

Funciones generadoras. Particiones y Diagramas de Ferrer

por

**José Luis Aguado, Universidad Nacional del Centro de la
Provincia de Buenos Aires, jaguado@exa.unicen.edu.ar**

Introducción

Las funciones generadoras resultan de utilidad en muchos campos de la matemática: teoría de números, combinatoria, probabilidades, teoría de grafos, etc. En la actualidad, con la aparición de potentes paquetes de matemática simbólica se pueden realizar, con relativa velocidad, cálculos que hace algunos años resultaban demasiado largos y complejos. En los puntos 1. y 2. discutimos algunos ejemplos que muestran cómo el programa *Mathematica* (versión 2.2, 3.0 ó 4.0) puede aportar ayuda en los cálculos con series de potencias formales mediante las funciones de los paquetes *Rsolve* y *Combinatorica* que se encuentran en el subdirectorio *Discrete*. La versión 3.0 presenta algunas mejoras respecto de la 2.2 (por ejemplo la simplificación de fórmulas que involucran factoriales y mejoras de la función `Sum[]`). En el punto 3. delineamos una demostración del teorema de Euler sobre las particiones utilizando una elegante argumentación gráfica basada en diagramas de Ferrer, con lo que queda de manifiesto que horas de computación no substituyen aún una idea geométrico-combinatoria genialmente explotada. Hemos agregado en el punto 4., un apéndice con una introducción al anillo de series formales y las operaciones básicas con series

como objetos algebraicos, incluida su topología.

2.1 Dos ejemplos preliminares

El problema de Galileo

En la época de Galileo (1564-1642) era de actualidad el juego de dados llamado del “pasadiez”. El juego consiste en lanzar tres dados a la vez y sumar los puntos resultantes: el jugador gana si esta suma resulta superior a 10 y pierde en el caso contrario. Es fácil ver que el juego es equitativo, es decir, que la probabilidad de ganar es igual a la de perder. En efecto, como los puntos situados en caras opuestas de un dado suman siempre 7, en cualquier posición en que queden los dados, la suma de los puntos de las caras superiores más la suma de los puntos de las caras inferiores vale siempre $7 \cdot 3 = 21$; por tanto si la suma de los puntos de las caras superiores es mayor que 10, la suma de los de las caras inferiores será menor que 10 y recíprocamente. Cuenta la historia que un aficionado a este juego, quién al mismo tiempo debía ser un fino observador, acudió a Galileo, el matemático más famoso de su época para exponerle sus observaciones empíricas, según las cuales el número 11 salía con más frecuencia que el 12 y el 10 con más frecuencia que el 9. La explicación de Galileo fué simple. Basta tener en cuenta que todas las combinaciones no son “*igualmente posibles*”. La combinación $3 - 3 - 3$ por ejemplo, únicamente puede presentarse de una sola manera, mientras que la $1 - 2 - 6$ se puede presentar de seis maneras, permutando los números 1, 2, 6 entre los tres dados. Cada combinación equivale por tanto a un cierto número de casos, que son los efectivos casos posibles que hay que tener en cuenta para hallar la probabilidad. ¿Cómo podemos averiguar el número de descomposiciones de cada uno de los números de 3 a 18?. ¿Y obtener una manera mecánica de generar todas estas particiones?. Recordemos que al multiplicar dos polinomios se suman las potencias de las variables. Así, si tomamos el polinomio:

$$p(x) = x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 \quad (2.1)$$

entonces la componente homogénea de grado m de $p(x)p(y)p(z)$ será la suma de todos los monomios de la forma $x^i y^j z^k$, $1 \leq i, j, k \leq 6$ y tal que $m = i + j + k$. Es decir que si con x^i, y^j, z^k representamos la i -ésima cara de cada uno de los dados x, y, z , respectivamente, entonces el número de tales monomios nos dá precisamente el número de configuraciones de dados para cada m . Después, si hacemos $x = y = z$, el coeficiente de x^m en el desarrollo de $p(x)^3$ nos dará el número total de descomposiciones de $m = i + j + k$ con $1 \leq i, j, k \leq 6$.

Estos cálculos pueden hacerse con máquina.

$$p:=x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6; q:=p/.x \rightarrow y; r:=p/.x \rightarrow z;$$

El programa *Mathematica* no tiene una función incorporada para extraer componentes homogéneas de un polinomio, así pues, definamos una tal función:

```
h[p_, m_]:=
  Sum[If[Plus @@ Exponent[p[[i]], Variables[Expand[p]]] == m, p[[i]], 0],
  {i, Length[p]}]
```

Esta función *h* exhibe la componente homogénea de grado *m* del polinomio *p*. Observar que el polinomio que se pase a esta función debe estar expandido.

$$\begin{aligned} &h[\text{Expand}[p*q*r], 9] \\ &x^6y^2z + x^5y^3z + x^4y^4z + x^3y^5z + x^2y^6z + x^6yz^2 + \\ &x^5y^2z^2 + x^4y^3z^2 + x^3y^4z^2 + x^2y^5z^2 + xy^6z^2 + x^5yz^3 + \\ &x^4y^2z^3 + x^3y^3z^3 + x^2y^4z^3 + xy^5z^3 + x^4yz^4 + x^3y^2z^4 + \\ &x^2y^3z^4 + xy^4z^4 + x^3yz^5 + x^2y^2z^5 + xy^3z^5 + x^2yz^6 + xy^2z^6 \end{aligned}$$

quedan listadas todas las posibles apariciones de 9 que son 25.

Si solamente nos interesa el número de las posibles descomposiciones, hacemos:

$$\begin{aligned} &q:=p^3; \text{Expand}[q] \\ &x^3+3x^4+6x^5+10x^6+15x^7+21x^8+25x^9+27x^{10}+27x^{11}+25x^{12}+21x^{13}+ \\ &15x^{14}+10x^{15}+6x^{16}+3x^{17}+x^{18} \end{aligned}$$

Aquí vemos entonces que hay, por ejemplo, 25 descomposiciones para 9 y para 12 en tanto que 27 para 10 y 11. Además vemos que la sucesión de coeficientes es *unimodal*, esto es, crece hasta un cierto valor y luego decrece. En este caso particular la sucesión de valores es simétrica ya que los coeficientes de x^k y x^{21-k} ($k = 3, \dots, 18$) coinciden. La probabilidad de obtener 9 en un tiro es entonces 25 dividido por el número total de casos. Este número total de casos es, evidentemente, la suma de los coeficientes del polinomio p^3 . En general, si deseamos calcular la probabilidad de obtener una suma k podemos calcularla mediante las siguientes intrucciones:

```

b[k.]:=Coefficient[p,x^k]/(q/.x->1)
t=Table[{{k,21-k},b[k]},{k,3,10}]
{{{3,18},{1/216}},{{4,17},{1/72}},{{5,16},{1/36}},{{6,15},{5/108}},
{{7,14},{5/72}},{{8,13},{7/72}},{{9,12},{25/216}},{{10,11},{1/8}}}

```

Subconjuntos de un conjunto

Para el conjunto $C = \{a, b, c, d\}$ consideremos el polinomio

$$f(x) = (1 + ax)(1 + bx)(1 + cx)(1 + dx) \quad (2.2)$$

Expandimos $f(x)$ y listamos los coeficientes

```

CoefficientList[
Collect[Expand[(1+a*x)*(1+b*x)*(1+c*x)*(1+d*x)],x],x]
{1,a+b+c+d,ab+ac+bc+ad+bd+cd,abc+abd+acd+bcd,abcd}

```

Obtenemos la lista de todos los subconjuntos de C , donde 1 representa \emptyset . Además, con

```
%/.{a->1,b->1,c->1,d->1}
```

obtenemos $\{1,4,6,4,1\}$ que es la lista de los coeficientes binomiales $\binom{4}{k}$, $k = 0, 1, 2, 3, 4$.

2.2 Funciones Generadoras

Definición 2.1 Sea $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión de números complejos. La *función generadora ordinaria (fgo)* de la sucesión a_n se define por la serie de potencias formal:

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (2.3)$$

Ejemplos:

La función generadora del problema de Galileo

Si $p(x)$ es el polinomio de (2.1), entonces

$$p(x)^3 = x^3 + 3x^4 + 6x^5 + 10x^6 + 15x^7 + 21x^8 + 25x^9 +$$

$$27x^{10} + 27x^{11} + 25x^{12} + 21x^{13} + 15x^{14} + 10x^{15} + 6x^{16} + 3x^{17} + x^{18}$$

es la fgo para el número de escrituras $m = i + j + k$ con $1 \leq i, j, k \leq 6$, para $3 \leq m \leq 18$.

Binomio de Newton

Expandimos el polinomio de (2.2) para un n cualquiera: $\prod_{i=1}^n (1 + a_i x)$, y obtenemos la función generadora (simbólica) de los subconjuntos del conjunto $C = \{a_1, \dots, a_n\}$.

Ahora, haciendo todos los $a_i = 1$, tenemos el bien conocido teorema del binomio de Newton:

$$(1 + x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k \quad n \in \mathbb{N} \quad (2.4)$$

De modo que $(1 + x)^n$ es la función generadora ordinaria de la sucesión de coeficientes binomiales:

$$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \dots, \binom{n}{n}, 0, 0, \dots$$

Aquí hacemos la convención habitual que $\binom{n}{k} = 0$ si $k < 0$ o $k > n$.

Existen muchas relaciones entre coeficientes binomiales. Mencionamos una fundamental:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \quad 1 \leq k \leq n$$

La fgo de la sucesión $\binom{m}{n/2}$

Usando (2.4) vemos que: $(1 + x^2)^m = \sum_k \binom{m}{k} x^{2k}$. Ahora en nuestro nuevo lenguaje podemos decir que $(1 + x^2)^m$ es la fgo de la sucesión $\left\{ \binom{m}{n/2} \right\}_{n \geq 0}$.

La serie de Newton y el modelo de los bosones

Recordemos que cuando a es un número real positivo se tiene el siguiente desarrollo en series de potencias:

$$(x + a)^r = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{r}{k} x^k a^{r-k} \quad (2.5)$$

válido para cualquier número real r y para $|x| < a$ (llamada la *serie de Newton*).

Donde, como siempre:

$$\begin{aligned} \binom{r}{0} &= 1 \\ \binom{r}{k} &= \frac{r(r-1)(r-2)\dots(r-k+1)}{k!} \quad \text{si } k \geq 1 \\ \binom{r}{k} &= 0 \quad \text{si } k < 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

Para demostrar la fórmula de Newton en $(x + a)^{-n}$, con n entero positivo, no se requiere la teoría de funciones analíticas, pues pueden hacerse los cálculos sólo en el contexto del anillo de series formales (mejor dicho en su cuerpo de cocientes).

Usando (2.6) no es difícil ver que:

$$\binom{-n}{k} = (-1)^k \binom{n+k-1}{k} \quad n > 0$$

Luego haciendo $a = 1$ en (2.5) y cambiando x por $-x$ tenemos que:

$$(1 - x)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} x^k \quad (2.7)$$

Cuando $n = 1$ tenemos el conocido desarrollo (*serie geométrica*):

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots \quad (2.8)$$

que es la fgo de la sucesión $1, 1, 1, \dots$. En general (2.7) es la fgo del número de disposiciones de n bolitas indistinguibles en k cajas distinguibles (*modelo de los bosones*). En efecto, supongamos tener k cajas numeradas de 1 a k y sea que la i -ésima caja tiene r_i bolitas. Por un argumento análogo al del ejemplo de Galileo, podemos listar todas las posibles disposiciones por medio de los monomios $x_1^{r_1} x_2^{r_2} \dots x_k^{r_k}$ obtenidos por hacer el producto formal

$$(1 + x_1 + x_1^2 + \dots) (1 + x_2 + x_2^2 + \dots) \dots (1 + x_k + x_k^2 + \dots) \quad (2.9)$$

Ahora, para calcular el número de monomios tales que $r_1 + r_2 + \dots + r_k = n$ se hace $x_i = x$ para todo i en (2.9) y usando (2.8), se obtiene que el número de configuraciones buscado es el coeficiente de x^n en (2.7), como queríamos demostrar.

La sucesión de Fibonacci

A principios del siglo XIII, el matemático italiano Leonardo de Pisa (1175-1250), llamado Fibonacci, estudió la sucesión 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ..., que se puede definir recursivamente por:

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, \quad n \geq 0, \quad a_0 = 0, a_1 = 1 \quad (2.10)$$

Abraham DeMoivre en 1718, obtuvo la expresión general en función de a_n como:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right] \quad (2.11)$$

a partir de la función generadora:

$$f(x) = \frac{x}{1 - x - x^2} \quad (2.12)$$

Veamos cómo obtener la expresión (2.12). Sabemos que debe ser

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Entonces, multiplicando por x^n y sumando sobre n en (2.10) llegamos a:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (2.13)$$

Como $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ el miembro izquierdo de (2.13) es:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2} x^n = \frac{x^2}{x^2} (a_2 + a_3 x + a_4 x^2 + \dots) = \frac{f(x) - x}{x^2} \quad (2.14)$$

y el miembro derecho de (2.13) es

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \frac{f(x)}{x} + f(x) \quad (2.15)$$

Igualando (2.14) y (2.15) y operando obtenemos (2.12).

Para obtener la expresión de a_n debemos desarrollar (2.12). Las raíces reales de $1 - x - x^2$ son $r_1 = \frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}$ y $r_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}$ de manera que

$$f(x) = \frac{x}{1 - x - x^2} = \frac{x}{(x - r_1)(x - r_2)} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} r_1^n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} r_2^n x^n \right)$$

y llegamos a (2.11).

De estos cálculos puede encargarse el programa *Mathematica*. Se carga primero el paquete `RSolve`:

```
<< DiscreteMath'RSolve'
```

```
GeneratingFunction[{a[n]==a[n-1]+a[n-2],a[0]==0, a[1]==1,a[n], n,z}
```

```
{{-x/(-1+x+x^2)} }
```

```
RSolve[{a[0]==0, a[1]==1,a[n]==a[n-1]+a[n-2]}, a[n], n]
```

```
{a[n]->-1/sqrt(5)*(1/2-sqrt(5)/2)^n-(1/2+sqrt(5)/2)^n}
```

(La versión 4.0 nos da ya simplificada la fórmula).

La función generadora de los enteros no negativos

Llamemos D_x al operador derivación respecto de x en $\mathbb{C}[[x]]$, entonces:

$$D_x \left(\frac{1}{1-x} \right) = \frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \dots$$

por lo que $\frac{x}{(1-x)^2}$. O bien, la solución informatizada:

```
PowerSum[n,{x,n}]
```

```
x/(-1+x)^2
```

Suma de las potencias k -ésimas de los primeros números naturales

Fijados números naturales k, N , es útil saber que:

$$f(N, k) = \sum_{i=1}^N i^k \quad (2.16)$$

es siempre un polinomio mónico en N de grado $k + 1$. En efecto, vemos que

$$\sum_{i=1}^N i^k = \sum_{i=0}^{N-1} (N - i)^k$$

es una suma de N polinomios en N de grado k , cada uno de ellos de la forma $N^k +$ (términos de grado $< k$).

Definimos la función (2.16) en Mathematica:

```
f[n_,k_] := Sum[i^k, {i, n}]
```

```
t[k_] := Table[f[n,k-], {n, k + 2}]
```

Para un k fijo, construimos la tabla de los sucesivos valores $f(1, k), f(2, k), \dots, f(k + 2, k)$ y a partir de esta tabla el polinomio interpolador:

```
suma[k_] := Simplify[InterpolatingPolynomial[t[k], N]]
```

Por ejemplo

```
suma[5]
```

$$\frac{1}{12}N^2(1+N)^2(-1+2N+2N^2)$$

nos dá la fórmula para la suma de las potencias quintas de los primeros N números naturales.

2.3 Particiones, diagramas de Ferrer y teoremas de Euler

Particiones no ordenadas

En teoría de números y de representaciones de grupos finitos aparece el problema de partir un entero positivo n en sumandos positivos y buscar el número de dichas particiones. Este número se representa por $p(n)$. El término *no ordenada* se utiliza porque $p(n)$ cuenta el número de sucesiones no crecientes (o no decrecientes según se convenga) de enteros no negativos tal que la suma de sus elementos es n , es decir, dos descomposiciones se consideran iguales si difieren en el orden de los sumandos, distinto al calculado en el ejemplo del modelo de los bosones.

Por ejemplo

$$p(0) = 1 \quad : \quad (\text{convención})$$

$$p(1) = 1 \quad : \quad 1 = 1$$

$$p(2) = 2 \quad : \quad 2 = 2 + 0 = 1 + 1$$

$$p(3) = 3 \quad : \quad 3 = 3 + 0 = 2 + 1 = 1 + 1 + 1$$

$$p(4) = 7 \quad : \quad 4 = 4 + 0 = 3 + 1 = 2 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1$$

Definimos además:

$p(n, k)$ = número de particiones de n como suma de elementos de $\{1, 2, \dots, k\}$.

Definimos también $p(0, k) = 1$. Observemos que $p(n, n) = 1$.

Es inmediata la siguiente relación de recurrencia:

$$p(n, k) = p(n, k-1) + p(n-k, k) \quad (2.17)$$

En efecto, el número de particiones en las que k no se utiliza como sumando es $p(n, k-1)$, y por otro lado, el número de particiones en las que k aparece como sumando es $p(n-k, k)$.

También definimos:

$p_d(n, k)$ = número de particiones de n como suma de enteros *distintos* del conjunto $\{1, 2, \dots, k\}$

Vale la siguiente relación de recurrencia

$$p_d(n, k) = p_d(n, k-1) + p_d(n-k, k-1) \quad (2.18)$$

ya que k no puede ser usado dos veces como sumando.

Aquí, $p_d(1, 1) = 1$ y $p_d(n, 1) = 0$ si $n > 1$. Además, $p_d(n, n) = p_d(n)$ es número de particiones de n en sumandos distintos.

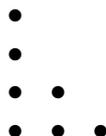
Usando las ecuaciones de recurrencia para $p(n, k)$ podemos escribir:

$$p(n, k) = p(n, k-1) + p(n-k, k-1) + p(n-2k, k-1) + \dots$$

Luego, es suficiente observar que $p(n, 1) = 1$ y se calculan, $p(n, 2)$, después $p(n, 3)$ utilizando recurrencia.

Diagramas de Ferrer

Podemos representar una partición de n por medio de un *diagrama de Ferrer*, el cual es una matriz de puntos, con tantas filas como sumandos no nulos tiene la partición, y en cada fila hay tantos puntos como el valor del sumando. Por ejemplo:

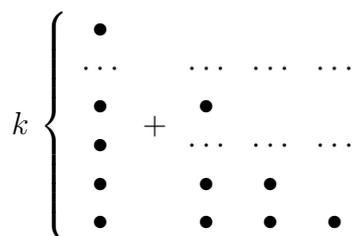


es el diagrama correspondiente a la partición de $7 = 1 + 1 + 2 + 3$. Como el orden de los sumandos no cuenta, el diagrama puede disponerse de manera que las filas están en orden no decreciente de sus longitudes yendo de arriba hacia abajo. Además, los primeros puntos de cada fila se disponen en una misma columna. Un diagrama de Ferrer dispuesto así se denomina *normal*.

Usando estos diagramas, pueden probarse muchas propiedades de las particiones. Por ejemplo:

Proposición 2.2 *El número de particiones de n en no más de k sumandos, coincide con el número de particiones de $n + k$ en exactamente k sumandos.*

Demostración: En efecto, el diagrama normal de Ferrer que representa una partición de n en no más de k sumandos, es una matriz de n puntos con no más de k filas. Agreguemos a este diagrama, una columna al principio con k puntos.

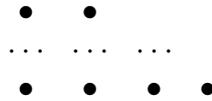


Obtenemos un diagrama con $n + k$ puntos ubicados en exactamente k filas, lo que representa una partición de $n + k$ con exactamente k sumandos. Recíprocamente, dado un diagrama de Ferrer de este tipo, es decir, con $n + k$ puntos ubicados en exactamente k filas, si le quitamos la primera columna, tenemos un diagrama con n puntos ubicados en no más de k filas, lo que representa una partición de n en no más de k sumandos. Esta correspondencia entre los dos tipos de diagramas es claramente biyectiva. C.Q.D.

El siguiente es un teorema de Euler.

Teorema 2.3 (De Euler) *El número de particiones de n en no más de k sumandos coincide con el número de particiones de $n + \frac{1}{2}k(k+1)$ en exactamente k sumandos distintos.*

Demostración. El diagrama normal de Ferrer que representa una partición de n en no más de k sumandos, es una matriz de n puntos con no más de k filas.



Agreguemos a este diagrama desde la izquierda, un triángulo rectángulo isósceles formado por k filas (y reducimos todo a la forma normal pegando a partir de las últimas filas):



Como el número de puntos en el triángulo agregado es $\frac{1}{2}k(k+1)$, obtenemos un diagrama formado por $n + \frac{1}{2}k(k+1)$ puntos, con exactamente k filas. Además, todas las filas en este nuevo diagrama son de distinta longitud, ya que la longitud de las filas del diagrama original no disminuyen yendo hacia abajo, y las longitudes de las filas del triángulo aumentan en 1 yendo en la misma dirección. Pero entonces, este diagrama representa una partición de $n + \frac{1}{2}k(k+1)$ en exactamente k sumandos distintos. Recíprocamente, si de un diagrama formado por $n + \frac{1}{2}k(k+1)$ puntos, con exactamente k filas, todas distintas, se quita un triángulo rectángulo isósceles, con k filas, entonces llegamos a un diagrama que representa una partición de n en a lo sumo k sumandos. C.Q.D.

Diagramas de Ferrer duales

Dado un diagrama de Ferrer, podemos “trasponerlo”, es decir, lo rotamos 90° y lo reducimos a la forma normal. Entonces las filas se transforman en columnas y las columnas en filas, por lo que podemos suponer que es una suerte de trasposición. Dado un diagrama, el obtenido por esta operación se llama su *dual* o *traspuesto*. Evidentemente, la dualización es una transformación que es su propia inversa. Así, los diagramas de Ferrer de particiones de un n dado se pueden agrupar de a pares,

uno y su dual. Naturalmente hay diagramas que coinciden con su dual, es decir, son *autoduales*. Veamos algunas aplicaciones de la dualidad.

Proposición 2.4 $p(n, k)$ es exactamente el número de particiones de n en no más de k sumandos.

Demostración. En efecto, un diagrama de Ferrer representando una partición de n con elementos de $\{1, \dots, k\}$, está formado por n puntos, de forma que en cada fila no hay más de k puntos. Pero entonces su diagrama dual tiene a lo sumo n filas, es decir corresponde a una partición de n en no más de k sumandos. C.Q.D.

Las siguientes proposiciones de demuestran bastante fácilmente usando propiedades de dualización.

Proposición 2.5 El número de particiones de n en exactamente k sumandos coincide con el número de particiones de n con elementos de $\{1, \dots, k\}$ en las que aparece k al menos una vez.

Proposición 2.6 El número de particiones de n en sumandos pares coincide con el número de particiones de n en las cuales, cada número aparece con multiplicidad par.

Proposición 2.7 El número de particiones de n en sumandos impares coincide con el número de particiones de n en las cuales, cada número con excepción del mayor, aparece con multiplicidad par, y el mayor aparece con multiplicidad impar.

La fórmula de Euler

Se desea obtener $p(n)$ para un n dado, sin tener que listar todas las particiones. Necesitamos una herramienta para estar informados sobre el número de unos, doses, ..., n , utilizados para escribir n . Ahora, las series:

$$1 + z + z^2 + \dots, 1 + z^2 + z^4 + \dots, \dots, 1 + z^{2k} + z^{3k} + \dots$$

llevan la cuenta de los 1's, 2's, ..., k s, etc, por lo que $p(n)$ es el coeficiente de z^n en el producto de estas series, es decir:

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n) z^n = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(1 - z^i)}$$

Equivalentemente:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} p(n) z^n \right) \left(\prod_{i=1}^{\infty} (1 - z^i) \right) = 1$$

Precisamente, Leonard Euler (1707-1783) descubrió la ley que rige los coeficientes de z^n en el desarrollo infinito:

$$\prod_{i=1}^{\infty} (1 - z^i)$$

Teorema 2.8 (De Euler) *En el desarrollo:*

$$\prod_{i=1}^{\infty} (1 - z^i) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

el coeficiente a_n es no nulo, sólo para n de la forma $n = \frac{3k^2 \pm k}{2}$ con $k \in \mathbb{N}$, y en este caso $a_n = (-1)^k$.

Demostración. Vamos a estudiar los desarrollos del tipo:

$$f_n(z) = \prod_{i=1}^n (1 - z^i)$$

Primero vemos que para cada par de naturales n y r se verifica

$$f_{n+r}(z) = f_n(z) \prod_{i=n+1}^{n+r} (1 - z^i) = f_n(z) (1 + z^{n+1}g(z)) = f_n(z) - z^{n+1}f_n(z)g(z)$$

lo que muestra que el coeficiente de z^n en $f_{n+r}(z)$ y $f_n(z)$ son los mismos, por lo que para obtener los coeficiente de z^k para $k \leq n$ basta desarrollar $f_n(z)$.

Por ejemplo, para $n = 10$,

$$\prod_{i=1}^{10} (1 - z^i)$$

$$= z^{55} - z^{54} - z^{53} + z^{50} + z^{48} + z^{44} - z^{43} - z^{42} - z^{41} - 2z^{40} + z^{37} + z^{36} + z^{35} + z^{34}$$

$$+ 3z^{33} - z^{30} - z^{29} - 2z^{28} - 2z^{27} - z^{26} - z^{25} + 3z^{22} + z^{21} + z^{20} + z^{19} + z^{18}$$

$$- 2z^{15} - z^{14} - z^{13} - z^{12} + z^{11} + z^7 + z^5 - z^2 - z + 1$$

El coeficiente de z^{10} es cero (vemos que hay muchos coeficientes iguales a cero). Observemos que no podemos asegurar que el coeficiente de z^{11} es 1.

El término $a_n z^n$ del producto $f_n(z)$ es suma de productos de la forma:

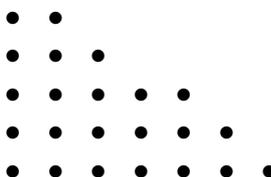
$$(-z^{i_1}) (-z^{i_2}) \cdots (-z^{i_s})$$

con $i_1 + \cdots + i_s = n$. Además, observemos que los sumandos son todos distintos, ya que provienen de multiplicar factores del tipo $(1 - z^i)$. Y estas sumas recorren todas las posibles particiones de n en suma de elementos distintos, aportando 1 cuando el número de sumandos es par, y -1 cuando el número de sumandos es impar. Esto muestra que el coeficiente a_n se obtiene como la diferencia entre el número $p_d^0(n)$ de particiones de n en una cantidad par de sumandos distintos y el número $p_d^1(n)$ de particiones de n en una cantidad impar de sumandos distintos.

Para demostrar el teorema, vamos a probar que si n no es de la forma $n = \frac{3k^2 \pm k}{2}$, con $k \in \mathbb{N}$, entonces $p_d^0(n) = p_d^1(n)$, y si n es de la forma anterior, entonces $p_d^0(n) - p_d^1(n) = (-1)^k$. Es decir, si k es par $p_d^0(n)$ supera en 1 a $p_d^1(n)$ y si k es impar, entonces $p_d^1(n)$ supera en 1 a $p_d^0(n)$.

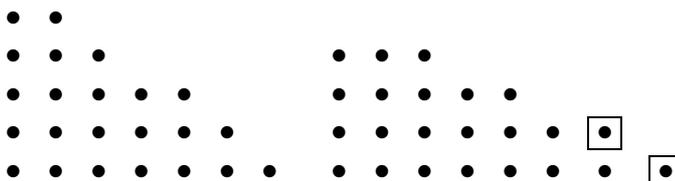
Ahora describimos un método para transformar un diagrama de Ferrer con un número par de filas en uno con un número impar de filas y viceversa.

Como consideramos solamente diagramas con filas todas distintas, este diagrama estará formado por trapecios ubicados uno sobre otro:



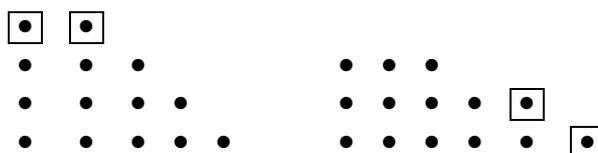
Designemos con k el número puntos de la primera fila del diagrama, y con m el número de filas del trapecio inferior. Por ejemplo, en el diagrama anterior es $k = 2$ y $m = 3$.

Supongamos primero que el diagrama tiene al menos dos trapecios, y que además, es $k \leq m$. En este caso, eliminamos la primera fila del diagrama y prolongamos las últimas k filas del trapecio inferior con un punto.

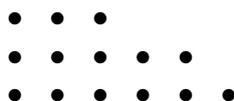


Entonces el número de puntos del diagrama obtenido es el mismo que el del diagrama original, pero la paridad del número de filas ha cambiado. Es claro que esta operación puede realizarse con el primer trapecio de arriba y cualquiera que se halle más abajo que satisfaga la condición.

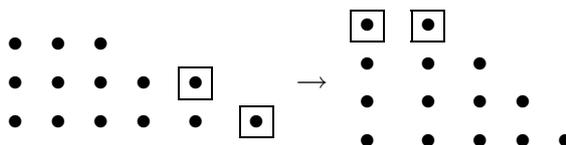
Se puede realizar exactamente la misma transformación si el diagrama es un trapecio y $k \leq m - 1$



Ahora supongamos que el diagrama tiene al menos dos trapecios y que no hay ninguno distinto del primero que verifique $k \leq m$. Entonces para cualquier trapecio que no es el primero debe ser $k > m$.

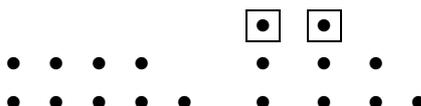


Tomemos uno de ellos, y elegimos un punto en cada fila de este trapecio y formemos con estos la primera fila de un diagrama, y las restantes filas son las del diagrama original. Esto se puede hacer pues es $k > m$



De nuevo vemos que el diagrama obtenido tiene sus filas todas distintas, pues hemos sacado puntos de filas del trapecio inferior. Además, este diagrama tiene la misma cantidad de puntos que el diagrama original, pero una fila más, por lo que la paridad del número de filas ha variado.

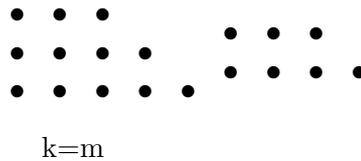
También podemos realizar este tipo de transformaciones a un diagrama que es un trapecio y $m \leq k - 2$



Es fácil verificar que las transformaciones descritas son inversas entre sí: compuestas de las dos maneras dan la identidad.

De esto se deduce que para los diagramas con las condiciones anteriores, es decir que no sean un sólo trapecio o si siendo un sólo trapecio verifican $k \leq m - 1$ ó $m \leq k - 2$, existe una biyección entre los que representan una partición de n en un número par de sumandos distintos y los que representan una partición de n en un número impar de sumandos distintos. Entonces para los n que tengan estos diagramas debe verificarse $p_d^0(n) = p_d^1(n)$.

Queda por establecer cuáles diagramas no admiten tales transformaciones. Está claro que deben ser un sólo trapecio y que no verifique la condición $k \leq m - 1$ ni la condición $m \leq k - 2$, esto es, debe ser $k > m - 1$ y $m > k - 2$, lo que significa $k - 2 < m < k + 1$, por lo que debe ser $m = k - 1$ o $m = k$, lo que nos dá dos tipos de trapecio, por ejemplo:



En general, para un trapecio de $k \times m$, es decir k puntos en la primera fila y m filas, el número de puntos que hay en este trapecio es:

$$k + (k + 1) + (k + 2) + \dots + (k + (m - 1)) = \sum_{i=0}^{m-1} (k + i) = \frac{1}{2}m(2k + m - 1)$$

Entonces, si $k = m$ llegamos a $n = \frac{1}{2}(3k^2 - k)$. Si $m = k - 1$ tenemos

$$n = \frac{1}{2}m(2(m + 1) + m - 1) = \frac{1}{2}(3m^2 + m)$$

Observar que estamos escribiendo n en función del número de filas del trapecio.

Si x e y son enteros positivos entonces

$$3x^2 + x = 3y^2 - y \quad \Rightarrow \quad (x + y)(3(x - y) + 1) = 0$$

pero esta identidad no tiene solución en enteros positivos, lo que muestra que existe a lo más un k tal que $n = \frac{1}{2}(3k^2 \pm k)$. Entonces, si n es de esta forma y k es par,

tenemos una partición de n en un número par de sumandos distintos, y un único diagrama que no admite correspondiente, por lo que $p_d^0(n) - p_d^1(n) = 1 = (-1)^k$, y si k es impar, será $p_d^0(n) - p_d^1(n) = -1 = (-1)^k$.

Los números pentagonales

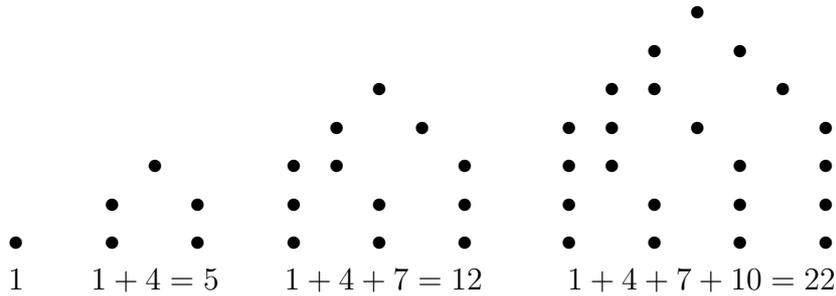
Si calculamos $\frac{1}{2}(3k^2 \pm k)$ para $k = 1, \dots, 10$ tenemos

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\frac{1}{2}(3k^2 - k)$	1	5	12	22	35	51	70	92	117	145
$\frac{1}{2}(3k^2 + k)$	2	7	15	26	40	57	77	100	126	155

Como puede comprobarse fácilmente, los números de la forma:

$$\omega(k) = \frac{1}{2}(3k^2 - k)$$

resultan ser las sumas parciales de la progresión aritmética $1, 4, 7, 10, \dots, 3n+1, \dots$ y se llaman *números pentagonales*, nombre que queda explicado por la figura siguiente:



Además

$$\omega(-k) = \frac{1}{2}(3k^2 + k)$$

Por el teorema de Euler, con esta notación, podemos escribir

$$\prod_{i=1}^{\infty} (1 - z^i) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (z^{\omega(n)} + z^{\omega(-n)}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n z^{\omega(n)}$$

Fórmula recursiva de Euler para $p(n)$

Teorema 2.9 (De Euler) Si definimos $p(0) = 1$ y $p(n) = 0$ para $n < 0$. Entonces, para $n \geq 1$ tenemos:

$$p(n) - p(n - 1) - p(n - 2) + p(n - 5) + p(n - 7) - p(n - 12) - p(n - 15) + \dots = 0$$

Es decir,

$$p(n) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} (p(n - \omega(k)) + p(n - \omega(-k)))$$

Demostración. Sabemos que:

$$f(z) = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(1 - z^i)} = \sum_{n=0}^{\infty} p(n) z^n$$

es la función generadora de $p(n)$. Entonces, usando el Teorema anterior

$$\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (z^{\omega(n)} + z^{\omega(-n)}) \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} p(n) z^n \right) = 1$$

Si $n \geq 1$, el coeficiente de la derecha es cero. Igualando coeficientes obtenemos el resultado. C.Q.D.

Damos ahora algunos valores de $p(n)$

n	1	10	20	30	40	50	100	200
$p(n)$	1	42	627	5604	37338	204226	190569292	3972999029300

Estos ejemplos muestran que $p(n)$ crece muy rápidamente con n . Hay una estimación asintótica de Rademacher

$$p(n) \sim \frac{e^{K\sqrt{n}}}{4n\sqrt{3}} \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty$$

donde $K = \pi(2/3)^{1/2}$. La demostración de esta estimación no es elemental, y corresponde a la teoría analítica de números. Luego la función $e^{K\sqrt{n}}$ es una cota superior para $p(n)$.

2.4 Apéndice

El anillo de Series Formales $\mathbb{C}[[z]]$

Sean \mathbb{N}_0 el conjunto de enteros no negativos, \mathbb{C} el cuerpo de los números complejos. Consideremos el conjunto:

$$\mathbb{C}^{\mathbb{N}_0} := \{(a_0, a_1, \dots) : a_i \in \mathbb{C} \text{ para todo } i \in \mathbb{N}_0\}$$

de todas las sucesiones $\mathbf{a} : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{C}$ a valores complejos. En este conjunto de sucesiones introducimos las operaciones de adición, multiplicación por un escalar y multiplicación como sigue:

$$(a_0, a_1, \dots) + (b_0, b_1, \dots) := (a_0 + b_0, a_1 + b_1, \dots)$$

$$w(a_0, a_1, \dots) = (wa_0, wa_1, \dots) \quad w \in \mathbb{C}$$

$$(a_0, a_1, \dots)(b_0, b_1, \dots) := (c_0, c_1, \dots) \text{ con } c_n := \sum_{i=0}^n a_i b_{n-i}$$

Con estas definiciones, es fácil ver que $\mathbb{C}^{\mathbb{N}_0}$ es un \mathbb{C} -espacio vectorial (de dimensión infinita) y un anillo conmutativo con neutro $\mathbf{0} = (0, 0, \dots)$ para la adición y neutro $\mathbf{1} = (1, 0, 0, \dots)$ para el producto. Además, para cada $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \dots)$ su opuesto aditivo es $-\mathbf{a} = (-a_0, -a_1, \dots)$.

La similitud de la definición del producto de sucesiones con el producto de polinomios no es casual, porque hagamos $z := (0, 1, 0, 0, \dots)$, entonces $z^n = (0, \dots, 0, 1, 0, 0, \dots)$ es la sucesión con un 1 en el lugar n . Así, formalmente tenemos para cada $\mathbf{a} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}_0}$:

$$\mathbf{a} = (a_0, a_1, \dots) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n =: a(z)$$

Diremos que $a(z)$ es una serie formal en z , y que a_n es el coeficiente de z^n en $a(z)$. Notaremos este anillo con $\mathbb{C}[[z]]$. Se llama el anillo de series de potencias formales. Es decir $\mathbb{C}[[z]]$ es una \mathbb{C} -álgebra lineal. Observemos que el álgebra $\mathbb{C}[z]$ de polinomios en z con coeficientes en \mathbb{C} es una subálgebra de $\mathbb{C}[[z]]$. Podemos identificar $\mathbb{C}[z]$ con el subconjunto de sucesiones en $\mathbb{C}^{\mathbb{N}_0}$ que son nulas desde un n en adelante. En particular \mathbb{C} se identifica con el subcuerpo de $\mathbb{C}[[z]]$ de los elementos de la forma $(a, 0, 0, \dots)$ $a \in \mathbb{C}$ y podemos identificar la identidad $\mathbf{1} = (1, 0, 0, \dots)$ con el $1 \in \mathbb{C}$.

El inverso de $1 - z$

Sea $f := (1, 1, 1, \dots)$. Como $1 - z = (1, -1, 0, \dots)$, usando la definición de producto hallamos que

$$(1 - z)f = (1, -1, 0, \dots)(1, 1, 1, \dots) = (1, 0, 0, \dots) = 1$$

Esto muestra que $1 - z$ es inversible en $\mathbb{C}[[z]]$ y que:

$$1 - z = \frac{1}{1 - z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

Elementos inversibles en $\mathbb{C}[[z]]$

Proposición 2.10 *El elemento: $a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ es inversible en $\mathbb{C}[[z]]$ si, y sólo si, $a_0 \neq 0$*

Demostración. Si $a_0 = 0$, el coeficiente c_0 de $a(z)b(z)$ es 0, y no puede verificarse $a(z)b(z) = 1$ para ningún $b(z)$. Recíprocamente, si $a_0 \neq 0$ es posible definir $b(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ tal que $a(z)b(z) = 1$ calculando inductivamente los coeficientes b_n . C.Q.D.

La topología m-ádica

Definimos $\mathfrak{m} = \{a(z) : a_0 = 0\}$. Claramente \mathfrak{m} es un ideal maximal de $\mathbb{C}[[z]]$, ya que $\mathbb{C}[[z]]/\mathfrak{m} \simeq \mathbb{C}$. En realidad, \mathfrak{m} es el único ideal maximal de $\mathbb{C}[[z]]$, lo que se expresa diciendo que $\mathbb{C}[[z]]$ es un *anillo local*. Para cada $n \geq 1$ definimos $\mathfrak{m}^n = \{a(z)^n : a(z) \in \mathfrak{m}\}$. Entonces \mathfrak{m}^n es el ideal de todas las series formales que son divisibles por z^n y tenemos la cadena decreciente de ideales $\mathfrak{m} \supset \mathfrak{m}^2 \supset \dots \supset \mathfrak{m}^n \dots$. Si se define la familia de entornos de 0 como la familia $\{\mathfrak{m}^n : n \geq 1\}$, entonces $\mathbb{C}[[z]]$ es un anillo topológico y dada la sucesión $a_n(z)$ se dice que $a_n(z)$ converge en $\mathbb{C}[[z]]$ a la serie $b(z)$ si para cada $m \geq 1$ existe un $N_m \geq 1$ tal que $n \geq N_m \Rightarrow a_n(z) - b(z) \in \mathfrak{m}^m$. Es decir, $a_n(z)$ converge a la serie $b(z)$ en $\mathbb{C}[[z]]$, si para cada m , desde un N_m en adelante, coinciden los primeros m términos de $a_n(z)$ y $b(z)$. Si $a_n(z)$ converge a la serie $b(z)$ escribiremos también $b(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n(z)$ en $\mathbb{C}[[z]]$.

Por ejemplo, la sucesión z^n converge a 0 en $\mathbb{C}[[z]]$, y la sucesión $a_n = 1 + z + z^2 + \dots + z^n$ converge $(1 - z)^{-1}$ en $\mathbb{C}[[z]]$

Una sucesión $a_n(z)$ se dice *de Cauchy* si para cada $m \geq 1$ existe un $N \geq 1$ tal que $n, h \geq N \Rightarrow a_n(z) - a_h(z) \in \mathfrak{m}^n$.

También es posible probar que $\mathbb{C}[[z]]$ es un anillo topológico completo, es decir, toda sucesión de Cauchy converge. De hecho, $\mathbb{C}[[z]]$ es el completado del anillo de polinomios $\mathbb{C}[z]$, si en este anillo definimos la topología \mathfrak{m}' -ádica, donde $\mathfrak{m}' = \mathfrak{m} \cap \mathbb{C}[z]$ es el ideal de los polinomios divisibles por z . La noción de convergencia en $\mathbb{C}[[z]]$ es útil para definir recursivamente elementos de $\mathbb{C}[[z]]$ que sabemos deben verificar cierta propiedad. Veamos una aplicación de esto.

Definición del producto infinito $\prod_{i=1}^{\infty} (1 - z^i)$ en $\mathbb{C}[[z]]$

Primero vemos que para cada n se verifica:

$$f_{n+1}(z) = \prod_{i=1}^{n+1} (1 - z^i) = f_n(z) (1 - z^{n+1}) = f_n(z) - z^{n+1} f_n(z)$$

Luego, $f_{n+1}(z) - f_n(z) \in \mathfrak{m}^{n+1}$ y para todo $k \geq 1$:

$$\begin{aligned} f_{n+k}(z) - f_n(z) &= (f_{n+k}(z) - f_{n+k-1}(z)) + (f_{n+k-1}(z) - f_{n+k-2}(z)) + \cdots \\ &+ (f_{n+1}(z) - f_n(z)) \in \mathfrak{m}^{n+1} \end{aligned}$$

Esto muestra que $f_n(z)$ es una sucesión de Cauchy, y como $\mathbb{C}[[z]]$ es completo, podemos definir:

$$\prod_{i=1}^{\infty} (1 - z^i) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) \text{ en } \mathbb{C}[[z]]$$

Bibliografía

- [1] J.H. van Lint and R. M. Wilson, A Course in Combinatorics, Cambridge Univ. Press, 1992.
- [2] M. Petkovsek, H. Wilf and D. Zeilberger, A=B, A K Peters, 1996.
- [3] S. Skiena, Implementing Discrete Mathematics: Combinatorics and Graph Theory with Mathematica, Addison-Wesley.
- [4] N. Vilenkin, ¿De cuántas formas?, MIR, 1972.
- [5] H.S. Wilf, Generatingfunctionology, Academic Press, 1994.
- [6] S. Wolfram, Mathematica, Addison-Wesley, 1991.