Muerte de un cartógrafo

por

Raúl Ibáñez Torres, Universidad del País Vasco-Euskal Herriko Unibertsitatea

1. Introducción

Consideremos el mapamundi de la Figura 1, que es el mapa de toda la vida, el que hemos visto desde nuestra infancia para representar la tierra y que por lo tanto utiliza nuestra mente de forma inconsciente, como una realidad inalterable. A continuación, imaginemos que realizamos una encuesta sobre este mapamundi a un grupo amplio y heterogéneo de miembros de nuestra sociedad. La primera pregunta sería, **¿qué tenemos ante nosotros?**, y podemos esperar que la respuesta fuese mayoritariamente "un mapa de la tierra" o "una representación plana de la tierra". Pero si con posterioridad pedimos en nuestro cuestionario que se explique la respuesta dada y que se indique **qué tipo de representación es**, entonces, en muchos casos obtendremos una casilla en blanco. Dos ejemplos personales que ilustran esta situación son los siguientes: $i)$ cuando empecé a darle vueltas al tema de esta charla, dediqué algún tiempo a visitar diferentes tiendas donde se vendían mapas (librerías, tiendas de viajes,...) y a solicitar un mapamundi. Tras ser satisfecha mi solicitud con un mapa del mundo, preguntaba con qué representación estaba hecho y si tenían mapas realizados con otras representaciones. En la mayoría de los establecimientos, por no decir todos, el nerviosismo y la agresividad hacia mi persona era la única respuesta que finalmente recibía; *ii*) teniendo en cuenta que entre mis amigos hay quien trabaja realizando mapas, fundamentalmente de Euskadi y otras autonomías, para empresas y organismos públicos, les pedí que me hablasen de las proyecciones que utilizaban para crearlos. Entonces, me explicaron como utilizaban un programa de ordenador para la realización de los mapas y que la única proyección utilizada es la **UTM** (como veremos en la Sección 5, UTM son las siglas de Universal Transversal Mercator).

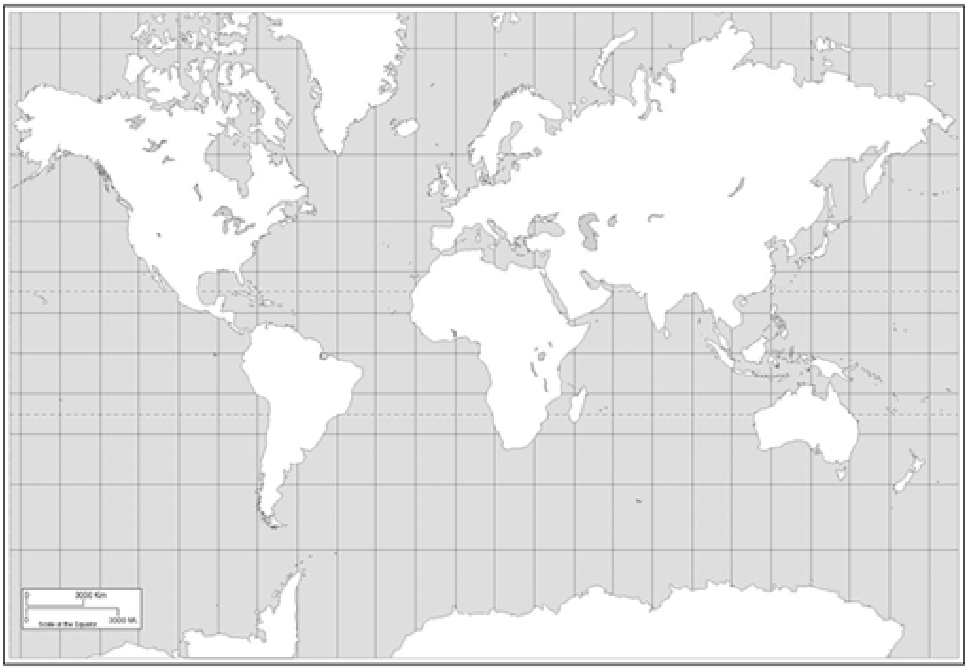

Figura 1

Si nuestra imaginaria encuesta continúa con la pregunta **¿cómo se obtiene este mapa?**, la respuesta puede ser algo así como que "quitamos los polos de la esfera, hacemos un corte entre los dos polos y extendemos la superficie". La respuesta puede tener algo de verdad, aunque es bastante ambigua, como se pondrá de manifiesto a lo largo de este artículo. Ante la cuestión **¿hay otro tipo de mapas?**, podemos esperar que se hable de la tierra vista desde el espacio, por ejemplo, como en la Figura 2.

Pero volvamos a la Figura 1, **¿qué camino tomar para ir de Madrid a Washington D. C.?**. Como todo el mundo sabe que el camino más corto entre dos puntos del plano es la recta, la respuesta que obtendremos es el meridiano 40, sin embargo, en la esfera el camino más corto entre dos puntos cualesquiera es el círculo máximo que pasa por dichos puntos[1] y en este caso, su imagen en el plano no es el meridiano 40[2]. Este es uno de los motivos por los cuales los aviones que unen esas dos ciudades no siguen el meridiano 40, sino que suben hacia el norte y después descienden hacia el sur siguiendo el círculo máximo. Podemos concluir que nuestra carta no preserva los caminos más cortos. Por otra parte, es habitual que en la parte inferior de un plano se indique la escala del mismo, y cuando alguien quiere saber **la distancia entre dos puntos**, mide su distancia en el mapa y utiliza la escala indicada para obtener la supuesta medida. Sin embargo, por lo comentado anteriormente, tendríamos que medir en el plano la longitud de la curva imagen del círculo máximo y no la de la recta. Aun así, el resultado que se obtendría seguiría siendo incorrecto, y esto se debe a que nuestro mapa no preserva las longitudes de las curvas, no preserva las distancias, y en realidad, no se puede hablar de la escala como algo uniforme. Siguiendo en esta línea de pensamiento, **cuestionemos si el área es preservado en nuestra carta**. Como es bien conocido Groenlandia aparece en este mapa demasiado grande, mostrándose incluso un poco más grande que Africa, sin embargo, la realidad es que Groenlandia tiene una extensión de $2.175.600$ km^2 y Africa de $29.800.000$ km^2, luego se produce una distorsión muy fuerte en el área. Finalmente, preguntemos si los mapas preservan **los rumbos, las direcciones, en definitiva, los ángulos**. El ángulo entre los meridianos y los paralelos es de 90^o, y también lo es en nuestro mapa de la Figura 1, sin embargo, si fijamos nuestra atención en la Figura 2 esto no es cierto ahora, es decir, este mapa no preserva los ángulos.

Figura 2

Pero, si además, mencionamos a nuestros encuestados que existen un gran número de representaciones planas diferentes de la tierra (como se puede ver en [6]), estos se quedarán completamente descolocados. En definitiva, a pesar de estar en contacto continuo con los mapas (en la TV, el cine, los periódicos, las revistas,

[1]Recordemos que los círculos máximos de la esfera se obtienen como la intersección de esta con los planos que pasan por su centro.

[2]Véase en la Figura 17 la imagen en este mapa de algunos círculos máximos (las curvas que no son rectas).

los libros, la enseñanza, en el trabajo,...), acabamos de empezar a descubrir nuestro completo desconocimiento de ellos y que además, son aparentemente falaces. Entonces, nos preguntamos:

¿por qué hay tantos mapas? ¿cuál es el correcto? ¿por qué los anteriores mapas no lo son? ¿cómo dibujar correctamente un mapa de la tierra? ¿qué significa correctamente?

El objetivo de esta charla es contestar a las anteriores preguntas. La herramienta necesaria para tal fin y, en general, para el estudio de la cartografía es la **Geometría Diferencial** (véanse, por ejemplo, [Fr. Pearson, II, *Map projections: Theory and Applications*, CRC Press, 1990] y [D. H. Maling, *Coordinate Systems and Map Projections*, Pergamon Press, 2 ed., 1992]). De hecho, fue el intento de desarrollar un estudio sistemático de las superficies con el fin de utilizarlo, entre otras cuestiones, en cartografía, lo que llevó a Gauss a crear el germen de la Geometría Diferencial. Sin embargo, mi objetivo en esta charla es dar respuesta a estas preguntas desde un punto de vista más intuitivo, más geométrico[3]. Además, para simplificar la discusión vamos a considerar que nuestra tierra tiene forma esférica y que es del tamaño de un balón de baloncesto, para no introducir la escala que se produce por la reducción.

2. ¿Qué significa correctamente?[4]

Cuando utilizamos un mapa, estamos interesados en poder medir el área de un terreno, en elegir un rumbo para navegar, en tomar el camino más corto entre nuestro lugar de origen y nuestro destino, y medir la distancia entre ellos, en que las formas de los territorios se mantengan si estamos analizando distribuciones geográficas (niveles de vida, contaminación, población,...) de la tierra. En concreto, estamos interesados en que las proyecciones que utilizamos para realizar los mapas preserven conceptos métricos como: las distancias, los caminos más cortos entre dos puntos (más generalmente, las geodésicas), las direcciones (es decir, los ángulos), las áreas, las formas,...

En nuestra búsqueda de un mapa correcto de la esfera-tierra, empezaremos de-

[3]Para quien esté interesado en un estudio riguroso puede encontrar las herramientas y parte de la discusión en la asignatura “Elementos de Geometría Diferencial”.

[4]Mucha gente tiene la impresión de que los mapas perfectos se obtienen tomando imágenes aéreas o por satélite. Sin embargo, el mapa que se obtiene de esta forma, similar al de la Figura 2, no preserva ninguno de los conceptos métricos que en esta sección comentaremos.

mostrando que una aplicación de la esfera en el plano (*continua y diferenciable*) que preserve las distancias, también preservará los caminos más cortos (las geodésicas), los ángulos y las áreas. Además, la propiedad de preservar las distancias es equivalente a que se preserven las longitudes de las curvas.

$\boxed{\textbf{distancias} \Longrightarrow \textbf{caminos más cortos.}}$ Supongamos que tenemos una proyección de la esfera en el plano que preserva las distancias y veamos que también preservará los caminos más cortos entre cualesquiera dos puntos. Si nuestra proyección no preservase los caminos más cortos, entonces existirían dos puntos A y B sobre la esfera y otro punto C sobre el camino más corto entre los anteriores, que como sabemos es el círculo máximo que los une, tal que la imagen de C en el plano, C', no está en la recta que une las imágenes, A' y B', de los puntos A y B (véase la Figura 3). En consecuencia, tenemos la siguiente situación. Por un lado, la distancia entre los puntos A' y B' (que denotamos $A'B'$) es igual a la distancia AB, puesto que la proyección preserva las distancias, y esta a su vez es igual a la suma de las distancias AC y CB, por estar C sobre el camino más corto. Sin embargo, como C' no está en la recta que une A' y B', entonces la suma de las distancias $A'C'$ y $C'B'$, que por preservarse las distancias es igual a la suma de las distancias AC y CB, es estrictamente mayor que la distancia $A'B'$, obteniéndose así una contradicción.

Figura 3

$\boxed{\textbf{distancias} \Longleftrightarrow \textbf{longitudes de curvas.}}$ Por el párrafo anterior, una aplicación que preserva las distancias, también preserva los caminos más cortos y en consecuencia, preservará las longitudes de las curvas. La razón es que toda curva de la esfera puede ser aproximada mediante un número finito (suficientemente grande) de arcos de círculos máximos, luego aproximamos su longitud mediante la suma de las longitudes de estos (que son las distancias entre los puntos extremos), de igual forma la curva imagen se aproxima por las rectas imagen de los arcos anteriores y su longitud por la suma de las longitudes de estos segmentos (véase la Figura 4). El recíproco también es cierto porque la distancia entre dos puntos es el límite de las longitudes de las curvas que los unen.

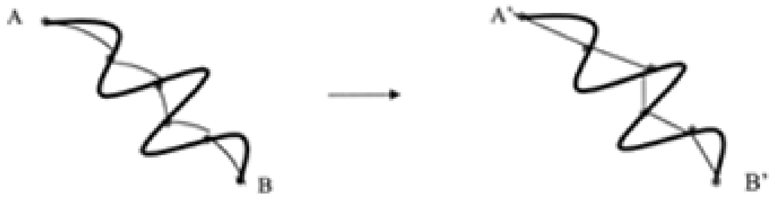

Figura 4

distancias $\Longrightarrow$ ángulos. Dados dos círculos máximos de la esfera que se cortan en un punto, si tomamos una circunferencia centrada en el punto, de radio suficientemente pequeño, entonces podemos considerar que el ángulo θ entre los dos círculos máximos es el cociente entre la longitud del arco de circunferencia determinado por los dos círculos máximos y 2π veces el radio (véase la Figura 5)[5].

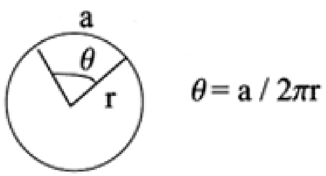

Figura 5

Si tomamos la imagen mediante una aplicación que preserva las distancias, obtenemos dos rectas y una circunferencia centrada en el punto de corte. Por preservarse las distancias y ser la fórmula de la Figura 5 válida para el plano, se deduce que dicha proyección preserva el ángulo.

distancias $\Longrightarrow$ áreas. La idea de esta afirmación reside en que dada una región acotada de la esfera la podemos cubrir con una familia finita (suficientemente grande) de regiones delimitadas por meridianos y paralelos, que podemos considerar rectángulos (cuando el número sea suficientemente grande y por tanto estas regiones suficientemente pequeñas) y el área es la suma de las áreas de estos rectángulos (base por altura). En el plano obtendremos la región imagen, cubierta por la familia de rectángulos imágenes, y como la aplicación preserva las distancias, tendrá el mismo área.

En resumen, la Figura 6 nos muestra las relaciones obtenidas entre las propiedades de las proyecciones de la esfera en el

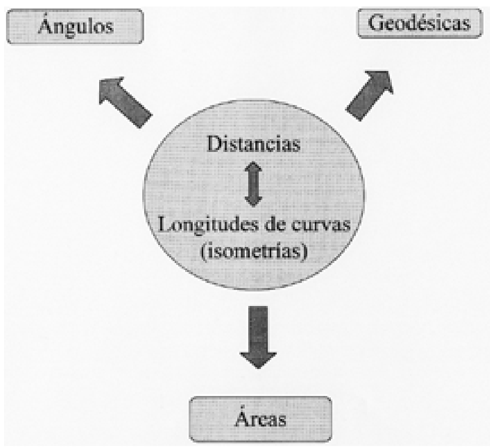

Figura 6

[5]Esta definición se extiende al ángulo entre dos curvas cualesquiera de la esfera que se corten, utilizando los círculos máximos que pasan por el punto de corte y con vectores tangentes en dicho punto los de las curvas.

plano. En las siguientes secciones, y con la excusa de probar que las flechas que aparecen en la Figura 6 son solamente en un sentido, vamos a estudiar, con cierto detalle, tres proyecciones particulares entre la esfera y el plano, como son la proyección cilíndrica de Lambert, que preserva las áreas, la proyección central, que preserva las geodésicas y la proyección de Mercator, que preserva los ángulos.

3. Proyección de Arquímedes o cilíndrica isoareal de Lambert

El área de la esfera fué calculada por primera vez por Arquímedes en su obra *"Sobre la esfera y el cilindro"*, demostrando que esta es igual al área del cilindro que la circunscribe. Cicerón relata en su obra *"Discusiones tusculanas"* que sirviendo como cuestor de Roma en Sicilia encontró y reparó la olvidada tumba de Arquímedes, sobre la cual estaba grabada una esfera inscrita en un cilindro (Plutarco narra en *"Vidas Paralelas"* como Arquímedes hace esta petición a sus familiares). Se conoce como la aplicación de Arquímedes aquella entre la esfera y un cilindro tangente a la misma, tal que la imagen de un punto cualquiera A de la esfera es el punto A' del cilindro que es la intersección de este con la recta que pasa por A y corta perpendicularmente al eje del cilindro, como muestra la Figura 7.

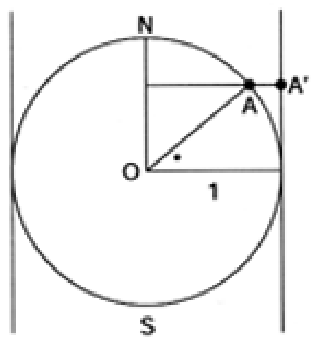

Figura 7

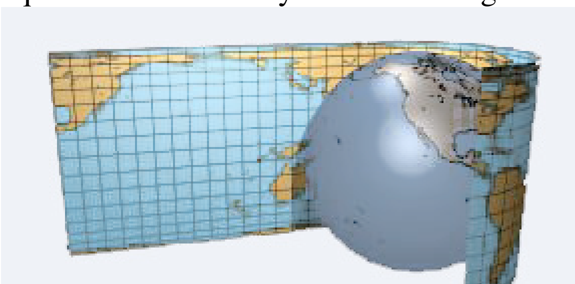

Figura 8

Si consideramos que la tierra es nuestra esfera unidad y que el cilindro es el tangente a la esfera en el ecuador (por lo tanto, su eje pasa por los polos norte y sur), entonces una vez obtenida la imagen de la esfera en el cilindro, se despliega este en el plano (Figura 8).

Este mapa, véase la Figura 9, fué diseñado por J. H. Lambert en 1772. Algunas propiedades del mismo:

i) es de forma rectangular, como todas las proyecciones cilíndricas;

ii) los meridianos y los paralelos son rectas que se intersecan ortogonalmente;

iii) como veremos más adelante, preserva la áreas, pero no preserva ni los ángulos ni las geodésicas;

iii) la distorsión en las formas, ángulos y distancias, es muy pequeña cerca del ecuador (más aún, le escala es real en el ecuador), pero mayor según nos acercamos a los polos.

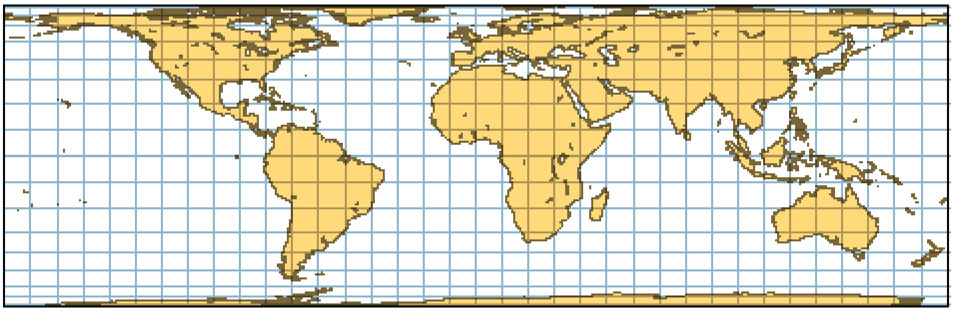

Figura 9

Teniendo en cuenta el comentario de la sección anterior relativo a las áreas, para demostrar que la aplicación de Arquímedes preserva el área, es suficiente probarlo para regiones "rectangulares" cuyos lados son meridianos y paralelos (suficientemente pequeñas). Como se muestra en la Figura 10, dado un punto sobre la esfera de latitud θ, la imagen de un meridiano (suficientemente pequeño) de longitud l es un segmento de recta en el cilindro, de longitud $l' = l\,cos\theta$, mientras que la imagen de un paralelo (suficientemente pequeño) de longitud k es un arco de circunferencia en el cilindro de longitud $k' = k/cos\theta$. Por lo tanto, dado un pequeño "rectángulo" de base k y altura l sobre la esfera, luego de área $l \cdot k$, se transforma en un "rectángulo" de base $k' = k/cos\theta$ y altura $l' = l\,cos\theta$, cuyo área será también $l \cdot k$. En conclusión, la proyección de Arquímedes es una aplicación que preserva el área.

Sin embargo, en este mapa de Lambert no se preservan los ángulos. Volviendo a la Figura 10, vemos que por la distorsión que se produce en los meridianos (se contraen) y en los paralelos (se dilatan), el ángulo entre la base y la diagonal del rectángulo sobre la esfera es mayor que el mismo ángulo pero del rectángulo imagen. Aunque el ángulo entre los meridianos y los paralelos sí es preservado. En general, el comentario anterior nos indica que para que se preserven los ángulos tienen que ocurrir dos cosas:

i) que se preserve el ángulo entre los meridianos y los paralelos (90^o);

ii) que la distorsión en la dirección de los meridianos μ sea igual a la distorsión en la dirección de los paralelos λ.

Por el Teorema de Pitágoras, si se cumplen ambas propiedades la distorsión en cualquier dirección es siempre la misma. Para la proyección cilíndrica isoareal de Lambert, $\mu = cos\theta$ y $\lambda = 1/cos\theta$. Finalmente, es obvio que esta aplicación no preserva la geodésicas, solamente los meridianos y el ecuador.

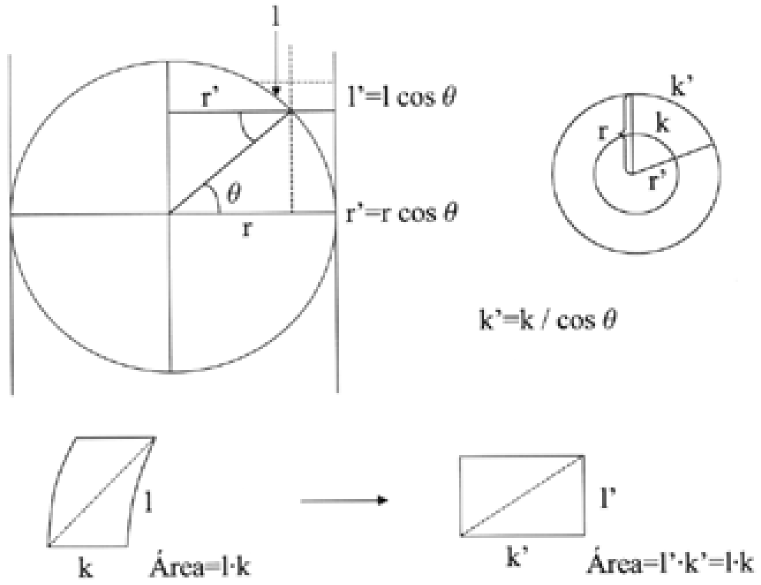

Figura 10

La proyección cilíndrica isoareal de Lambert es una aplicación que preserva, como hemos visto, las áreas. Esta es normalmente la propiedad prioritaria para mapas de interés general, ya que los mapas son un instrumento para transmitir información "de un vistazo", de forma más rápida y precisa que una tabla de números, y en este sentido es importante tener mapas que mantengan las proporciones de las áreas de los territorios. Además, sería también deseable que la deformación en las formas fuese la menor posible. En la actualidad la proyección utilizada por el National Geographic[6] para crear sus mapas temáticos de la tierra es la proyección de Winkel-Tripel (véase la Figura 24), que tiene una distorsión moderada en el área y en la forma, excepto en los polos. En general, nos encontramos este tipo de mapas en divulgación científica, en la educación o en los medios de comunicación, aunque en muchas ocasiones se utilizan los mapas sin ningún criterio objetivo. Otras proyecciones isoareales son la cónica isoareal de Albers, la de Mollweide, la ortográfica de Gall-Peters o la de Eckert IV.

[6]Hasta hace poco fue la proyección de Mercator, que es el mapamundi por excelencia.

4. Proyección central ó gnómica

La proyección central, considerada la proyección más antigua, se le suele atribuir a Tales de Mileto (600 a.c.). Consideramos una esfera y un plano tangente a ella, entonces la imagen de un punto A de la esfera mediante la aplicación central o gnómica, es el punto A' del plano que se obtiene al intersecar este con la recta que pasa por A y el centro de la esfera (Figura 11).

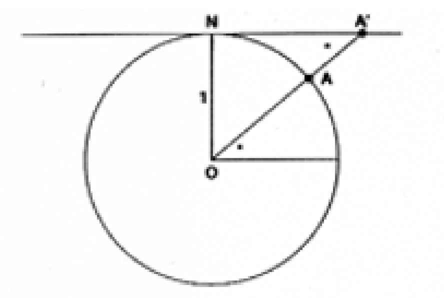

Figura 11

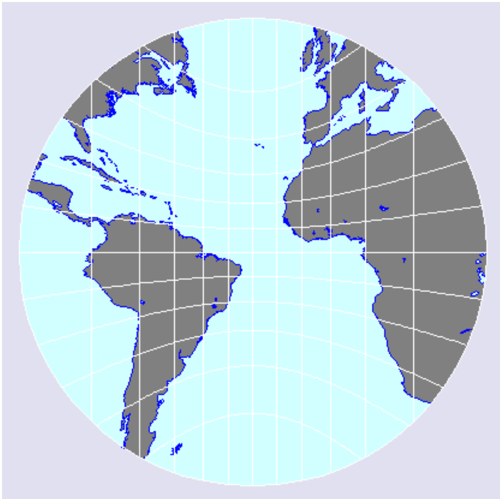

Figura 12

En la Figura 12 podemos ver un mapa realizado haciendo uso de la proyección central. Algunas propiedades:

i) su imagen es circular y solamente cubre un hemisferio, luego necesitamos por lo menos dos para poder ver toda la esfera (menos un círculo máximo);

ii) la distorsión a lo largo de los meridianos y paralelos es[7]

$$\mu = 1/sen^2\theta, \quad \lambda = 1/sen\theta;$$

iii) como demostraremos a continuación, esta proyección preserva las geodésicas, sin embargo, no preserva distancias, ángulos o áreas;

iv) la distorsión de áreas, formas y ángulos, aunque menor cerca del centro, el punto de tangencia, es muy pronunciada según nos alejamos de dicho punto.

[7] Un ejercicio interesante es la obtención de estas distorsiones para la proyección gnómica, así como para otras proyecciones geométricas, como las proyecciones ortográfica y estereográfica.

Teniendo en cuenta que las geodésicas de la esfera son los círculos máximos y que estos se obtienen como la intersección de la esfera con un plano que pasa por el centro de la misma, es trivial que la imagen de un círculo máximo mediante la proyección central es la recta intersección del plano que genera el círculo máximo y el plano de tangencia (ver Figura 13). En consecuencia, nuestra aplicación envía geodésicas de la esfera (círculos máximos) en geodésicas del plano (rectas).

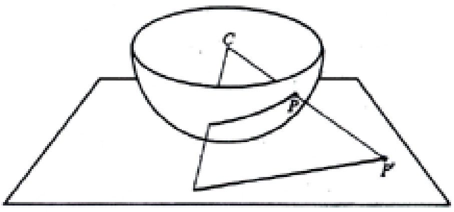

Figura 13

Esta proyección es claramente útil en navegación, aérea o marítima, y suele usarse en combinación con la proyección de Mercator (véase la Sección 5). También, es útil en meteorología o cristalografía. Además, esta es la única carta para la cual los círculos máximos de la esfera son rectas.

5. Proyección de Mercator

El estudio realizado en la Sección 3 sobre la proyección de Lambert nos muestra que esta proyección cilíndrica no preserva los ángulos debido a que la distorsión que se produce en los meridianos $cos\,\theta$ no es igual a la que se produce en los paralelos $1/cos\,\theta$. Esta misma discusión nos da una idea de cómo construir una representación conforme, "estirando" el mapa de Lambert (Figura 9) en la dirección norte-sur de forma que la distorsión en los meridianos pase a ser $1/cos\,\theta$. El mapa isogonal que se genera con esta técnica es el mapa de Mercator (véase la Figura 14, y también la Figura 1 comentada en la introducción).

El mapa de Mercator es sin lugar a dudas el mapa más familiar para todos nosotros e incluso podemos decir que ha sido EL MAPA durante prácticamente cuatro siglos. Este fue diseñado por el cartógrafo flamenco Gerhard Kremer (Gerhardus Mercator es su nombre latinizado), 1512-1594[8], y publicado en 1569 bajo el título "Una nueva disposición de los meridianos con referencia a los paralelos". El mérito de Mercator fue construir un mapa útil en la navegación marítima (en parte heredero de los antiguos portulanos) donde los instrumentos utilizados eran el compás, el semicírculo graduado, la regla y, por supuesto, la brújula. No hemos de olvidar que era una época de grandes viajes, de descubrimientos, y los navegantes y viajeros

[8]Información sobre su vida y la proyección que lleva su nombre puede ser encontrada por ejemplo en [http:www.ualberta.ca/ ˜ norris/navigation/Mercator.html] y [http://mathsforeurope.digibel.be/mercator.htm].

necesitaban mapas para sus desplazamientos. Los mapas medievales, realizados por los propios navegantes y por otras gentes sin formación matemática, ni científica, no tenían ninguna utilidad en lo que se refiere a la navegación y, en general, para realizar ningún tipo de medición sobre ellos. Como consecuencia, en muchas ocasiones los barcos llegaban a zonas muy alejadas del destino marcado o incluso a lugares desconocidos. Los marinos para guiarse se servían de colecciones de notas personales sobre los trayectos realizados en sus viajes, basadas en mediciones de distancias, rumbos, observaciones astronómicas y reconocimiento de costas, que se conocieron con el nombre de portulanos. Posteriormente, se empezaron a redactar libros con dichas notas y también se trazaron cartas náuticas que hacían uso de esta información, las llamadas "cartas portulanas" o portulanos (una de las características de estos eran las rosas de los vientos de las que partían líneas que marcaban los rumbos), véase la Figura 15.

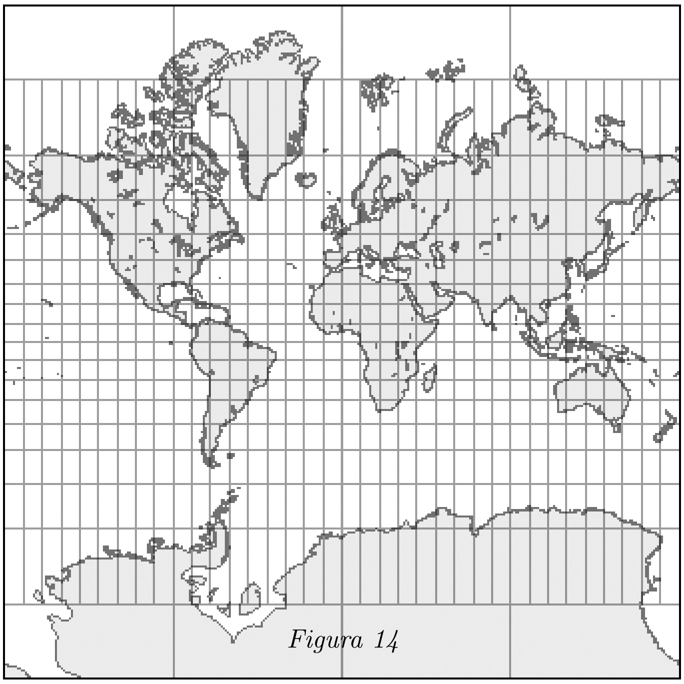
Figura 14

Sin embargo, Mercator, Ortelius y otros cartógrafos de la época tenían cierta formación científica, matemática y astronómica, y dieron paso a lo que se ha dado en llamar la *nueva cartografía*. Mercator además de cartógrafo, tenía un negocio en el que se dedicaba a realizar trabajos de campo, a fabricar instrumentos, a producir globos y mapas y, por supuesto, a venderlos. Por lo tanto, su interés es producir un buen mapa para la navegación no era sólo científico, sino también comercial. Como ya hemos comentado, la solución de Mercator al problema de construir un mapa útil para los navegantes fue construir una "rejilla" de meridianos y paralelos representados por rectas, para posteriormente espaciar los paralelos para compensar la distorsión que se produce en los meridianos y obtener así que la distorsión en meridianos y paralelos es la misma. Por supuesto, la solución de Mercator en su mapa de 1569 (Figura 16) fue aproximada, aún así no sabemos cómo lo hizo exactamente ya que no dejó ninguna explicación de la proyección, ni tablas que

Figura 15

expliquen la distorsión, por lo tanto, nadie más podía producir mapas utilizando su proyección. Tampoco dio ninguna guía práctica de cómo utilizar su mapa. Por este motivo, este mapa no se hizo muy popular hasta 30 años más tarde cuando E.Wright (matemático del Caius College, Cambridge) publicó una explicacióndelmismo.Wright modificó el sistema de Mercator y publicó sus resultados en 1599, *"The Correction of Certain Errors in Navigation"*, y posteriormente, en su libro *"Certain Errors in Navigation, detected*

Figura 16

and corrected" (1610). Este libro contenía nuevas tablas matemáticas e instrucciones para obtener rumbos fijos en mapas basados en la proyección de Mercator (método que se ha mantenido hasta nuestros días). Además, Wright dio varias explicaciones matemáticas (véase [http://mathsforeurope.digibel.be/mercator.htm]) y otras más intuitivas, como la que a continuación se describe: imaginemos que nuestra esfera/tierra es un balón contenido en un cilindro tangente a la esfera en el ecuador, entonces empezamos a dar aire al balón y este se va aplastando contra el cilindro, así vamos obteniendo la imagen de la esfera sobre el cilindro. En el artículo *"A curious mixture of maps, dates, and names"* de J. M. Sachs (Mathematics Magazine 60, no. 3, June 1987, 151-153), este comenta que Mercator inventó (1569) su mapa más famoso antes de que las herramientas matemáticas fuesen inventadas, su ecuación utiliza logaritmos (Napier no los inventó hasta 1614), además necesita del cálculo (Newton y Leibniz nacieron 50 años después de morir Mercator), y la geometría diferencial (Gauss, quien introdujo la "geometría diferencial" de superficies, nació en 1777). La proyección de Mercator expresada matemáticamente es:

$$\begin{cases} x & = R\,(\lambda - \lambda_0) \\ y & = R\,Ln\,tan\,(\pi/4 + \phi/2) \end{cases}$$

donde λ es la longitud al este de Greenwich, λ_0 es la longitud del meridiano central y ϕ la latitud norte.

Figura 17

Pero volvamos al mapa de Mercator y sus propiedades:

i) es un mapa de forma rectangular;

ii) los meridianos y los paralelos son rectas que se cortan en ángulo recto;

iii) es una aplicación conforme, por su propia construcción, que no preserva distancias, áreas, geodésicas o formas, como hemos mostrado en la introducción;

iv) las loxodrómicas o líneas de rumbo fijo se transforman en rectas (en la Figura 17 se muestran las imágenes de algunos círculos máximos y loxodrómicas);

v) la distorsión de áreas, formas y distancias es pequeña cerca del ecuador (la escala es real en el ecuador), pero muy fuerte según nos acercamos a los polos. Esta propiedad la hace muy conveniente para regiones cercanas al ecuador.

Como se afirma en la propiedad iv) las curvas de rumbo fijo de la esfera se transforman en rectas en el plano de Mercator. Por consiguiente, si un navegante quiere ir de un punto A a un punto B de la tierra, sólo necesita trazar en el plano la recta que une ambos puntos y tomar el rumbo marcado por la misma. Sin embargo, las loxodrómicas no son geodésicas y por lo tanto, no nos dan el camino más corto entre esos dos puntos, aunque sí el más sencillo de seguir, por ser de rumbo constante. Cualquier otra curva entre esos puntos requiere de continuos cambios de rumbo. Normalmente en la navegación se toma una solución intermedia:

a) trazar una geodésica (recta) en un mapa central (o azimuthal equidistante);

b) romper la geodésica en fragmentos;

c) trasladar los extremos de los fragmentos al mapa de Mercator y unirlos mediante rectas (las loxodrómicas de rumbo constante).

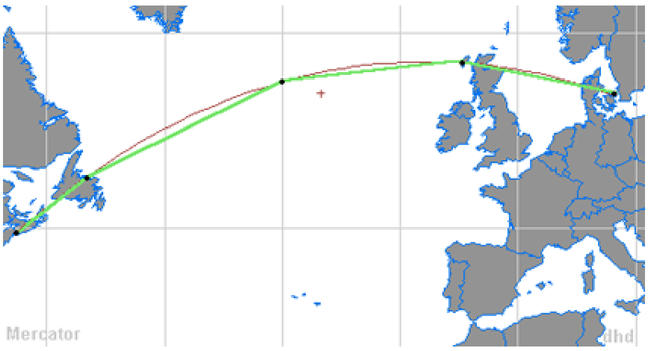

Figura 18

A continuación, vamos a ver diferentes aspectos de esta misma proyección.

Proyección de Mercator Transversal. Si en lugar de considerar el ecuador como curva tangente al cilindro tomamos uno de los meridianos, obtendremos la proyección de mercator transversal, centrada en ese meridiano. Las propiedades de esta proyección:

i) los meridianos y paralelos, y en general, las loxodrómicas, no son rectas;

ii) es una aplicación conforme, preserva los ángulos;

iii) la distorsión cerca del meridiano de tangencia es muy pequeña (además, la escala es real en el meridiano de tangencia) y va aumentando según nos alejamos de este. Esta propiedad hace que esta proyección sea muy importante para mapas, no de todo el globo terráqueo, sino de zonas más pequeñas.

La familia de proyecciones transversales de Mercator que se obtienen al variar el meridiano de tangencia es la base de la UTM (Universal Transversal Mercator) que, junto a la UPS (Universal Polar Stereographic) para los polos, es la proyección universal utilizada para la realización de todo tipo de mapas (temáticos, de carreteras, topográficos,...) de un cierto tamaño (por ejemplo, de Euskadi; véanse las zonas de la Figura 19). La UTM consiste en dividir el globo terráqueo en zonas de 6 grados de longitud y utilizar en cada zona la proyección transversal de Mercator de su meridiano central (Figura 19). El *Mapa Topográfico Nacional* utiliza la UTM.

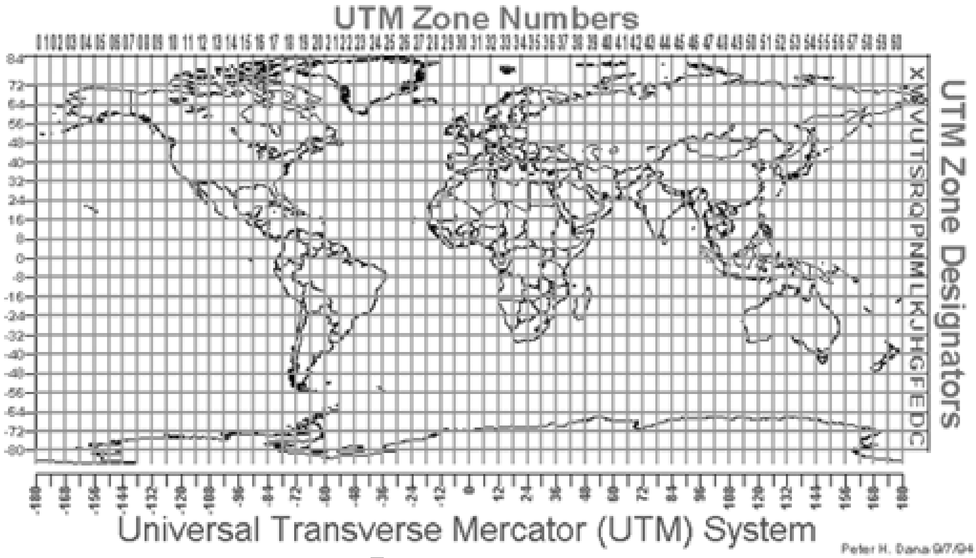

Figura 19

Proyección de Mercator Oblicua. Esta proyección se obtiene si tomamos como circunferencia de tangencia cualquier círculo máximo que no sea el ecuador o los meridianos. Por todo lo comentado hasta ahora es obvio que esta proyección es adecuada para mostrar regiones que se extienden a lo largo del círculo máximo considerado. Una variación de esta es la proyección de Mercator Oblicua Espacial, para la cual no hay apenas distorsión en la curva que esta bajo un satélite. Utilizada para interpretar las imágenes obtenidas por satélite.

Otras proyecciones isogonales son la proyección estereográfica, la aplicación cónica conforme de Lambert o la aplicación cónica conforme bipolar oblicua.

6. ¿Qué significa correctamente? II

Pero volvamos al tema central de esta charla, ¿existen mapas correctos? ¿cómo construir correctamente un mapa de la tierra?. A continuación, vamos a estudiar las aplicaciones de la esfera en el plano que preservan a un mismo tiempo dos de las propiedades métricas que estamos considerando (áreas, ángulos y geodésicas).

En primer lugar, consideremos una proyección de la esfera en el plano que preserve los ángulos y las áreas. Por lo comentado en la Sección 3, si preserva los ángulos entonces la distorsión no varía con la dirección. En particular, la distorsión en los meridianos μ es igual a la distorsión en los paralelos λ. Por otro lado, si se preservan las áreas, $\mu = 1/\lambda$, y en consecuencia, $\mu = \lambda = 1$. Es decir, la aplicación que preserva ángulos y áreas no produce ninguna distorsión, es una isometría. Luego, un método para la construcción de mapas correctos de la esfera-tierra podría ser el diseño de mapas que preserven ángulos y áreas.

Consideremos ahora una proyección que conserve los ángulos y las geodésicas. En tal caso, tomemos un triángulo geodésico en la esfera formado por un arco de círculo máximo entre el norte y el ecuador, otro arco similar formando un ángulo de 90^o con el anterior y el arco del ecuador que conecta los dos anteriores, que forma con cada uno de ellos un ángulo de 90^o, como muestra la Figura 20.

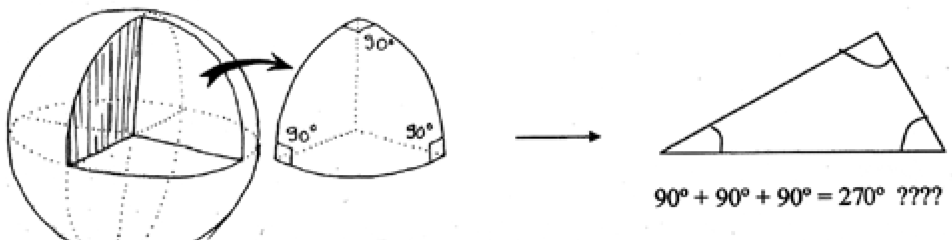

Figura 20

Entonces, la imagen de dicho triángulo geodésico de la esfera sobre el plano será un triángulo (ya que se preservan las geodésicas) con ángulos de 90^o (ya que se preservan los ángulos), pero esto es absurdo porque la suma de los ángulos de un triángulo en el plano es de 180^o y no de 270^o. Por lo tanto, no existen proyecciones de la esfera en el plano que preserven los ángulos y las geodésicas, luego no existen isometrías,

$$\boxed{\textbf{no existen mapas perfectos,}}$$

todos los mapas son falaces en algún sentido. Lo importante, por lo tanto, es considerar mapas en cada momento que se ajusten lo más posible a nuestras necesidades. Este resultado se debe a Euler (1778), *"De repraesentatione superficiei sphaericae* *super plano"*, y también es una consecuencia inmediata del Teorema Egregium de Gauss (1777-1855), que nos dice que la curvatura de Gauss (que es una constante positiva para la esfera y cero para el plano) es invariante por isometrías.

Un pequeño experimento que nos permite constatar de forma intuitiva la validez del resultado anterior es el siguiente. Consideremos una pelota de plástico y cortémosla por la mitad. Tomemos una de las partes e intentemos aplastarla contra una mesa, entonces la pelota se rasga y se abre por las partes rasgadas conforme la vamos aplastando.

Teniendo en consideración el Teorema Egregium de Gauss, podemos afirmar que la única forma de representar correctamente la esfera-tierra es mediante un globo terráqueo. En tal caso, se preservarán de forma trivial todos los valores métricos anteriores, salvo la escala. Sin embargo, como a continuación justificaremos, las importantes desventajas del globo terráqueo descartan su utilización.

i) frágil, abultado, de difícil manejo, transporte y almacenamiento;
ii) muy caro de producir, especialmente para tamaños grandes, y nada práctico para mostrar detalles;
iii) difícil de manejar, manipular para tomar medidas o fijar ángulos;
iv) sólo se puede trabajar con un hemisferio a un tiempo;
v) completamente impracticable para hacer reproducciones por medio de impresión o electrónicamente.

A lo largo de esta charla hemos estudiado proyecciones de la esfera en el plano que preservan ángulos, áreas o geodésicas. Sería interesante obtener mapas con una escala (índice de reducción) constante, es decir, mapas que preservasen las distancias. Pero acabamos de mostrar que esto no es posible, la escala de cualquier representación plana de la tierra no es constante y varía con la dirección y la posición. Sin embargo, existe la posibilidad de construir mapas para los cuales una familia de curvas tenga escala constante y longitud proporcional a las curvas correspondientes sobre la tierra (a estas curvas se les llama líneas standard), o también, que preserven las distancias desde uno o dos puntos. A tales proyecciones se les denomina equidistantes. Veamos un par de ejemplos de este tipo de proyecciones.

Proyección cilíndrica equidistante. Esta proyección, también llamada rectangular, equirectangular o carta plana, es matemáticamente trivial y está definida, en su caso más sencillo y con el ecuador como curva tangente, tomando la longitud y la latitud directamente como coordenadas cartesianas (Figura 21). Mientras que el mapa cilíndrico isoareal de Lambert se comprime en las latitudes altas y el de Mercator se expande, en la carta plana los paralelos están equidistantes. En este mapa los meridianos son líneas standard. Esta proyección es muy buena para mapas de ciudades o de otras pequeñas superficies. Además, también es utilizada para mapas del mundo simples o de regiones con pocos datos geográficos.

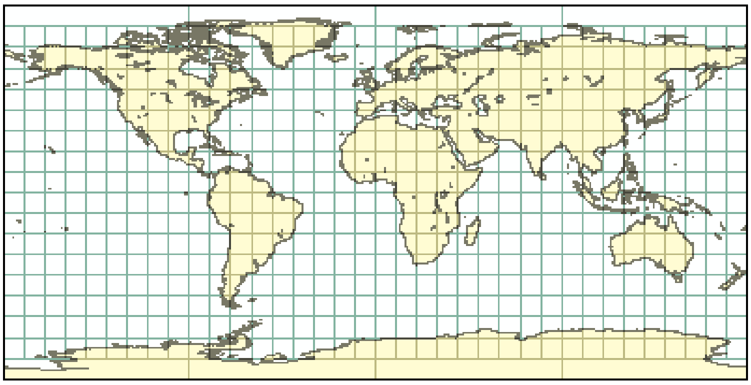

Figura 21

Proyección azimutal equidistante. Esta proyección es muy importante ya que dibuja las geodésicas que pasan por su punto central como rectas y preserva las distancias desde ese punto. Esta proyección azimutal, luego que proyecta la esfera sobre un plano tangente, puede ser producida como otras proyecciones azimutales considerando los meridianos como rectas radiales desde el punto central o de tangencia y con los paralelos como circunferencias concéntricas, pero modificándola en este caso para que estos estén igualmente espaciados. El resultado es un mapa de toda la tierra, que en el caso en el que su centro es el polo norte (Figura 22), es el motivo central de la bandera de las Naciones Unidas. Este mapa es muy interesante para situaciones en las que se necesite considerar distancias o los caminos más cortos desde un punto concreto. Por ejemplo, puede ser considerada por el capitán de un submarino nuclear para determinar qué ciudades están en su radio de destrucción o para considerar los rumbos de los barcos desde un determinado puerto y también, en combinación con la proyección de Mercator.

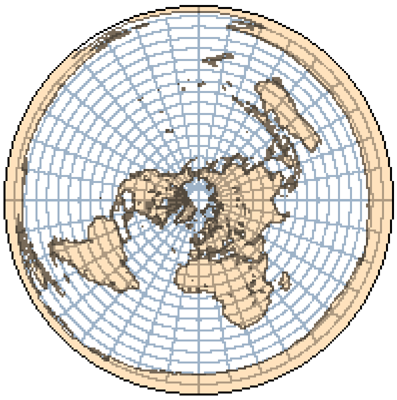

Figura 22

7. Polémica Mercator-Peters

En 1967 el historiador Arno Peters publicó una proyección esencialmente idéntica a la proyección (isoareal) ortográfica de Gall (publicada por el pastor J. Gall en 1855 en la "Scottish Geographical Magazine"). Quizás su creación sea realmente independiente, como el mismo Peters afirma, pero fue fuertemente criticado en el mundo de la cartografía. Sin embargo, esta proyección no tuvo mayor repercusión como creación de Peters, hasta que en un congreso celebrado en 1973 presentó "su" proyección isoareal como alternativa a la proyección "racista" de Mercator. El motivo es que la proyección de Mercator distorsiona el área y las naciones del tercer mundo, Africa y sur de América, se ven pequeñas en comparación con las del primer mundo, norte de América y Europa. La estrategia de Peters fue que su proyección fuese reconocida, sino por los cartógrafos, sí por toda la sociedad al disparar la polémica, llamando racista a la proyección de Mercator, y de forma implícita a todos los que la utilizaban. En cuanto los medios de comunicación tuvieron noticia de esta historia y sin ningún conocimiento de cartografía, al igual que la inmensa mayoría de la sociedad que se vió inmersa en esta polémica, el debate fue público e internacional, y se mezcló con cuestiones que nada tenían que ver con la cartografía.

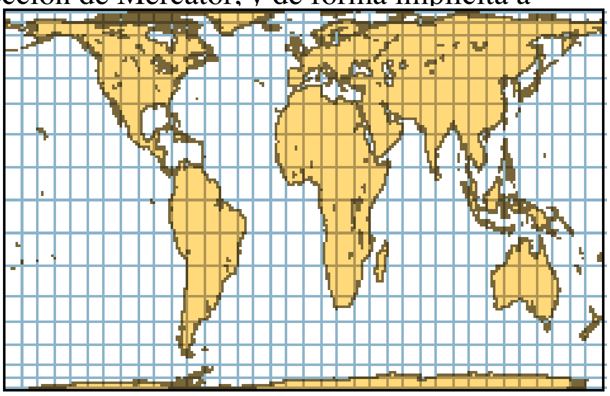

Figura 23

Como hemos visto en esta charla, todos los mapas (y existen cientos [6]) distorsionan las distancias, direcciones, áreas, formas o geodésicas, y por lo tanto, cada mapa preservará las cuestiones que sean necesarias para su uso. Sin embargo, ni la proyección de Mercator, ni la de Gall-Peters (Figura 23), son proyecciones completamente satisfactorias. La primera es conforme, mientras que la segunda es isoareal, sin embargo, ninguna preserva las demás propiedades y ambas producen una gran distorsión en las formas. John Snyder del U. S. Geological Survey afirmó que el mapa de Peters *"no es mejor que otros mapas similares que han sido utilizados en las últimos 400 años"*. Y esta afirmación se entiende perfectamente cuando uno empieza a leer un poco de cartografía y de su historia.

Sin embargo, la polémica siguió creciendo, sobre todo cuando organizaciones cristianas volvieron a publicarla en 1977 e hicieron suya la "lucha" de Peters por extender el uso de su mapa, y cuando algunas organizaciones como la UNESCO la eligieron para publicar sus mapas a partir de entonces. Otras organizaciones, como el National Geographic, hicieron una reflexión más inteligente y cambiaron el uso de la proyección de Mercator para sus mapas de la tierra, por la proyección de Winkel-Tripel que produce una distorsión muy pequeña en el área y también en las formas, lo cual la hace muy interesante para los mapamundis (Figura 24).

Figura 24

Bibliografía

[1] C. A. Furuti, Universidad de Campiñas, Brasil.

www.ahand.unicamp.br/˜furuti/ST/Cart/Normal/TOC/cartTOC.html

[2] *Maps*, Introduction to Pure Mathematics M203, Open University. (VIDEO)

[3] J. C. Polking, *Mapping the Sphere*, Rice University.

math.rice.edu/˜polking

[4] F. Romero, R. Benavides, *Mapas Antiguos del Mundo*, Edimat Libros, 1998.

[5] J. P. Snyder, *An Album of Map Projections*, U. S. Geological Survey, Professional Paper 1453, 1989.

[6] U. S. Geological Survey

mac.usgs.gov/mac/isb/pubs/MapProjections/projections.html

[7] *Images of the World (An Atlas of Satellite Imagery and Maps)*, Collins-Longman Atlases, 1984.

LA CAZA DEL SNARK (1876) (Espasmo II - El discurso del capitán), Lewis Carroll

Al mismísimo capitán todos ponían por las nubes.
¡Qué porte, qué naturalidad y qué gracia!
¡Qué solemnidad, también! ¡Cualquiera podía ver que era un hombre sabio,
con sólo mirarle a la cara!

Había comprado un gran mapa del mar,
sin un solo vestigio de tierra.
Y toda la tripulación estaba encantada, al ver que era
un mapa comprensible para ellos.

"¿Qué utilidad tienen el Ecuador, el Polo Norte y las zonas de Mercator,
los Trópicos y las líneas de los Meridianos?"
Así decía el capitán. Y la tripulación contestaba:
"¡Son solamente signos convencionales!"

"Otros mapas tienen formas, con las islas y los cabos,
pero nosotros debemos agradecer a nuestro valiente capitán
(así hablaba la tripulación) que nos haya comprado el mejor...
¡un perfecto y absoluto mapa blanco!"

Esto era maravilloso, sin duda, pero pronto averiguaron
que el capitán, al que ellos tenían en tan buena estima,
sólo tenía una idea para cruzar el océano,
y ésta era tocar su campana.