r^n) + \alpha_1(r^n - 1)}{r-1}. \tag{9.9}$$

Vayamos ya con nuestras sucesiones a_n, b_n y c_n. En el caso de a_n, las condiciones de contorno son $\alpha_0 = 0$ y $\alpha_T = 1$. Así pues, de (9.8) y (9.9) obtenemos que la probabilidad de que J consiga su objetivo de alcanzar una fortuna T empezando con n (o de que la partícula inicialmente situada en n sea absorbida en T) viene dada por (incluimos ahora en la notación los tres parámetros):

$$a_n^T(r) = \begin{cases} n/T & \text{si } r = 1 \\ \dfrac{r^n - 1}{r^T - 1} & \text{si } r > 1. \end{cases} \tag{9.10}$$

Obsérvese de paso que, para n y T fijos, esta función de r es continua, ya que una sencilla aplicación de la regla de l'Hopital da

$$\lim_{r\downarrow 1}\frac{r^n - 1}{r^T - 1} = \lim_{r\downarrow 1}\frac{nrn - 1}{Tr^{T-1}} = \frac{n}{T}.$$

Análogamente, en el caso de c_n, las condiciones de contorno son $\alpha_0 = 0$ y $\alpha_T = 0$, y la probabilidad de que el juego no termine es

$$c_n^T(r) = 0 \quad \text{en cualquier caso.} \tag{9.11}$$

Finalmente, basta recordar (9.1), para deducir que la probabilidad de que J se arruine (o de que la partícula sea absorbida en 0) es

$$b_n^T(r) = 1 - a_n^T(r) = \begin{cases} 1 - n/T & \text{si } r = 1 \\ \dfrac{r^T - r^n}{r^T - 1} & \text{si } r > 1. \end{cases} \tag{9.12}$$

9.6 Ejemplos

Las fórmulas anteriores son muy sencillas de aplicar a situaciones concretas; basta con disponer de una sencilla calculadora. Pongámonos en el caso (algo exagerado) de un individuo J que dispone de ($n =$) 100 euros, pero necesita llegar a ($T =$) 20000 para pagar una deuda, y decide intentar el juego para conseguirlo. Si encontrara un contrincante que aceptara un juego equilibrado, la probabilidad de que J consiguiese su objetivo sería realmente pequeña: 0,005. Pero apostando a *rojo* en una ruleta de un casino de Las Vegas ($r = 20/18$), tal probabilidad se reduce a $3\ 10^{-911}$, algo verdaderamente insignificante.

El ejemplo anterior ilustra bastante bien la diferencia entre un juego equilibrado y otro que no lo es. El ejemplo siguiente va en el mismo sentido, y pone de manifiesto un fenómeno interesante. La tabla recoge las probabilidades (para $r = 1$ y para $r = 20/18$) de que un jugador consiga 100 euros más de los que tiene, para diversas fortunas iniciales.

n	T	$a_n^T(1)$	$a_n^T(20/18)$
100	200	$0,5$	$< 0,00003$
200	300	$0,66$	$< 0,00003$
500	600	$0,83$	$< 0,00003$
900	1000	$0,9$	$< 0,00003$
9900	10000	$0,99$	$< 0,00003$
99900	100000	$0,999$	$< 0,00003$

Observamos que, en el caso de juego equilibrado, la probabilidad de que el jugador consiga esos 100 euros más es tanto mayor cuanto mayor sea su fortuna inicial, y se aproxima a 1 cuando ésta es grande, mientras que, en el otro caso, tal probabilidad se mantiene inferior a 0.00003 por grande que sea la fortuna inicial. ¿Podemos explicar este fenómeno? Sí; de hecho, la explicación es muy sencilla.

9.7 El caso en que $T - n$ es fijo

La cuestión suscitada por el ejemplo anterior puede formularse en los siguientes términos: Suponiendo que $m := T - n$ es una cantidad fija, ¿cómo varía $a_n^T(r)$ en función de n?

En el caso de juego equilibrado ($r = 1$), se tiene

$$a_n^T(1) = \frac{n}{n+m} = 1 - \frac{m}{n+m},$$

lo que muestra claramente que $a_n^T(1)$ crece con n, y además tiende a 1 cuando $n \to \infty$.

Si el juego es desfavorable ($r > 1$), se tiene

$$a_{n+1}^T(r) - a_n^T(r) = \frac{r^{n+1} - 1}{r^{n+m+1} - 1} - \frac{r^n - 1}{r^{n+m} - 1} = \frac{r^n(r-1)(r^m - 1)}{(r^{n+m+1} - 1)(r^{n+m} - 1)} > 0,$$

lo que nos dice que, también en este caso, $a_n^T(1)$ crece con n. Sin embargo, ahora ocurre que

$$\lim_{n\uparrow\infty} a_n^T(r) = \lim_{n\uparrow\infty} \frac{r^n - 1}{r^{n+m} - 1} = (1/r)^m.$$

Por consiguiente, cualquiera que sea el valor de n, la probabilidad $a_n^T(r)$ no puede ser superior a $(1/r)^m$. En particular, para los datos del ejemplo anterior, se tiene

$$(1/r)^m = (18/20)^{100} < 0,00003.$$

9.8 Efecto del cambio de apuesta

Abordamos a continuación otra cuestión interesante. Sabemos que si J empieza con n euros, la probabilidad de que llegue a tener T, *cuando en cada partida apuesta 1 euro*, es $a_n^T(r)$. ¿Qué ocurriría si la apuesta en cada partida fuera de 1/2 euro? ¿Favorecería o perjudicaría esto las opciones de J?

Lo que tendríamos en tal caso es un jugador que empieza con $2n$ unidades y desea llegar a tener $2T$ unidades, apostando una unidad (= medio euro) en cada partida. La probabilidad sería, por tanto, $a_{2n}^{2T}(r)$, y se trata de compararla con la anterior $a_n^T(r)$.

En el caso de juego equilibrado, ambas son iguales, ya que

$$a_{2n}^{2T}(1) = \frac{2n}{2T} = \frac{n}{T} = a_n^T(1).$$

En el caso de juego desfavorable $(r > 1)$, se tiene

$$\begin{aligned} a_{2n}^{2T}(r) &= \frac{r^{2n}-1}{r^{2T}-1} \\ &= \frac{r^n+1}{r^T+1}\frac{r^n-1}{r^T-1} \\ &= K\, a_n^T(r), \end{aligned}$$

siendo

$$K := \frac{r^n+1}{r^T+1}.$$

Ahora bien, como $r > 1$, se comprueba fácilmente que el factor K es menor que la unidad, por lo que $a_{2n}^{2T}(r)$ es más pequeña que $a_n^T(r)$. Así pues, con juego desfavorable, cuanto menor la puesta, peor para el jugador.

9.9 Duración esperada del juego

Ocupémonos ahora de la duración del juego, es decir, del número D_n de partidas jugadas hasta que el juego acaba (o el número de saltos de la partícula hasta que es absorbida en una de las barreras) (de nuevo simplificamos la notación haciendo aparecer solo uno de los parámetros: la fortuna inicial n). Sabemos ya que esta variable aleatoria D_n es finita con probabilidad 1. No sería difícil encontrar la distribución de probabilidad de D_n, y mostrar que su esperanza $d_n := ED_n$ es finita, pero no detallaremos esto aquí, a fin de no alargar en exceso nuestra exposición. Sin embargo, admitiendo como sabido que la duración esperada d_n es finita, podemos hallar su valor con un método similar al empleado antes para obtener las probabilidades a_n, b_n, y c_n, es decir, condicionando a lo que ocurre en la primera partida.

En efecto, si llamamos de nuevo H al suceso *J gana la primera partida*, y denotamos por $E[\cdot \mid H]$ la esperanza condicionada a H, se tiene

$$ED_n = P(H)E[D_n \mid H] + P(H^c)E[D_n \mid H^c],$$

es decir

$$d_n = pE[D_n \mid H] + qE[D_n \mid H^c],$$

y como

$$E[D_n \,|\, H] = 1 + ED_{n+1} = 1 + d_{n+1}, \qquad E[D_n \,|\, H^c] = 1 + ED_{n-1} = 1 + d_{n-1},$$

obtenemos

$$d_n = pd_{n+1} + qd_{n-1} + 1.$$

Así pues, d_n es la solución de la ecuación en diferencias (lineal, pero *no* homogénea)

$$d_{n+1} = (r+1)d_n - rd_{n-1} - (r+1),$$

que cumple las condiciones de contorno $d_0 = 0 = d_T$.

A partir de aquí podemos encontrar la expresión explícita de d_n, siguiendo, por ejemplo, el método de la función generatriz que ya fue empleado en la sección 9.5. Dejaremos al lector la tarea de realizar los oportunos cálculos y desarrollos que llevan a la conclusión de que la expresión buscada es la siguiente (de nuevo incluimos en la notación todos los parámetros involucrados):

$$d_n^T(r) = \begin{cases} n(T-n) & \text{si } r = 1 \\ \dfrac{r+1}{r-1}\left[n - T\dfrac{r^n - 1}{r^T - 1}\right] & \text{si } r > 1. \end{cases}$$

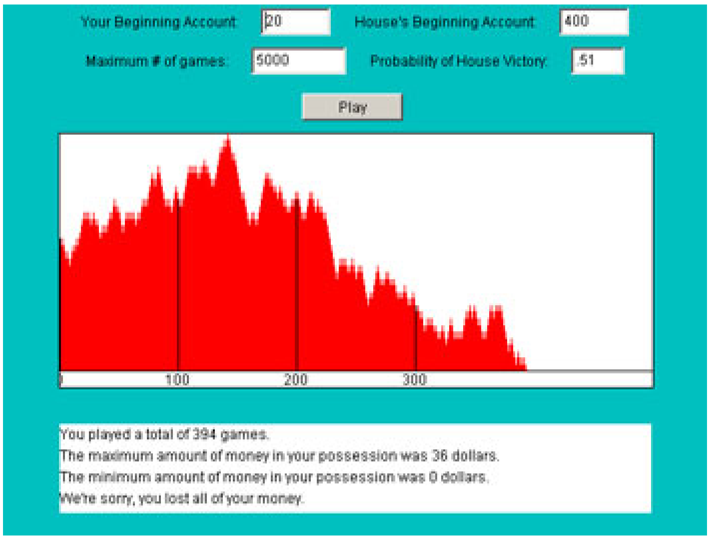
9.10 Simulación

Con las modernas tecnologías computacionales se pueden elaborar fácilmente programas que simulan de manera cómoda, sugestiva y eficaz el proceso de juego (o de movimiento de la partícula), lo que es interesante desde el punto de vista de la experimentación, el aprendizaje y...la diversión. A través de internet se puede acceder a programas ya elaborados y que se ejecutan desde el navegador del usuario (*applets*).

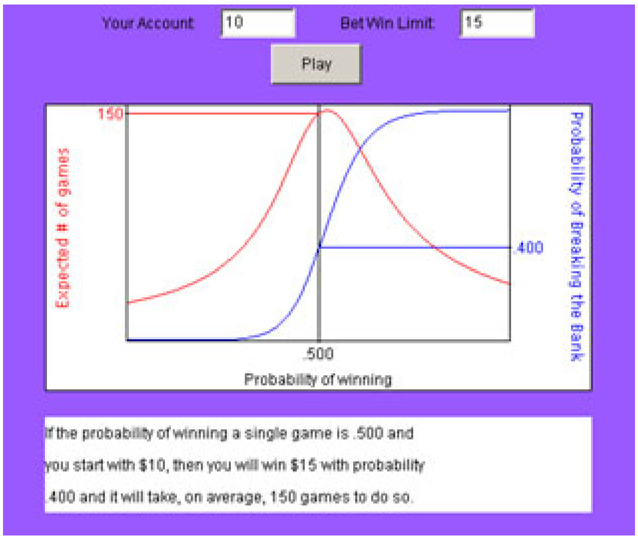
Podemos mencionar, por ejemplo, el que ofrece la Universidad de California en San Diego (UCSD) en la dirección siguiente:

http://math.ucsd.edu/~anistat/gamblers_ruin.html

En las cajas preparadas al efecto se introducen los valores que se deseen de los parámetros, y, tras la orden de ejecución, el programa realiza intantáneamente la simulación de una posible evolución del juego, mostrando gráficamente las variaciones del capital (de J) según los resultados de las distintas partidas. Además proporciona otras informaciones interesantes.

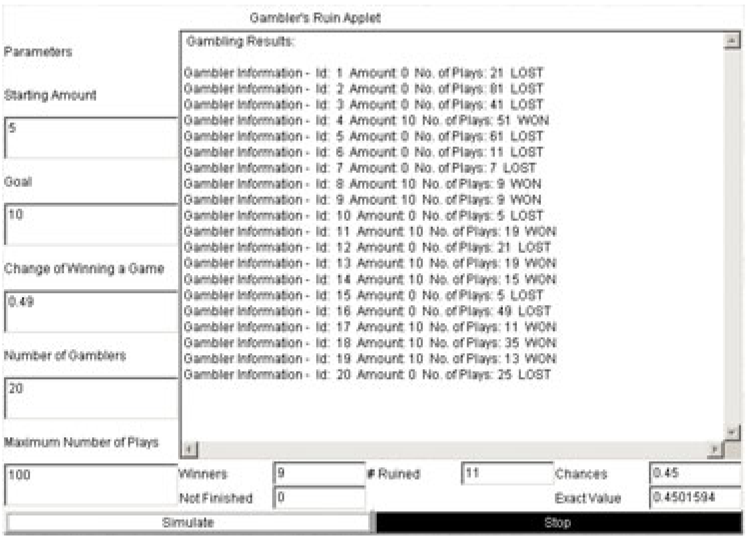


En el mismo sitio de internet, el visitante puede encontrar también una agradable tabla animada que proporciona, una vez fijados los valores de n y T, la duración esperada del juego $d_n^T(r)$ y la probabilidad $a_n^T(r)$, en función del valor de r (o p).



Finalmente, mencionaremos el simulador que ofrece la Universidad del Estado de Utah (USU). A diferencia del anterior, no muestra la evolución concreta del juego, pero en cambio puede realizar simultáneamente múltiples simulaciones (una vez fijados los valores de los parámetros). La dirección de este sitio es:

http://www.math.usu.edu/~koebbe/GR/GamblersRuin/GamblersRuin.html

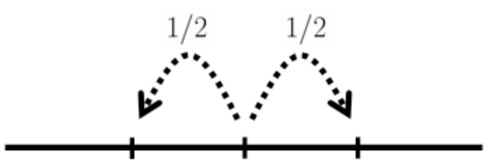


9.11 Paseo aleatorio y dimensión

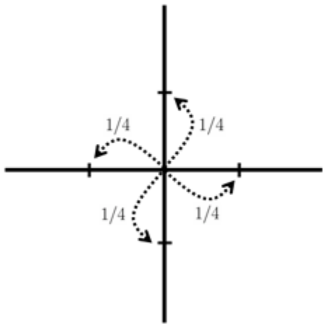
Ha llegado el momento de concluir este esbozo, necesariamente limitado, de una temática que tiene múltiples variantes, derivaciones y ramificaciones. Terminaremos este *Paseo por la geometría* mencionando un curioso hecho que se refiere al paseo aleatorio *simétrico y sin barreras*. Se trata de un famoso resultado descubierto por el matemático de origen húngaro George Polya.

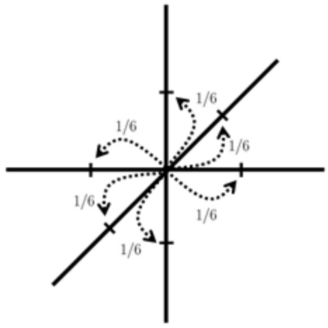
Dejemos a un lado la terminología de juegos y casinos, y pensemos en una partícula que se mueve dando saltos al azar desde las posiciones que ocupa a posiciones *contiguas*. El paseo puede ser en la recta, en el plano o en el espacio.

En el caso de la recta, el movimiento es el que ya fue descrito en la sección 9.3, pero prescindiendo de las barreras absorbentes. Las posiciones corresponden a los números enteros, y la partícula salta desde la posición que eventualmente ocupa a cualquiera de las *dos* contiguas con la misma probabilidad (1/2).



En el caso del plano (espacio), las posiciones corresponden a los puntos de coordenadas enteras, y cada una tiene *cuatro* (*seis*) contiguas. La partícula salta desde su eventual posición a cualquiera de las contiguas con probabilidad 1/4 (1/6).





Supongamos que, inicialmente, la partícula está en el origen de coordenadas y que empieza a moverse de la manera indicada. Pues bien, *en los casos de la recta y el plano, hay probabilidad 1 de que la partícula vuelva a estar en el origen en alguna ocasión, mientras que en el caso tridimensional, tal probabilidad es estrictamente menor que 1, es decir, hay probabilidad no nula de que la partícula no vuelva a pasar nunca por el origen*.

Nota bibliográfica

El material expuesto es estándar y puede ser localizado en infinidad de textos y tratados de cálculo de probabilidades. La referencia más clásica, y siempre recomendable, es quizá la conocida obra de W. Feller *Introducción a la teoría de probabilidades y sus aplicaciones, Vol I*, Editorial Limusa, Méjico, 1986 (traducción de la tercera edición publicada en inglés por Wiley). Nuestra exposición sigue de cerca el capítulo XIV de dicha obra, salvo en lo que se refiere al método de resolución de las ecuaciones en diferencias.

Agradecimientos

Doy las gracias a Marta Macho y Raúl Ibáñez por la amabilidad de invitarme a dar esta conferencia, a la vez que les felicito por su organización de estos *Paseos por la Geometría*. También agradezco a Javier Cárcamo su experta ayuda en la elaboración de las ilustraciones.