Los precursores de la geometría no euclideana

por

Santiago Fernández Fernández, Berritzegune de Bilbao

Empecemos por el principio...

Euclides (fl. 300 a.C.) Se sabe poco de la vida de este genial matemático griego. Probablemente estudió en Atenas con discípulos de Platón, posteriormente enseñó geometría en Alejandría (Alejandría fue punto de encuentro de griegos, judíos y árabes, allí se conservó lo mejor del pensamiento heleno). A su universidad, se dice que con más de 700.000 documentos, fue llamado Euclides por Ptolomeo I Sóter, el Grande, (sucesor de Alejandro) y durante más de 20 años, ejerció la labor docente y científica. Euclides es un prolífico escritor, a él se le atribuyen una serie de libros: Los *"Cálculos"* (una colección de teoremas geométricos), los *"Fenómenos"* (una descripción del firmamento), la *"Optica"*, la *"División del canon"* (un estudio matemático de la música), *"Porismas"*, *"La sección cónica"*, *"Libro de Falacias"*,... y el más importante

Retrato de Euclides

"Los Elementos", que es un extenso tratado de matemáticas en 13 volúmenes sobre materias tales como geometría plana y del espacio, proporciones en general, propiedades de los números, magnitudes inconmensurables. Sin embargo, en la actualidad, la mayoría de los historiadores cree que alguna de las obras, excepto *los Elementos*, se le han adjudicado a Euclides erróneamente. Los historiadores también cuestionan la originalidad de algunas de sus aportaciones, en particular las secciones geométricas de *los Elementos* ya fueron planteadas por matemáticos anteriores, como Eudoxo, sin embargo, se considera que Euclides hizo diversos descubrimientos en la teoría de números.

1. Los Elementos

Los Elementos se dividen en 13 libros.

Los seis primeros son sobre la **Geometría Plana**.

Los libros 7 ,8 y 9 tratan sobre la **Teoría elemental del números**.

El libro 10 trata de la teoría de Eudoxo de los números irracionales.

Los libros 11,12 y 13 los dedica al estudio de la **Geometría del espacio**.

En un primer acercamiento, se puede decir que Los Elementos de Euclides son notables por la claridad con que las proposiciones son demostradas y presentadas. A este respecto escribió **Proclo**:

"Son singularmente admirables sus Elementos de Geometría (de Euclides) por el orden que reina en ellos, la selección de los teoremas y problemas tomados como elementos y también la variedad de los razonamientos desarrollados de todas las maneras y que conducen a la convicción"

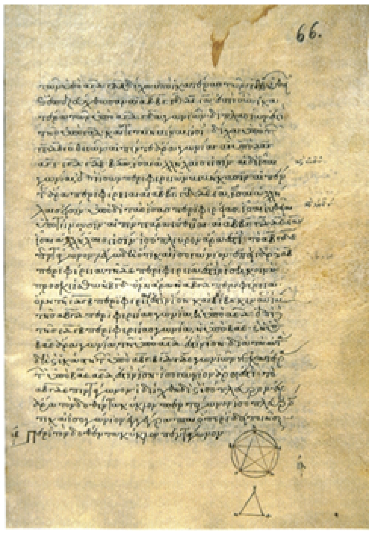
y más adelante expresa:

"Los Elementos son una guía segura y completa para la consideración científica de los objetos geométricos".

Buena parte de Los Elementos de Euclides se ha utilizado como libro de texto durante 2.000 años. La primera edición impresa de las obras de Euclides apareció en Venecia en 1482, fue una traducción del árabe al latín.

Manuscrito griego, correspondiente a los Elementos, del siglo XI-XII.

(Al final del texto se puede observar el famoso símbolo pitagórico, correspondiente al polígono estrellado de cinco puntas)



Libro I Teoremas relativos a congruencias, rectas paralelas. 23 definiciones; 5 postulados; 9 nociones comunes; 48 proposiciones (las p. 47 y 48 son el teorema de Pitágoras).

Libro II Aritmética de la Escuela Pitagórica. 2 definiciones; 14 proposiciones.

Libro III Círculos, cuerdas,... 11 definiciones; 37 proposiciones.

Libro IV Construcciones con regla y compás. 7 definiciones; 16 proposiciones.

Libro V Teoría de la proporción. 18 definiciones; 25 proposiciones.

Libro VI Estudio de figuras semejantes. 4 definiciones; 33 proposiciones.

Libro VII Teoría de números. 22 definiciones; 39 proposiciones. (la p. I es el algoritmo de Euclides).

Libro VIII Teoría de números. 27 proposiciones.

Libro IX Teoría de números. 36 proposiciones (p. XX "el conjunto de números primos es infinito").

Libro X Magnitudes. 36 proposiciones (se establece el método de exhaución).

Libro XI Geometría de sólidos y esfera. 39 proposiciones.

Opus elementorum euclidis ... Venecia 1482.
Página inicial de la primera edición de Los Elementos debida al impresor Erhard Ratdolt.

Libro XII Geometría de sólidos y esfera. 18 proposiciones.

Libro XIII Geometría del espacio y sólidos platónicos. 18 proposiciones.

1.1. Estructura de "Los Elementos"

Para realizar este tratado, al comienzo de cada uno de los libros que componen los Elementos, Euclides presenta unas **definiciones** y unas **nociones comunes (o axiomas)** relativas a los temas desarrollados, y además en el Libro I expone sus famosos **cinco postulados** en los que basa la construcción axiomática.

Las **definiciones** básicas que se proponen en el primero de los libros son 23, redactadas de la manera siguiente:

1. Un punto es aquello que no tiene partes.
2. Una línea es la longitud sin anchura.
3. Las fronteras (los extremos) de una línea son puntos.
4. La recta es aquella línea que se halla igualmente dispuesta con respecto a todos sus puntos.
5. La superficie es lo que posee únicamente longitud y anchura.
6. Las fronteras de una superficie son líneas.

...

15. Círculo es una figura plana limitada por una sola línea que se llama periferia, respecto a la cual son iguales las rectas que inciden sobre ella trazadas desde uno de los puntos situados en el interior de la figura.
16. Ese punto interior se llama centro del círculo.

...

23. **Rectas paralelas son las que, estando en un mismo plano y prolongadas al infinito, no se encuentran.**

Unas **verdades** o **nociones comunes** consideradas como universales, y no referentes a los objetos básicos geométricos, sino tautologías por sí mismas.

1. **Dos cosas iguales separadamente a una tercera son iguales entre sí.**
2. **Si a cosas iguales le agregamos iguales, obtenemos iguales.**

3. **Si de iguales quitamos iguales, obtenemos iguales.**
4. Si a desiguales agregamos iguales, obtenemos desiguales.
5. Si duplicamos iguales obtenemos iguales.
6. Las mitades de iguales son iguales entre sí.
7. **Las cosas que se pueden superponer son iguales.**
8. **El todo es mayor que una parte.**
9. Dos rectas no encierran espacio.

La edición crítica de Heiberg, recoge únicamente cinco nociones comunes, que son las resaltadas en la lista anterior.

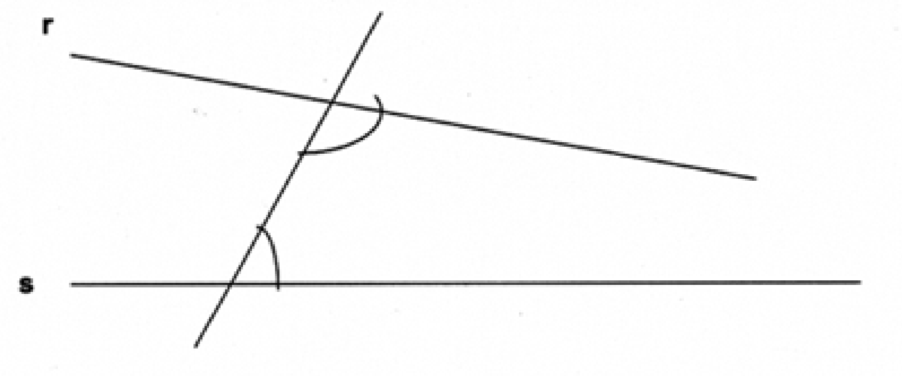
Unas afirmaciones o **postulados** relativos a los objetos básicos. Son las **verdades iniciales** del sistema. Los postulados permiten efectuar ciertas construcciones geométricas: unir puntos mediante líneas rectas, trazar círculos, etc.

Unas **proposiciones** que se deducen a partir de los postulados, del razonamiento lógico y de otras verdades anteriores. Estas proposiciones constituyen los teoremas del sistema axiomático.

Los **postulados** son los siguientes:

1. **Postúlese el trazar una recta desde un punto cualquiera hasta un punto cualquiera.**
2. **Y el prolongar continuamente una recta finita en línea recta.**
3. **Y el describir cualquier círculo con cualquier centro y distancia.**
4. **Y el ser todos los ángulos rectos iguales entre sí.**
5. **Y que si una recta al incidir sobre dos rectas hace los ángulos internos del mismo menores que dos rectos, las dos rectas prolongadas indefinidamente se encontrarán en el lado en el que están los (ángulos) menores que dos rectos.**

Leyendo con detenimiento los cinco postulados de Euclides, resulta evidente que el enunciado del V postulado no está en la línea de los anteriores. En principio resulta ostensiblemente más largo, en segundo lugar está redactado a manera de una proposición. No resulta extraño pensar que ya los contemporáneos de Euclides hicieran intentos serios y profundos para intentar demostrar dicho postulado utilizando exclusivamente los cuatro anteriores. Desde luego, el dibujo nos ayuda a entenderlo perfectamente.



Las rectas r y s se cortarán en un punto P.

1.2. "Fallas" en los Elementos

En honor a la verdad se puede decir que el tratado escrito por Euclides es **"casi perfecto"**, pero mirado con la lupa del rigor se pueden encontrar varias **"fallas"** que hacen tambalear ese majestuoso tratado, así:

A) **Muchos de los términos** que figuran en las definiciones **no están a su vez definidos**, tal es el caso de "frontera", "ancho", "longitud", "inclinación", etc.

B) **Varias de las 23 definiciones** que aparecen en el primer libro (pasa lo mismo con los otros 12 libros) **no son utilizadas** en las demostraciones, por tanto se podrían reducir el conjunto de definiciones sin producirse ninguna dificultad en el planteamiento general de la obra.

C) En la mayoría de las demostraciones *se utiliza la intuición geométrica* reforzada con la figura consiguiente. Por ejemplo, se supone que dos circunferencias (no tangentes) se cortan en dos puntos; que una recta que pasa por un punto interior al círculo y otro exterior al mismo corta a la circunferencia en un punto que está entre los dos anteriores.

D) En la demostración de algunas proposiciones se utilizan implícitamente postulados y axiomas que previamente no han sido definidos, se puede decir a este respecto que **la lista de los axiomas y postulados es demasiado pobre** (insuficiente).

E) Una de las "fallas" más sustanciales, y que aparece en varias demostraciones, es el **concepto de movimiento**. No está definido explícitamente y sin embargo es constantemente utilizado. De hecho en la primera proposición o teorema del primer libro, el concepto de movimiento ya es empleado. Cabe observar que, según el significado del axioma VII, la igualdad de magnitudes y figuras geométricas también se define mediante movimientos.

F) Se echan de menos unas reglas de inferencia lógica. Si bien el empleo de la lógica con sus reglas se consideraba, en tiempos de Euclides, más bien como un producto espontáneo de la matemática y no como un requisito para ella.

G) Conviene notar que la distinción, que hace Euclides, entre nociones comunes y postulados no es clara. Por ejemplo, la cuarta definición del quinto libro es equivalente al llamado "Postulado de Arquímedes".

H) Aún siendo admirable el tipo de argumentación y razonamiento empleado por Euclides se pueden encontrar algunos errores en ciertas demostraciones.

I) **Algunas definiciones no son precisas**. Así, por ejemplo la definición dada para una recta (La recta es aquella línea que se halla igualmente dispuesta con respecto a todos sus puntos) puede servir también para definir a otras muchas figuras: una espiral, una circunferencia, una hélice, etc. Es cierto que en esa época no les preocupaba excesivamente el rigor en las definiciones, el mismo Aristóteles decía al respecto: *"Los verdaderos objetos matemáticos son solamente sugeridos o iluminados mediante las figuras que se hacen"*.

En resumen podemos decir que el rigor de la lógica de Euclides se basa, en muchos casos, en intuiciones, adquiridas por el hábito de nuestras representaciones espaciales.

Como conclusión se puede afirmar que: Los Elementos de Euclides NO resuelve satisfactoriamente el problema de **fundamentar** la geometría (enumeración de un número suficiente de definiciones, axiomas y postulados que sirvan de base para una demostración rigurosa de todos y cada uno de los teoremas que aparecen). Algunas de estas dificultades ya fueron observadas por científicos de la antigüedad. El genial **Arquímedes** amplió la lista de los postulados geométricos, tratando de dar más consistencia al edificio geométrico construido por Euclides; en particular completó los aspectos relacionados con la medición de longitudes, áreas y volúmenes. A fin de fundamentar mejor la geometría métrica, Arquímedes, introdujo cinco postulados, el primero de ellos decía lo siguiente:

“Entre todas las líneas con extremos comunes la recta es la más corta.”

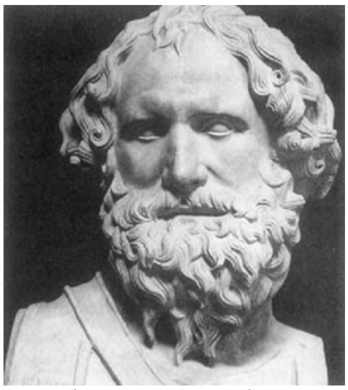
El verdaderamente importante es el quinto de sus postulados, dice:

“De dos líneas desiguales , dos superficies desiguales o dos cuerpos desiguales, la mayor resultará ser menor que la magnitud que se obtiene si se repite la menor un número adecuado de veces”

Esta afirmación se la conoce como **el postulado de Arquímedes**, y ha resultado ser de una gran importancia. En términos más modernos se la puede expresar como sigue:

“Para cualesquiera A y B, tal que $A < B$, existe un número natural N tal que $N.A > B$”

Arquímedes (287-212 a.C.) Arquímedes nació en el año 287 a.C. en Siracusa (Sicilia) que por aquel tiempo era colonia griega. En su juventud viajó por Egipto y fue por esa época cuando inventó el “tornillo sin fin”, ingenio que permitía sacar agua de los pozos y que todavía es utilizado hoy en día.
Parece que estudió en Alejandría con algunos de los discípulos de Euclides y fue en esta etapa de su vida cuando profundizó en los trabajos de sus ilustres predecesores (Eudoxo entre ellos) en Geometría.
Arquímedes fue amigo del rey Herón II de Siracusa que ejerció como su protector. En cuanto al legado matemático de Arquímedes sabemos que escribió muchos pequeños tratados, de los que bastantes de ellos han llegado hasta nosotros fundamentalmente gracias a traducciones latinas del siglo XIII en adelante. Sus obras más representativas son las siguientes: *“La cuadratura de la parábola”*, *“El método”*, *“Sobre la esfera y el*



Arquímedes de Siracusa

cilindro" (dos libros), *"Sobre espirales"*, *"La medida del círculo"*, *"El arenario"*, *"Sobre conoides y esferoides"*, etc.
En Arquímedes hay que destacar su claridad expositiva y la perfección y el ingenio en sus demostraciones, así como el uso que hizo del método de **exhaución** (predecesor de nuestros actuales métodos de integración) para encontrar las áreas y los volúmenes de muchas superficies y cuerpos y para aproximar el número pi. Actualmente se considera al genial Arquímedes como el mayor genio de la matemática greco-alejandrina, y uno de los más grandes genios de todos los tiempos.
Había más imaginación en la cabeza de Arquímedes que en la de Homero (Voltaire)

Después de Arquímedes también se continuaron los intentos por precisar los postulados de la geometría de Euclides. Sin embargo, nadie agregó nada sustancial. El rigor de sus demostraciones se consideraba en general suficiente. A finales del siglo XIX se abordó el problema de fundamentar adecuadamente la geometría, labor que concluyó satisfactoriamente el matemático alemán **David Hilbert**.

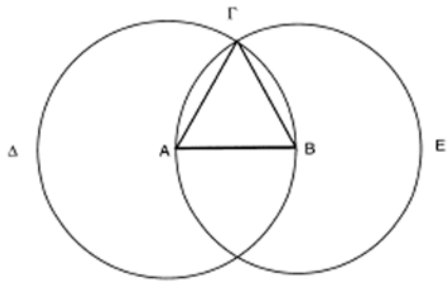
1.3. Una demostración realizada por Euclides

En el primer libro, la primera proposición dice lo siguiente:

Proposición 1. Construir un triángulo equilátero sobre una recta finita dada.

Sea AB la recta finita dada. Así pues, hay que construir sobre la recta dada un triángulo equilátero. Descríbase con el centro A y la distancia AB el círculo $B\Gamma\Delta$ [**Post. 3**], y con el centro B y la distancia BA descríbase a su vez el círculo $A\Gamma E$ [**Post. 3**], y a partir del punto donde los círculos se cortan entre sí, trácense las rectas ΓA, ΓB hasta los puntos A, B [**Post. 1**]. Y puesto que el punto A es el centro del círculo ΓB, $A\Gamma$ es igual a AB [**Def. 15**]; puesto que B es a su vez el centro del círculo ΓAE, $B\Gamma$ es igual a BA [**Def. 15**]; pero se ha demostrado que ΓA es igual a AB; por tanto, cada una de las (rectas) ΓA, ΓB es igual a AB. Ahora las cosas iguales a una misma cosa son iguales entre sí [**N.C. 1**]; por tanto, ΓA, AB, ΓB son iguales entre sí.

Por consiguiente, el triángulo $A\Gamma B$ es equilátero y ha sido construido sobre una recta finita dada AB. Que es lo que había que hacer.



Si analizamos con detalle esta demostración podemos decir:

1) Es muy elegante, se la suele presentar como el paradigma de la demostración euclidea.
2) Es de una claridad meridiana, y discurre por los pasos canónicos que Proclo identifica como: proposición, exposición, especificación, preparación, y demostración.
3) Sin embargo, Euclides, comete un grave error cuando da por supuesto que dos círculos se cortan en un punto (*...y a partir del punto* Γ *donde los círculos se cortan entre sí*). Es claramente verdad, pero en el tratado no aparece este asunto y por tanto habría que definirlo.

Es de señalar que las proposiciones 47 y 48 del primer libro versan sobre el Teorema de Pitágoras.

2. El Problema de las Paralelas

El primer libro de Euclides va demostrando una tras otra diversas proposiciones. En particular la proposición 16 del primer libro Los Elementos dice lo siguiente:

En todo triángulo, si se prolonga uno de sus lados, el ángulo externo es mayor que cada uno de los ángulos internos y opuestos.

Hace referencia a lo siguiente:

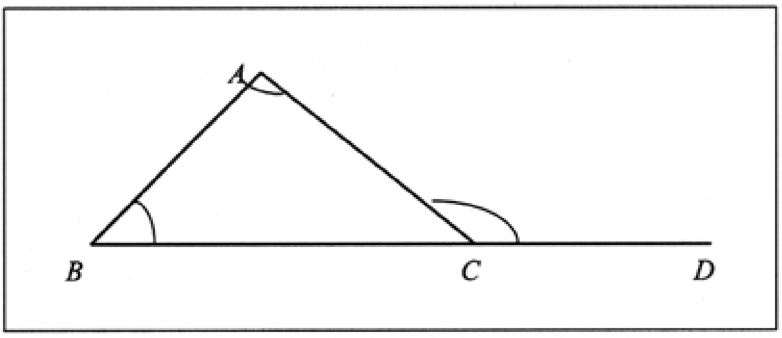


Figura 1

En el triángulo ABC, el ángulo exterior DCA es mayor que los ángulos internos y opuestos ABC y BAC. Basándose en ésta proposición, Euclides asienta su teoría de las paralelas. Realiza los siguientes razonamientos: dadas dos rectas en un mismo plano, las cortamos por una tercera, así obtenemos ocho ángulos.

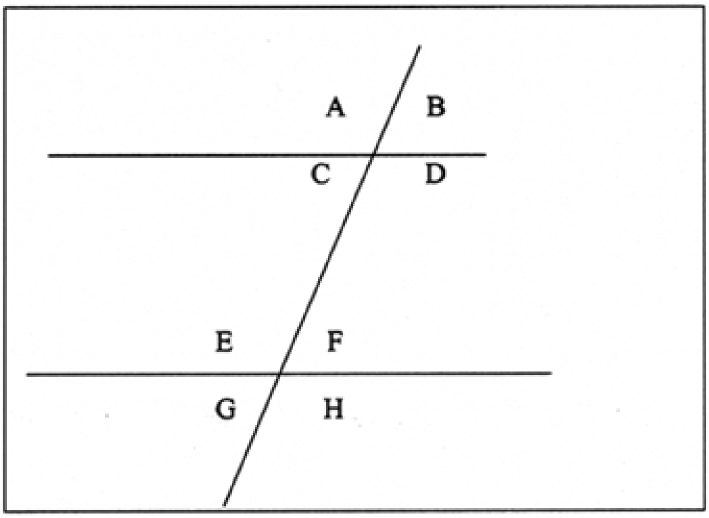


Figura 2

En los ángulos creados puede suceder, tomados dos a dos, que:

1) Los ángulos alternos-internos son iguales, es decir,

$$C = F \quad \text{o} \quad D = E.$$

En ese caso las rectos son paralelas, pues si se cortasen se formaría un triángulo en el cual uno de los ángulos exteriores sería exactamente igual a uno de los ángulos interiores no adyacente, lo que estaría en contra de la Proposición 16 (I libro), tal como aclara el dibujo.

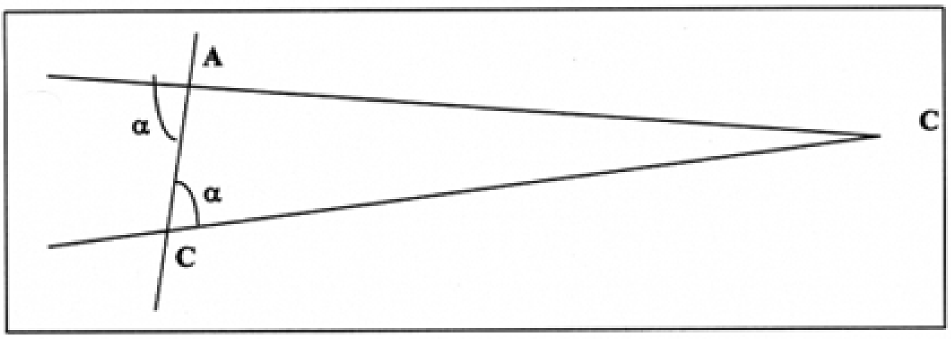


Figura 3

El triángulo ABC tiene un ángulo externo en A igual a el ángulo interno en el vértice C (lo cual no es posible).

De la misma manera se podría razonar (Figura 2) basándose en las igualdades

2) $B = G$ o $A = H$; 3) $B = F$, $A = E$ (ángulos correspondientes iguales); 4) $E + C = 2$ Rectos (sumados los ángulos externos conjugados igual a dos rectos), $D + F = 2$ Rectos;...

Recogiendo todos los resultados podemos concluir que:

Si dos rectas en un mismo plano se cortan, por una tercera formando ángulos iguales, entonces estas dos rectas son paralelas.

Euclides no enuncia este resultado sino que lo divide en dos proposiciones, las proposiciones 27 y 28 del primer libro.

Proposición 27 *Si una recta al incidir sobre dos rectas hace los ángulos alternos iguales entre sí, las dos rectas serán paralelas entre sí.*

Proposición 28 *Si una recta al incidir sobre dos rectas hace el ángulo externo igual al interno y al opuesto del mismo lado, o los dos internos del mismo lado iguales a dos rectos, las rectas serán paralelas entre sí.*

Inmediatamente nos surge una cuestión:

¿Será cierta la proposición inversa? ¿Será verdad que para que dos rectas sean paralelas ha de suceder una de las igualdades respecto a los ángulos que Euclides menciona en las proposiciones 27 o 28?

Es evidente que Euclides lo intentó, la ordenación del material nos da testimonio inequívoco de este asunto. Sin embargo, no logró demostrar ese resultado, por lo que resolvió el problema de una manera muy original:

Euclides, tomó simplemente la proposición inversa como postulado y le añadió a los cuatro postulados que ya tenía y con los cuales ya estaba trabajando.

Para entender la redacción del quinto postulado en su totalidad hay que seguir los siguientes pensamientos:

1) **“Si la suma de los ángulos conjugados internos es igual a dos rectos entonces la rectas (de la Figura 2) son paralelas; cuando no ocurre esto, esto es cuando la suma de dichos ángulos conjugados internos no equivalen a dos rectos, las rectas no son paralelas e inevitablemente habrán de encontrarse en un punto”.**

2) **De la Proposición 16 (referente al ángulo exterior) también se puede deducir que la suma de los ángulos de un triángulo jamás puede exceder de dos rectos (que es precisamente la Proposición 17 del libro I). Como se puede ver en el siguiente razonamiento (Figura 4).**

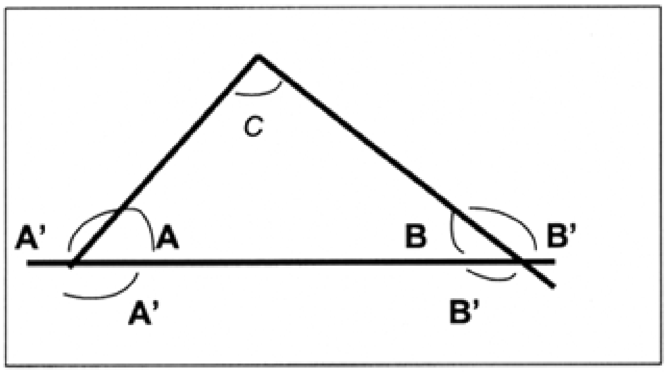


Figura 4

La suma de los ángulos internos (A y B) y sus adyacentes correspondientes (A' y B') ha de ser igual a cuatro rectos, $A+A'+B+B' = 4$ Rectos. De la proposición 16 se deduce que $A < B'$ y $B < A'$. Por tanto haciendo unas simples cuentas $A+B < 2$ Rectos. Hemos razonado con los ángulos internos A y B, con cualquier otra pareja de ángulos el procedimiento sería el mismo.

Aunando estos dos pensamientos, Euclides enunció, como ya sabemos, su famoso quinto postulado de la siguiente manera:

Postulado 5 *"Y que si una recta al incidir sobre dos rectas hace los ángulos internos del mismo menores que dos rectos, las dos rectas prolongadas indefinidamente se encontrarán en el lado en el que están los (ángulos) menores que dos rectos"*

Basándose en este postulado y las proposiciones anteriormente demostradas, Euclides va construyendo todo un hábeas de las paralelas, el punto culminante se encuentra en la proposición 31 del primer libro que hace referencia a la construcción de una recta paralela a otra recta dada y que pase por un punto exterior a ésta. Dice lo siguiente:

Proposición 31: *"Por un punto dado se puede trazar una recta paralela a una recta dada."*

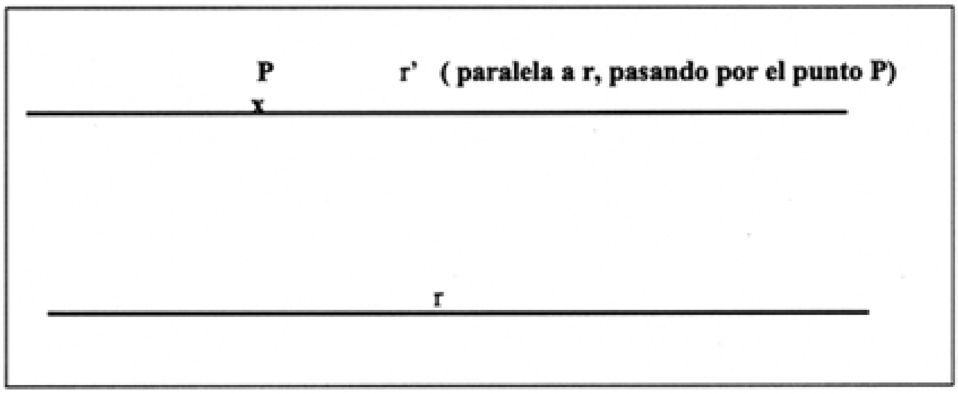


Figura 5

La manera de razonar y el procedimiento seguido en esta proposición nos lleva a concluir no sólo que **existe** esa paralela sino que además **es única**.

Cuando el comentarista **Proclo** hace referencia a dicha proposición hace notar la existencia y la unicidad de la paralela.

Desde el punto de vista histórico este aspecto ha sido muy importante, ya que el negar bien la existencia o bien la unicidad de las paralelas nos abre las puertas a un mundo fascinante: **La Geometría no euclideana**.

Es evidente que el V postulado resultaba una dificultad, no resulta extraño pensar que ya los contemporáneos de Euclides hicieran intentos serios y profundos para intentar demostrar dicho postulado utilizando exclusivamente los cuatro anteriores. De hecho, algún que otro matemático de la antigüedad murió convencido que había resuelto la situación, sin embargo usaron proposiciones más o menos encubiertas y además equivalentes al V postulado, con lo cual incurrían en una **"repetición de principio"**. Naturalmente la intuición les jugaba una mala pasada.

Veamos con un ejemplo una situación muy habitual en este tipo de demostraciones. El comentarista Proclo (siglo V) se dio cuenta que el V postulado quedaría demostrado si previamente demostraba la siguiente proposición:

Proclo: *"Dadas dos rectas paralelas l y m cualesquiera y r otra recta distinta a l y que la corta, entonces r también corta a m"*

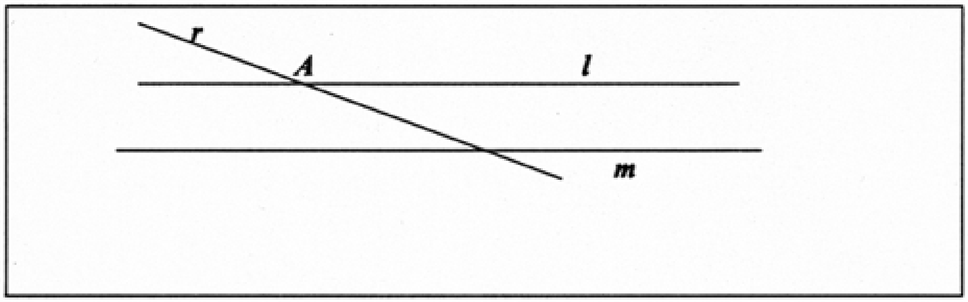


Figura 6

Si Proclo conseguía demostrar tal aseveración, utilizando únicamente los postulados I-IV de Euclides, quedaría demostrado el V postulado.

De manera muy resumida, sin entrar en detalles, el razonamiento de Proclo es el siguiente: si l y r se cortan en A (según la hipótesis de Proclo), al prolongar dichas rectas indefinidamente pueden llegar a tener entre sí una distancia mayor que cualquier magnitud, de manera que será mayor que el intervalo entre las dos paralelas. Por tanto si las rectas l y r están entre sí a una distancia mayor que la distancia entre las rectas paralelas , ha de suceder necesariamente que la recta r corte a la recta m.

Esta demostración es muy visual, y no cabe duda que puede resultar hasta convincente, sin embargo si la analizamos con detalle podemos encontrar un conjunto de aspectos oscuros, son los siguientes :

a) Habla de una distancia entre rectas paralelas.

b) Comenta que la distancia entre dos rectas no paralelas, al prolongarse indefinidamente, llegan a tener entre sí una distancia mayor que cualquier magnitud.

Sin embargo, las dos aseveraciones propuestas por Proclo no son tratadas de manera explicita en los cuatro primeros postulados de Euclides, en consecuencia debería demostrarlas. Proclo atribuye la afirmación (b) a Aristóteles mientras que la afirmación (a) es equivalente al V postulado de Euclides (aspecto que Proclo desconocía). En definitiva, Proclo ha incurrido en argumentaciones falaces ya que ha empleado para demostrar el V postulado un resultado que es equivalente al que se quería demostrar.

Muchos otros geómetras que vinieron después intentaron eliminar el quinto postulado de la lista de axiomas y demostrarlo a partir de los demás. Entre los personajes más significados se encuentran: **Nasir ed Din et Tusi** (siglo XIII), **Wallis** (1616-1703), **Saccheri** (1667-1733), **Lambert** (1728-1777), **Legendre** (1752-1883) y muchos otros. En muchos casos la demostración que se conseguía se basaba en alguna propiedad que se consideraba evidente pero que en realidad era equivalente al quinto postulado. Algunos de los enunciados que se han dado equivalentes al quinto postulado son éstos:

Autor	**Postulado**
Legendre	Existe un triángulo en el cual la suma de sus tres ángulos vale dos rectos.
Legendre	Una recta perpendicular a un lado de un ángulo agudo también corta al otro lado.
Laplace, Saccheri	Existen dos triángulos no congruentes, con los ángulos de uno respectivamente iguales a los ángulos de otro.
Gauss	Existen triángulos de área arbitrariamente grande.
Bolyai	Por tres puntos no alineados pasa siempre una circunferencia.
Wallis	Existen triángulos semejantes (pero no iguales), es decir triángulos cuyos ángulos son iguales pero de lados desiguales.
Proclo	Dos rectas paralelas entre si están a distancia finita.

Pero sin duda el más famoso de todos es:

Por un punto exterior a una recta dada sólo pasa una paralela a dicha recta (axioma de Playfair).

Playfair, John (1748-1819) Nació en Benvie, Escocia. Era el hijo mayor del Reverendo James Playfair. Su padre lo educó hasta los 14 años, posteriormente le envió a la Universidad de St Andrews donde se graduó. Su progreso en las ciencias matemáticas fue muy rápido. En 1785 se le nombró Profesor Asociado de Matemáticas en la Universidad de Edimburgo. Estandarizó la notación de los puntos y lados de las figuras en los primeros seis libros de su edición. Murió en 1819 en Burntisland, Escocia.

2.1. Los precursores de la geometría no euclideana

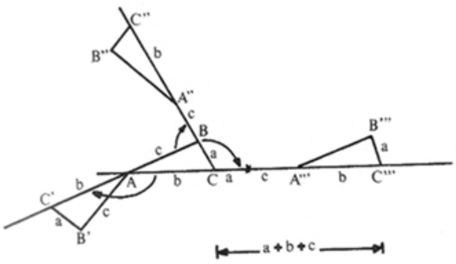
En las investigaciones realizadas respecto al **V postulado**, también se siguió un camino que consistía en establecer una propiedad equivalente al quinto postulado y tratar de demostrar dicha propiedad partiendo únicamente de los cuatro primeros postulados.

Por ejemplo, el matemático francés **A. M. Legendre** demostró que la propiedad:

"La suma de los ángulos de un triángulo siempre vale dos rectos".

era equivalente al V postulado.

Basándose en este resultado el matemático alemán B. F. Thibaut (utilizando los cuatro primeros postulados de Euclides y las proposiciones derivados exclusivamente de estos cuatro postulados), trató de demostrar la propiedad de Legendre, con lo cual él concluía que el **V postulado** se podía deducir de los otros cuatro. Su razonamiento se basaba en la siguiente figura:



La figura se construye siguiendo los siguientes pasos:

1) se dibuja el triángulo ABC.

2) Con centro el punto A se gira el triángulo ABC un ángulo igual a CAC'.

3) Con centro el punto B, al nuevo triángulo se le gira un ángulo ABA''.

4) Con centro el punto C, al nuevo triángulo se le gira un ángulo BCA'''.

Como resultado de los giros realizados el triángulo ABC ha girado exactamente una vuelta completa (4 rectos). Lo que quiere decir que la suma de los tres ángulos CAC', ABA'' y BCA''' es igual a 4 rectos.

$$CAC' + ABA'' + BCA''' = 4 \text{ rectos.}$$

Aplicando la proposición 13 de Euclides. Podemos poner que:

$$2 \text{ rectos} - CAB + 2 \text{ rectos} - CBA + 2 \text{ rectos} - BCA = 4 \text{ rectos},$$

y por tanto

$$ABC + BAC + ACB = 2 \text{ rectos.}$$

Esta igualdad nos indica que la suma de los tres ángulos interiores es igual a 2 rectos. Parece que todo está bien, ¿dónde está el error?

El asunto es ciertamente algo sutil. El punto débil de los anteriores razonamientos se encuentra en el hecho de que el triángulo no sólo ha **girado** una vuelta completa sino que también se ha **trasladado** una distancia igual a la suma de los tres lados del triángulo. Se ha realizado, por tanto, un movimiento del triángulo que se compone de un giro y una traslación (pero hay un resultado relativo a los movimientos en el plano que dice: **"todo movimiento del plano se puede descomponer en un giro y en una traslación que no depende del giro"**). Como resulta que la última aseveración es también equivalente al V postulado, no podemos utilizarla para demostrar dicho postulado, y estamos nuevamente cayendo en la famosa "petición de principio".

La historia de las paralelas y su desarrollo histórico es largo de contar. En su solución estuvieron implicados muchos personajes.

Intentos por demostrar el V postulado (precursores):

Mat. Árabes: **Tabit ibn Qurra** (836-901), **Omar Jayyam** (1045-1130), **Nasir al Din al Tusi** (1201-1274)

Mat. Occidentales: **John Wallis** (1616-1703), **Giordano Vitali** (1633-1711), **John Playfair** (1748-1819), **Gerolamo Saccheri** (1667-1733), **Johann Lambert** (1728-1777), **A. Marie Legendre** (1752-1833)

El intento de demostración de Saccheri, uno de los más interesantes, fue el que marcó un punto de inflexión en la manera de abordar el problema de las paralelas. El camino seguido hasta entonces era el de tratar de demostrar de manera **directa** el quinto postulado mediante los otros cuatro. Con Saccheri el asunto toma otro rumbo. Su forma de razonar fue la siguiente: se propuso demostrar que el quinto postulado era verdadero. Para demostrar esto, **negó el quinto postulado** y trató de encontrar alguna contradicción al admitir esta suposición. Básicamente seguía un tipo de razonamiento lógico (no en vano él daba clase del lógica) que consistía en en suponer que si admitía el **NO quinto postulado**, y de aquí deducía una **proposición P** y también **proposición NO P**, entonces no era posible mantener la suposición del No quinto postulado, por lo que el quinto postulado debería de ser cierto. Esta manera de razonar era nueva en la historia de las paralelas. Sus argumentaciones se basan en su famoso cuadrilátero birrectángulo.

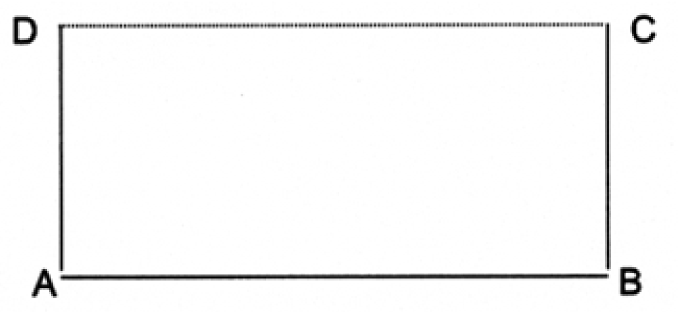
Saccheri, Giovanni Girolamo (1667-1733) Nació y murió en San Remo, Génova (ahora Italia). Se unió a la Orden de los Jesuitas en 1685. Cinco años después marchó a Milán, donde estudió filosofía y teología en el Colegio Jesuita. Allí, Tommaso Ceva (hermano de Giovanni Ceva, que descubrió el famoso Teorema de Ceva) le animó a estudiar matemáticas. Inicialmente estudió lógica y muy particularmente la utilizada por Euclides en su famoso tratado. En 1694 fue ordenado sacerdote y se dedicó a enseñar en colegios jesuitas. Fue catedrático de matemáticas en Pavia desde 1699 hasta su muerte. Escribió dos libros: *"Euclides ab omni naevo vindicatus"* (Euclides liberado de toda imperfección), en 1733, y *"Lógica demonstrativa"* en el año 1701.

El cuadrilátero birrectángulo se construye siguiendo el patrón:

1) Trazar el segmento AB.

2) Levantar perpendiculares al segmento AB, en los puntos A y B.

3) Dibujar los segmentos AD y BC de la misma longitud.



En estas condiciones Saccheri demuestra que **"Los ángulos interiores que se forman en los vértices D y C son iguales"** y supone tres hipótesis:

I) ángulo C = ángulo $D = 90^o$

II) ángulo C = ángulo $D > 90^o$

III) ángulo C = ángulo $D < 90^o$

Saccheri da nombre a las tres hipótesis, así la primera la llama la **hipótesis del ángulo recto**, la segunda la del **ángulo obtuso**, y la tercera la del **ángulo agudo. Su objetivo es demostrar que que la única hipótesis razonable y lógica es la correspondiente al ángulo recto.**

La hipótesis del ángulo obtuso es rápidamente descartada. Saccheri empieza una larga batalla por descartar la hipótesis del ángulo agudo, que como él mismo dice *"es la única que se opone a la verdad del axioma"*. Después de encontrar nuevas proposiciones, a partir de esta hipótesis, encuentra un resultado que le hace decir:

"Al fín he descubierto en la hipótesis del ángulo agudo una falsedad manifiesta, ya que conduce necesariamente a reconocer la existencia de dos rectas que, en el mismo punto y en el mismo plano, tienen una perpendicular común".

En realidad no encuentra ningún resultado contradictorio desde el punto de vista lógico, sino que vuelve la vista a su concepción del mundo y concluye:

"La hipótesis del ángulo agudo es absolutamente falsa, porque repugna a la naturaleza de la línea recta".

La obra de Saccheri es fundamental, ya que representa la máxima tentativa -en esa época- por solucionar el problema de las paralelas. Además, construye una nueva teoría sin contradicciones lógicas partiendo de la hipótesis del ángulo agudo.

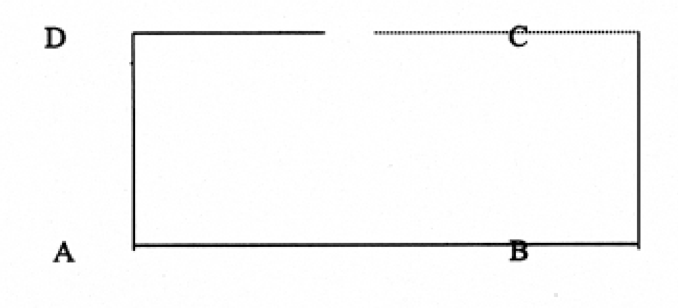
Su obra fue difundida por dos historiadores de la matemática J. C. Heibroner (1742) y Montucla (1758), y posteriormente se analizó en detalle por G. S. Klugel (1763) y cayó en el olvido hasta que el matemático italiano E. Beltrami (1889) volvió a desempolvarla.

Lambert Johann Heinrich (1728-1777)
Matemático alemán nacido en Mulhouse y fallecido en Berlín. Era un pensador polifacético, uno de los primeros en pensar que nuestra galaxia era una más dentro de la amplitud del universo. Fue miembro de la Academia de Berlín. En matemáticas Lambert probó que el número pi era una cantidad irracional (1766) e introdujo las funciones hiperbólicas en trigonometría. En 1760 publicó unas investigaciones que tenía hechas sobre la reflexión de la luz y fue el primero en idear métodos para medir la intensidad de la luz con cierta exactitud y la unidad de brillo se llama lambert en su honor. Amigo del filósofo alemán I. Kant, con él buscó el volver a introducir el a priori en la ciencia. Sus trabajos en el campo de las paralelas fueron reunidas en un trabajo que publicaría Johan Bernoulli III (1786), sus investigaciones en este campo siguieron inicialmente los razonamientos de G. Sacchieri.

J. H. Lambert

La obra de Lambert discurre por un camino paralelo a la de Saccheri, sus razonamientos se basan en su famoso cuadrilátero trirrectángulo. Para construir el **trirrectángulo**, Lambert procede de la siguiente manera.

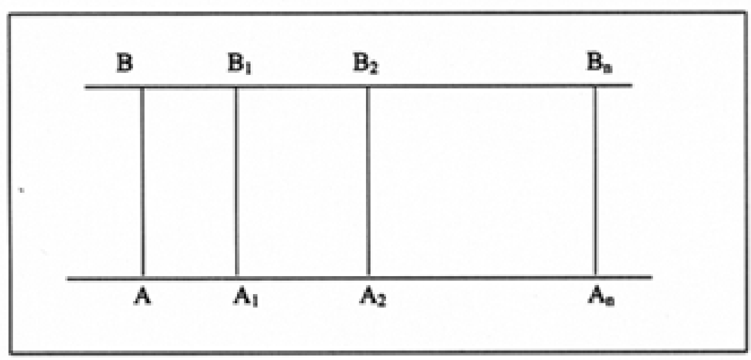
1) Trazar el segmento AB.
2) Dibujar el segmento AD perpendicular al segmento AB en el vértice A.
3) En el vértice B levantar una perpendicular al segmento AB.
4) En el vértice D trazar una perpendicular al segmento AD, y prolongarla hasta encontrar el vértice C.



De acuerdo a la construcción realizada se forma un cuadrilátero que tiene tres ángulos interiores rectos (los correspondientes a los ángulos interiores A, B y D), mientras que el cuarto vértice puede ser una de las tres posibilidades: I) ángulo $C = 90^o$; II) ángulo $C > 90^o$; III) ángulo $C < 90^o$.

La primera de ellas es la correspondiente a la hipótesis del ángulo recto, la segunda la hipótesis del ángulo obtuso, y la tercera la hipótesis del ángulo agudo. El método ideado por Lambert, como vemos, se acerca al trabajo de Saccheri.

Para rechazar la hipótesis del ángulo obtuso, Lambert recurre a la siguiente figura: traza dos rectas perpendiculares a una tercera recta AB, luego desde los puntos señalados $B, B_1, B_2, \ldots, B_n$ baja perpendiculares, hasta encontrar a la otra recta en los puntos homólogos $A, A_1, A_2, \ldots, An$.



En la hipótesis del ángulo obtuso, Lambert demuestra que los segmentos AB, A_1B_1,..., A_nB_n van decreciendo progresivamente, de modo que se puede demostrar que:

$$AB - A_nB_n > (AB - A_1B_1).n$$

Sin embargo, para un número natural n suficentemnte grande, podemos hacer el segundo miembro de la desigualdad anterior tan grande como queramos (**postulado de Arquímedes**), mientras que el primer miembro no puede ser mayor que el segmento AB. Esta contradicción permite a Lambert declarar falsa la hipótesis del ángulo obtuso.

La hipótesis del ángulo agudo la trata en bastante profundidad: observa que todo segmento se le puede poner en correspondencia con un ángulo, lo que daría categoría de absoluto a la longitud de segmentos.

Esta medida absoluta de la longitud -dice Lambert- repugna a nuestra intuición euclideana. Sin embargo actuó con cautela y no fue capaz de rechazar la hipótesis del ángulo agudo desde el punto de vista lógico. Sus investigaciones fueron publicadas por Johann Bernoulli III, en 1786 bajo el título de la *Teoría de las paralelas*.

Tres personajes claves en la historia de las paralelas fueron: Legendre, Schweikart y Taurinus. La longitud de este texto no me permite explicar las aportaciones de cada uno de ellos, únicamente decir que el terreno ya estaba suficientemente abonado para que los matemáticos Gauss, Bolyai y Lobachevski fuesen capaces de resolver el problema.

Bibliografía

[1] M. Kline, *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días*, Alianza Universidad, Madrid, 1992 (Vol. I y III).

[2] A. D. Aleksandrov, A. N. Kolmogorov, M. A. Laurentiev y otros, *La matemática: su contenido, método y significado*, Alianza Universidad, Madrid, 1982 (Vol. III).

[3] O'Connor y E. F. Robertson, *Non-euclidean geometry*, The Mactutor History of Mathematics archive, Universidad de San Andrews, Inglaterra, 1996.

http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/˜history/HistTopics/ Non-Euclidean geometry.html