La perpetua carrera de Aquiles y la tortuga

por

Marta Macho Stadler, Universidad del País Vasco-Euskal Herriko Unibertsitatea

Zenón es incontestable, salvo que confesemos la idealidad del espacio y del tiempo. Aceptemos el idealismo, aceptemos el crecimiento concreto de lo percibido, y eludiremos la pululación de abismos de la paradoja. ¿Tocar a nuestro concepto del universo, por ese pedacito de tiniebla griega?, interrogará mi lector. J.L. Borges, **Discusión**, "La perpetua carrera de Aquiles y la tortuga".

Nosotros (la indivisa divinidad que opera en nosotros) hemos soñado el mundo. Lo hemos soñado resistente, misterioso, visible, ubicuo en el espacio y firme en el tiempo; pero hemos consentido en su arquitectura tenues y eternos intersticios de sinrazón para saber que es falso. J.L. Borges, **Discusión**, "Avatares de la tortuga".

Yo sé de un laberinto griego que es una línea única, recta. En esa línea se han perdido tantos filósofos que bien puede perderse un mero detective... Para la otra vez que lo mate – replicó Scharlach – le prometo ese laberinto, que consta de una sola línea recta y que es invisible, incesante. Retrocedió unos pasos. Después, muy cuidadosamente, hizo fuego. J.L. Borges, **Artificios**, "La muerte y la brújula".

Etimológicamente, la palabra "paradoja" viene del griego *para-doxos* y significa "contra-opinión". Hoy en día, el término paradoja posee varios significados que tienen como punto común el de hacer referencia a un enunciado o a una creencia contrarias a lo que se espera o a una opinión recibida. Así, al hablar de paradojas, nos referimos a:

- un enunciado que parece contradictorio pero que, de hecho, es cierto;
- un enunciado que parece cierto pero que, de hecho, contiene una contradicción;
- un argumento válido, que conduce a conclusiones contradictorias.

Cicerón decía: *"Lo que los griegos llaman* paradoja*, lo llamamos nosotros* cosas que maravillan*"*.

Históricamente, las paradojas están asociadas con crisis en el pensamiento y con avances revolucionarios.

1. Paradojas visuales

En su día, comencé esta charla mostrando un buen número de imágenes "paradójicas": figuras ambiguas (E.G. Boring), inversión de imágenes (E. Rubin), figuras reversibles (P. Nevell, R. Whistler), figuras imposibles (M.C. Escher, R. Penrose), paradojas de la perspectiva, ilusiones ópticas (talla, contraste,...), desapariciones geométricas (paradojas de Hooper con sorprendentes relaciones con la sucesión de Fibonacci, ¡Abandone la Tierra! de S. Loyd, el conejo desaparecido de P. Curry)... La limitación de espacio no me permite reproducirlas aquí... y es aún más delicado elegir una entre ellas... por ello, os remito a [Fal] que recoge muchas de ellas, y a que "navegueis" por la red, donde podreis encontrarlas sin dificultad.

2. Paradojas del infinito

Desde sus orígenes, la matemática ha chocado con el infinito como un problema crucial. Así lo atestiguan, por ejemplo, la crisis de los irracionales, las aporías (o *caminos sin salida*) de Zenón, el método exhaustivo de Eudoxes, el axioma de Arquímedes, ...

La escuela eleática de filósofos se fundó por el pensador, filósofo y poeta Xenofánes (hacia 600 A.C.), cuya principal enseñanza era que el universo es singular, eterno e incambiable: *"El todo es uno"*. De acuerdo con esta idea, las apariencias de multiplicidad, cambio y moción son meras ilusiones.

Las paradojas de Zenón de Elea son el foco en la relación de lo discreto y lo continuo, una propiedad que está en el corazón mismo de la Matemática.

De los aproximadamente cuarenta argumentos atribuidos a Zenón, los más famosos son los cuatro relacionados con la moción: la dicotomía, Aquiles y la tortuga, la flecha y el estadio. Estas paradojas confundieron a matemáticos durante siglos, y es a partir de los desarrollos de Cantor sobre la teoría de los conjuntos infinitos que éstas se resolvieron plenamente. Aquí únicamente citaremos el segundo y el tercero de estos problemas.

- **Aquiles y la tortuga** (Aristóteles, *Physics*, 239b, 15-18)

Por alguna razón, se acuerda una carrera entre Aquiles y la tortuga. Como Aquiles es mucho más veloz que la tortuga, el héroe permite una cierta ventaja a su adversaria. La prueba asombrosa de Zenón es que Aquiles no puede nunca alcanzar a la tortuga, independientemente de lo rápido que corra y de lo larga que sea la carrera: cada vez que "el perseguidor" alcanza un lugar donde ha estado "la perseguida", la tortuga se adelanta un poco. Algo debe ser falso en el argumento... Al tratar de hacerlo más explícito, la falacia surge de la noción equivocada de que cualquier sucesión infinita de intervalos de tiempo debe sumar toda la eternidad. La solución es sencilamente una cuestión de convergencia de la serie $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots = 1$.

- **La flecha** (Aristóteles, *Physics*, 239b, 5-7)

Supongamos un argumento de Zenón del tipo:

1) un intervalo de tiempo consta de instantes (la menor medida e indivisibles),

2) en cada instante, una flecha no se mueve.

Si se observa el trayecto de una flecha en período de tiempo infinitamente corto, el movimiento correspondiente a cada observación es nulo. La acumulación de todos estos "ceros" da aún cero, así que, la flecha ha estado siempre inmóvil.

¡Esto no tiene sentido! Una respuesta consiste en aceptar que la flecha está en reposo en cada instante, pero rechazar que esto implique que la flecha no se mueve. Lo que se precisa para que la flecha se mueva, es esté en diferentes sitios y en distintos momentos. Un instante no es suficientemente grande para que el movimiento tenga lugar: el movimiento es una relación entre objetos, lugares y varios instantes. Un objeto está en reposo en un instante justo cuando está en la misma posición en todos los instantes cercanos, y está en movimiento en un instante si está en distintos sitios en instantes cercanos. En resumen, el argumento es una falacia: la conclusión de que la flecha está siempre en reposo implica que, en cada instante, la flecha está en el mismo lugar en instantes cercanos. Una tal información no está contenida en la premisa... *Así, la paradoja de la flecha es un ejemplo de una conclusión inaceptable* (la flecha no se mueve) a partir de una premisa aceptable (ningún movimiento ocurre "durante" un instante), por un razonamiento inaceptable.

La paradoja ha sido sorprendentemente recuperada por la física cuántica: a nivel subatómico, la única manera de medir un sistema es interferir en él. Esto es, para observar una partícula se interfiere en las partículas cercanas, lo cual afecta la moción de la partícula medida. Este es el *principio de incertidumbre de Heisenberg* (Premio Nobel en 1932): el simple acto de la observación cambia el sistema. Se puede conocer la velocidad o la posición de una partícula, pero no ambas a la vez.

En los años 60 y 70, físicos soviéticos y americanos llegaron a la conclusión que la paradoja podía funcionar a nivel cuántico. Una aplicación (teóricamente) posible: evitar que las radiaciones escaparan de los residuos nucleares, al no tener tiempo de escapar del átomo. G. Kurizki y A. Kofman (Instituto de Ciencias Weizmann), acaban de probar que esto es cierto en teoría, pero no funciona en la práctica. Según sus cálculos, el proceso de desintegración del átomo está dotado de una "memoria". Mientras que la radiación no se ha escapado del átomo, éste "se acuerda" de su estado anterior y permanece inestable. Este estado dura menos de una millonésima de millonésima de segundo. Para congelar la radiación en el interior del átomo, habría que segmentar la observación en períodos aún más cortos. Pero, sobre intervalos tan cortos, la materia cambia de apariencia: se empieza a ver aparecer el movimiento de las partículas elementales que la componen. El sistema se ha transformado y el problema de la radiación ya no existe (no se trata de observaciones reales, sino de lo que "se vería" en teoría). Inversamente, si el intervalo de tiempo entre cada observación sobrepasa ligeramente el período de memoria del átomo, la tasa de desintegración parece más elevada y el nivel de radiación parece aumentar. No solamente la paradoja de Zenón ya no funciona, sino que su efecto se ha invertido: en la práctica, "la flecha" vuela dos veces más deprisa.

La Mecánica Clásica no sólo da sentido a la velocidad instantánea, sino también a nociones más sofisticadas: proporción de cambio de velocidad en un instante (es decir, aceleración o deceleración instantáneas), proporción de cambio de aceleración en cada instante, y así sucesivamente.

3. Paradojas lógicas

B. Russell (Nobel Literatura 1930 y Medalla Fields 1966) descubrió esta paradoja en 1901, trabajando en sus "Principles of Mathematics". Russell escribió a G. Frege con noticias de su paradoja en 1902, ya que probaba que los axiomas que Frege utilizaba para formalizar su lógica eran inconsistentes.

Cantor define la relación de *equipotencia* de dos conjuntos infinitos como la existencia de una biyección del uno sobre el otro. Dos conjuntos *equipotentes* tienen el mismo *número cardinal*. La *potencia* (o *cardinal*) de un conjunto infinito es pues la extensión al caso de los conjuntos infinitos del concepto de número finito, y la equipotencia es la extensión de la noción de igualdad. El más notable logro de Cantor consitió en demostrar con rigor matemático, que la del infinito no era una noción indiferenciada: no todos los conjuntos infinitos son "de igual tamaño", por consiguiente es posible establecer comparaciones entre ellos. En particular:

Teorema de Cantor: *Dado un conjunto C, existe otro de mayor cardinalidad, el conjunto de sus partes $\mathcal{P}(C)$.*

Russell descubre la contradicción al considerar el teorema de Cantor: el conjunto de todas las "cosas" U debe tener mayor cardinalidad que cualquier otro, porque todo elemento de un conjunto (y todo conjunto) es una "cosa". De allí se sigue que $\mathcal{P}(U)$ debe de estar contenido en U, en cuyo caso el cardinal de U es mayor o igual, y así el resultado cantoriano debía ser erróneo.

Existía un postulado que implícitamente se venía tomando como base para la teoría de conjuntos, llamado *principio de comprensión* que de manera informal dice "dame una propiedad y te daré un conjunto", esto es, dada $P(x)$, existe $\{x : P(x)\}$. Lo que hizo Russell fue refutarlo, tomando $P(x) = (x \notin x)$ y deduciendo una contradicción. El principio de la comprensión surgió de la lógica tradicional de corte aristotélico: era costumbre asociar a cada concepto una clase de objetos correspondientes y esta práctica, elevada a principio, originó el postulado. Al invalidar el principio de la comprensión, la contradicción russeliana echó por tierra lo que se ha llamado teoría *ingenua* de conjuntos.

Las propuestas de solución más importantes a la paradoja fueron:

• la complicada y filosófica teoría de tipos de Russell: deben arreglarse todas las sentencias en una jerarquía consistente en sentencias (en el nivel más bajo) sobre individuales, sentencias (en el siguiente nivel) sobre conjuntos de individuales, sentencias (en el siguiente nivel) sobre conjuntos de conjuntos de individuales,... es entonces posible referirse a todos los objetos para los que una determinada condición (o predicado) es cierto sólo si están ambos en el mismo nivel o son del mismo tipo. Así, una expresión de la forma $x \in x$ no se considera como válida;

- la elegante axiomatización de E. Zermelo: se elimina el principio de comprensión. Zermelo incluyó de manera destacada el llamado "axioma de elección". El plan de Zermelo era el de admitir en la teoría de conjuntos sólo aquellas clases de las que verosímilmente no pudieran derivarse contradicciones.

La causa de estas paradojas de clases radica en la definición de un objeto en términos de una clase que contiene como elemento al objeto que se está definiendo. Tales definiciones se llaman *impredicativas*, y aparecen de manera especial en la teoría de conjuntos. Como hizo observar Zermelo en 1908, este tipo de definición se utiliza también para definir el extremo superior de un conjunto acotado de números reales y otros conceptos del Análisis. Así pues, el Análisis contiene paradojas.

4. Paradojas semánticas

Observemos la siguiente afirmación:

L: *Lo que estoy diciendo ahora es falso.*

Si L es verdad, es falsa, y si es falsa, es verdad. ¿Es esto paradójico? Tenemos dos afirmaciones condicionales:

1) si L es verdad, entonces es falsa.

2) si L es falsa, entonces es verdad.

Asumiendo que cuando algo es falso no es verdad, y que todo lo que es verdad no es falso, 1) y 2) quedan:

1*) si L es cierta, entonces es no cierta.

2*) si L es falsa, entonces es no falsa.

Este es un principio de razonamiento llamado *consequentia mirabilis*: el principio dice que si algo implica su propia negación, se puede inferir su negación. Ambas 1*) y 2*) dan argumentos para este principio. El primero no asegura que L es cierto, implica su negación, luego el principio nos lleva a inferir que L es no cierto. El segundo, de manera exactamente paralela, no lleva a inferir que L no es falso. Así que un razonamiento standard nos garantiza que L es no cierto y no falso. Luego L no es cierto ni es falso. ¿Es esto paradójico?

No, excepto si es cierto un *principio de bivalencia*, un principio que dice, de manera esquemática, que toda sentencia es cierta o falsa. ¿Es todo principio de bivalencia cierto? Las preguntas se expresan en sentencias, pero no toda pregunta es o bien cierta o bien falsa. Supongamos entonces que restringimos el principio a sentencias declarativas. Aún hay contraejemplos: consideremos el siguiente enunciado

Has dejado de fumar.

Si tú nunca has fumado, la sentencia es ciertamente no cierta, pero decir que es falsa sugiere que sigues fumando...

La creencia intuitiva de como el principio de bivalencia se alcanza, es que toda representación no defectuosa de como las cosas están en el mundo, debe ser o bien correcta o incorrecta, verdadera o falsa. De acuerdo con Tarski, el concepto ordinario de *verdad* es incoherente y debe ser rechazado y reemplazado por una serie de "conceptos de verdad", jerárquicamente ordenados, y cada uno expresado en un lenguaje diferente de cada lenguaje natural (es decir, de cada lenguaje que evoluciona de manera natural). Esta es la famosa *jerarquía de Tarski*. Mucha gente ha pedido algo menos radical, una respuesta que preserve más de nuestro pensamiento y lenguaje ordinario.

La primera paradoja semántica fue descubierta por G.G. Berry aproximadamente en 1904. Berry es conocido por la manera en que se presentó ante Russell: le entregó una nota que decía *"el enunciado al reverso de esta tarjeta es verdadero"*. Al reverso de la tarjeta estaba escrito *"el enunciado al reverso de esta tarjeta es falso"*.

Russell afirma que ambas paradojas (la del mentiroso y la de Berry) tienen un origen común, porque ambas se derivan de infringir lo que se llama el *principio del círculo vicioso*.

5. Paradojas de la "vaguedad"

Sorites es la palabra griega para "montón" o "pila". Una paradoja de tipo "sorites" es el nombre dado a una clase de argumentos paradójicos, que se derivan de los límites indeterminados de aplicación de los predicados envueltos.

Es una serie de puzzles atribuidos al lógico Eubulides de Mileto, que incluyen:

- *el hombre con capucha*: dices que conoces a tu hermano, este hombre con la cabeza cubierta es tu hermano y dices que no le conoces...

• *el hombre calvo*: ¿describirías a un hombre con un pelo en la cabeza como calvo? Si... ¿describirías a un hombre con dos pelos en la cabeza como calvo? Si... ¿dónde está la frontera?

• *la pila de arena*: un grano de arena no es un montón, si un grano de arena no es un montón, tampoco lo son dos granos de arena... si 9999 granos de arena no son un montón, tampoco los son 10.000 granos. Por lo tanto, 10.000 granos de arena no son un montón.

El problema en estos argumentos es que las palabras clave ("calvo " o "montón") son palabras "vagas", no precisas.

Algunas respuestas a esta paradoja son:

1) el acercamiento a un "lenguaje ideal", cuyo atributo clave es su precisión: la vaguedad del lenguaje natural es un defecto a eliminar (G. Frege y B. Russell);

2) la introducción de lógicas multivaluadas (no clásicas), como la "lógica difusa" de G. Goguen y L. Zadeh (1969), que sustituye a la usual (dos-valuada), que reconoce para un objeto "los grados" de verdad;

3) o sencillamente, aceptar la paradoja: no conoces a tu hermano, todos los hombres son calvos, ninguna cantidad de granos de arena hace un montón...

6. Paradojas de la confirmación

Son problemas de lógica inductiva, que no vienen de una contradicción lógica, sino que se deben a las consecuencias lógicas que se siguen de dos principios de la lógica inductiva: el principio de la confirmación y el de la equivalencia. Aunque ambos principios son perfectamente legítimos, es su conjunción en el problema el que conduce a la paradoja.

C. Hempel, afirma que la existencia de una vaca de color violeta incrementa la probabilidad de que los cuervos sean negros. ¿Por qué? Para contestar a esto, establezcamos la ley "*Todos los cuervos son negros*", de una manera diferente, pero lógicamente equivalente "*Todos los objetos no-negros no son cuervos*". Hempel argumenta: he encontrado un objeto no-negro: una vaca violeta. Por lo tanto, esto (débilmente) confirma la ley "*Todos los objetos no-negros no son cuervos*". Y así, también confirma la ley equivalente "*Todos los cuervos son negros*". Es fácil encontrar millones de objetos no-negros que no son cuervos, confirmando así de manera más fuerte la ley.

El problema con la paradoja del cuervo es encontrar la trampa: la opinión de Hempel es que, observando objetos no-negros, se confirma la ley "*Todos los cuervos son negros*", pero sólo a un nivel "infinitesimal". La razón por la que el procedimiento parece extraño, dice Hempel, es porque la clase de objetos en la tierra que no son cuervos es tan enormemente grande comparada con las que son cuervos, que el grado con en el cual un no-cuervo que es no-negro confirma la hipótesis es despreciable. Y ahora, el truco: los oponentes a Hempel afirman que el encontrar una vaca violeta es también, por el mismo razonamiento, una forma de confirmar la ley "*Todos los cuervos son blancos*". Y la paradoja surge, ahora al preguntarnos, ¿puede el mismo objeto - una vaca violeta - confirmar a la vez "*Todos los cuervos son negros*" y "*Todos los cuervos son blancos*" a la vez?

La siguiente paradoja surge como una meditación de la paradoja del cuervo: se define un objeto como *verul*, si observado antes del tiempo t es verde, y azul después de t. Si t es un tiempo futuro, por ejemplo, el 1 de enero de 2002, ¿qué puede decirse de una esmeralda adquirida en 1975? N. Goodman (1946) afirma que decir que las esmeraldas son verdes o verules es igual de consistente... en ambas afirmaciones hay tiempo por medio y ambas se confirman empíricamente.

7. Paradoja de Banach-Tarski

Es una de las más sorprendentes consecuencias del axioma de elección: *es posible (teóricamente) cortar un guisante en un número finito de trozos y reajustarlos (con rotaciones y traslaciones) hasta obtener una bola de la tamaño del sol.*

Demostrada en 1923, la paradoja de Banach-Tarski permite probar que no existe una medida universal simplemente aditiva sobre $\mathbb{R}^3$, mientras que si existe sobre $\mathbb{R}^2$.

Dados $A, B \subset \mathbb{R}^3$, diremos que son *superponibles*, $A\mathcal{D}B$, si existe un desplazamiento D de $\mathbb{R}^3$, tal que $B = D(A)$. $\mathcal{D}$ es evidentemente una relación de equivalencia. Un *recorte* de A es una partición finita $\{A_1, \ldots, A_n\}$ de A. Se dirá que A y B son *puzzle-equivalentes* si existe un número entero y dos recortes $\{A_1, \ldots, A_n\}$ y $\{B_1, \ldots, B_n\}$ de A y B respectivamente, tales que para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ sea $A_i\mathcal{D}B_i$. Se denotará $A\mathcal{P}B$, y se trata evidentemente de una relación de equivalencia sobre las partes de espacio.

La paradoja de Banach-Tarski afirma que toda bola de $\mathbb{R}^3$ puede descomponerse en un número finito de subconjuntos dos a dos disjuntos que, recombinados, forman dos bolas del mismo radio que la bola original. Como los movimientos preservan el volumen, alguna de las piezas en las que se descomponen los conjuntos ¡no puede ser medible Lebesgue!

Teorema de Banach-Tarski *Si A y B son dos partes del espacio acotadas y de interior no vacío, entonces A y B son puzzle-equivalentes.*

Este teorema se basa en el Teorema de Hausdorff:

Teorema de Hausdorff *Existe un recorte (A, B, C, D) de la esfera unidad de $\mathbb{R}^3$, con D numerable, A, B y C superponibles y $A\mathcal{D}(B \cup C)$.*

Este teorema da lugar a *la paradoja de la esfera*, ya que el anterior resultado prueba que, salvo un conjunto numerable, A es a la vez "la mitad" y "el tercio" de la esfera. Así, el problema de la duplicación de una esfera está prácticamente resuelto: basándose en este tipo de descomposiciones, se prueba que una reunión finita de bolas de radio 1 es puzzle-equivalente a la bola unidad. De aquí, se demuestra que toda parte acotada y no vacía de $\mathbb{R}^3$ es puzzle-equivalente a la bola unidad.

La motivación de Hausdorff al dar estos resultados era el de encontrar una "medida universal" sobre la esfera, es decir, una medida no nula definida sobre todas las partes de la esfera e invariante por isometrías. La paradoja de la esfera da una respuesta negativa a esta afirmación.

Es imposible realizar la descomposición paradójica de la bola físicamente, ni siquiera imaginarla (aunque ¡sólo con cinco trozos se transforma una bola en dos!). Además, hay que señalar que el razonamiento siguiente no tiene sentido: el volumen de la bola de partida debe ser igual a la suma de los volúmenes de los trozos, que debe ser igual al volumen de la bola de llegada. En efecto, los trozos tienen una forma tan extraña que no se puede ni siquiera hablar de su volumen: éstas piezas son *no medibles* (es decir, las funciones que habría que integrar para determinar su volumen no son medibles ni en el sentido clásico de Riemann, ni en el sentido generalizado de Lebesgue).

Estos resultados están entre las primeras utilizaciones importantes del axioma de elección (*existe una aplicación $\varphi \colon P(E) - \{\emptyset\} \longrightarrow E$, tal que para cada $X \subset E$ sea $\varphi(X) \in X$, es decir, una aplicación que elige un elemento de cada parte de E*); de hecho la paradoja de Banach-Tarski no puede demostrarse sin el axioma de elección.

8. Paradoja del condenado

De las varias formas en que esta paradoja ha sido formulada, la del sentenciado a muerte es, probablemente, la más conocida:

Un rey de honestidad reconocida, pronuncia su fallo: *Una mañana de este mes serás ejecutado, pero no lo sabrás hasta esa misma mañana, de modo que cada noche te acostarás con la duda, que presiento terrible, de si ésa será tu última sobre la Tierra.*

En la soledad de su celda, el reo argumenta: *si el mes tiene 30 días, es evidente que no podré ser ajusticiado el día 30, ya que el 29 por la noche sabría que a la mañana siguiente habría de morir. Así que el último día posible para cumplir la sentencia es el 29. Pero entonces, el 28 por la noche tendré la certeza de que por la mañana seré ejecutado...*

Continuando de este modo, el prisionero concluye triunfalmente que la condena es de ejecución imposible, y comienza a dormir aliviado, aguardando que transcurra el mes para pedir su libertad. Sin embargo, ¡sorpresa!, el día 23, el verdugo, con el hacha afilada en la mano, despierta al reo. Instantes más tarde, es decapitado. La sentencia se cumple literalmente. ¿Dónde falló el razonamiento del prisionero?

Una solución puede pasar por la noción fundamental de que no es lo mismo el día 30, más el día 29, más el día 28, etc., que "el mes" o "la semana". Un conjunto es diferente y contiene cualidades distintas de la mera adición de sus partes. La comprensión de las características diferenciales de un conjunto con respecto a las de cualquiera de sus componentes lleva a la resolución de esta paradoja. El análisis individual, día por día, por parte del prisionero es tan irreprochable como el análisis de Zenón, paso por paso, de la carrera de Aquiles. El defecto de su argumento aparece cuando atribuye al conjunto "este mes" las mismas y exclusivas cualidades que poseían sus partes "cada día", no advirtiendo que el conjunto "mes" ha incorporado, por ejemplo, la cualidad de contener "días sorpresivos", cualidad que no tienen individualmente sus días componentes.

Hacia el siglo III, el filósofo chino Hui Tzu afirmaba que: *Un caballo bayo y una vaca parda son tres: el caballo, la vaca, y el conjunto de caballo y vaca.* El razonamiento no es trivial: disfrazado y presentado de modo más complejo constituye la paradoja del condenado.

Existe una variante, la contenida en el cuento **El diablo de la botella** de R. L.

Stevenson: una botella indestructible (porque su *ha sido templado en las llamas del infierno*) contiene un diablillo, el dueño de la botella puede pedir al diablo que le conceda (casi) cualquier deseo. Si alguien muere siendo el dueño de la botella, va al infierno y arde por toda la eternidad... el dueño sólo se salva si vende la botella a alguien por menos de lo que él pagó, si no lo hace de ese modo, la botella volverá irremediablemente a él...

... La persona que compre esta botella tendrá al diablo a su disposición, todo lo que la persona desee: amor, fama, dinero, casas como ésta e incluso una ciudad como San Francisco, todo, absolutamente todo, será suyo con sólo pedirlo. Napoleón fue dueño de esta botella, y gracias a ella llegó a ser el rey del mundo; pero la vendió al final, y ésa fue la causa de su fracaso ...

... Hay una cosa que el Diablo no puede hacer: prolongar la vida; y no sería honrado ocultarle a usted que la botella tiene un inconveniente: si un hombre muere antes de venderla, arderá para siempre en el infierno....

... Hace mucho tiempo, cuando el demonio la trajo a la tierra, era extraordinariamente cara, y fue el Preste Juan el primero que la compró por muchos millones de dólares; pero únicamente puede ser vendida si se pierde dinero en ello. Si se vende por la misma cantidad que se ha pagado por ella, vuelve al anterior dueño como lo haría una paloma mensajera. por eso el precio ha ido bajando de siglo en siglo y ahora la botella resulta realmente barata...

... ¿Cómo? - exclamó Keawe - ¿dos centavos? Entonces usted sólo puede venderla por uno. Y el que la compre... Keawe no pudo terminar la frase. El que comprara la botella no podría venderla nunca, y la botella y el diablo se quedarían con él hasta su muerte, y cuando muriera sería llevado a las llamas del infierno...

Está claro que no compraremos la botella por 1 centavo, porque entonces no podríamos venderla a un precio inferior. Tampoco la compraremos por 2 centavos, porque nadie querrá comprarla luego por 1 centavo, por el mismo motivo. Tampoco daremos 3 centavos por ella, pues la persona a la que tendremos que vendérsela por 2 centavos no la podrá vender por 1. El mismo razonamiento puede aplicarse al precio de 4 centavos, de 5 centavos, de 6, de 7, etc. La inducción matemática, demuestra concluyentemente que no la deberíamos comprar por ninguna cantidad. Sin embargo, es casi seguro que la compraríamos por 1000 dólares. ¿En qué punto se vuelve convincente el razonamiento que desaconseja comprarla? La respuesta es que la compra no es racional...

9. Paradoja de San Petesburgo

La paradoja de San Petesburgo jugó un papel importante en el desarrollo de la teoría de decisión y el concepto de función de utilidad del dinero. Trata sobre el cálculo de probabilidades y el concepto abstracto de esperanza matemática. Se debe a N. Bernoulli (1713).

La pieza del dramaturgo inglés T. Stoppard (1966) **Rosencrantz y Guildenstern han muerto**, se abre con una escena en donde los dos héroes (personajes secundarios de **Hamlet**, de W. Shakespeare) juegan a cara y cruz:

Dos isabelinos pasan el rato en un lugar indeterminado. Están impecablemente vestidos; no les falta un detalle: sombrero, capa, bastón. Cada uno lleva en la mano un voluminoso monedero. El monedero de GUILDENSTERN está casi vacío. El monedero de ROSENCRANTZ está casi lleno. Razón: apuestan lanzando las monedas de la siguiente manera: Guildenstern saca una moneda de la bolsa, la lanza al aire y la deja caer. Rosencrantz la observa atentamente, y dice: "cara (lo que es verdad) *y la mete en su monedero. Repiten la misma operación que llevan realizando, por lo que parece desde hace un buen rato. La continua serie de "caras" es imposible, y, sin embargo, Rosencrantz no muestra la menor sorpresa. Pero es lo bastante educado como para sentirse molesto por ganar tanto dinero a su amigo. Este será el rasgo dominante en su actitud. Guildenstern se da perfecta cuenta de lo extraño del hecho. No le preocupa tanto el dinero como las implicacciones que el hecho comporta; está inquieto, aunque no experimenta el menor descontrol. Este será el rasgo dominante de su actitud. Guildenstern está sentado; Rosencrantz de pie* (cambia continuamente de sitio para recoger las monedas) *Guildenstern lanza una moneda, Rosencrantz la mira con atención.*

Rosencrantz: *Cara.* (Coge la moneda y la mete en su bolsa; la operación se repite). *Cara.* (Otra vez).

Rosencrantz: *Cara.* (Otra vez). *Cara.* (Otra vez). *Cara.*

Guildenstern: (lanzando una moneda)*: El despertar el interés es todo un arte.*

Rosencrantz: *Cara.*

Guildenstern: (lanzando otra moneda)*: Aunque todo ocurra por azar. (...)*

Guildenstern: *Esto debe significar algo, aparte de una redistribución de la riqueza.* (Reflexionando). *Lista de explicaciones posibles. Uno: Yo lo deseo en el fondo. En mi interior, donde nada se distingue, soy la esencia de un hombre* *lanzando monedas a cara o cruz y que apuesta contra sí mismo en íntima expiación de un pasado perdido en la memoria* (Lanza una moneda a Rosencrantz).

Rosencrantz: *Cara.*

Guildenstern: *Dos: El tiempo se ha detenido de pronto y la experiencia única de una moneda lanzada una sola vez se ha repetido noventa veces...* (Arroja una moneda, la mira y se la da a Rosencrantz. *Dudoso, en su conjunto. Tres: intervención divina...*

Guildenstern: ... *Noventa y dos monedas han salido cara consecutivamente, noventa y dos veces consecutivas..., y en los tres últimos minutos he oido en el viento de un día sin viento el rumor de la flauta y de los tambores...*

Cuando los protagonistas están cansados de lanzar simplemente las monedas, Rosencrantz propone una variante: lanzará una moneda hasta que salga cara: si ésto sucede en la primera tirada, dará 1 moneda a Guildenstern, en la segunda tirada, 2 monedas, en la tercera, 4 monedas, y así sucesivamente, doblando la cantidad cada vez que la pieza cae en cruz. La pregunta es: ¿cuánto dinero debe pagar Guildenstern a Rosencrantz para que el juego sea equitativo? El problema se resuelve fácilmente en términos de esperanza matemática de ganar: la probabilidad del evento "*cara aparece en la tirada n*" es $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n}$. La esperanza de ganar de Guildenstern es pues la suma:

$$\frac{1}{2} + 2\left(\frac{1}{2}\right)^{2} + 2^{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{3} + 2^{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{4} + ... + 2^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n} + \dots$$

Todos los términos de la suma son $\frac{1}{2}$. Es decir, finalmente, la esperanza de ganar de Guildenstern es infinita. Así, en honor a la equidad, el juego no debería tener lugar.

Se observa que la progresión de la ganadas es muy rápida serie geométrica de razón 2. Se podría reemplazar 2 por un número inferior q y retomar los cálculos: la esperanza de ganada de Guildenstern es entonces de $\frac{1}{2} - q$, pues teniendo en cuenta nuestra hipótesis sobre q, el límite de $\left(\frac{q}{2}\right)^{n}$ es cero. La ganada infinita de Guildenstern aparece como caso límite cuando q tiende a 2. Haciendo variar q, se puede entonces establecer la lista de las ganadas de Guildenstern y el dinero que deberá ceder a Rosencrantz al principio del juego. En todos los casos, y en ausencia de cualquier restricción, parece preferible renunciar a este juego, tan azaroso, tanto en el papel de Guildenstern como en el de Rosencrantz.

10. Paradoja de Olbers

¿Por qué la noche es oscura? El sentido común nos dice que las noches son oscuras porque el Sol se ha ocultado tras el horizonte y su luz deja de iluminarnos hasta que la rotación terrestre nos lleve a un nuevo día.

Ya J. Kepler en el año 1610 se preguntaba sobre un Universo infinito, con infinitas estrellas. En **Dissertatio cum Nuncio Sidereo** afirmaba que era difícil que existiera ese Universo, porque el cielo debería ser tan luminoso como el Sol, por lo que aquel debía ser finito. Esta reflexión fue de nuevo planteada en el siglo XVIII por el astrónomo inglés E. Halley y el suizo J.P. Cheseaux. Pero fue el doctor en medicina y aficionado a la astronomía, así como a las matemáticas, H. Olbers quien presentó y desarrolló la teoría que, posteriormente, fue conocida como *paradoja de Olbers* (1826): *si el universo fuese infinito y estuviese lleno de estrellas, deberíamos recibir 184.000 veces más energía y luz de todo el cielo que lo que recibimos del Sol. Deberíamos ver el cielo absolutamente cubierto de estrellas y sin vacíos de oscuridad, por lo cual el cielo debería ser una superficie iluminada igual que el disco solar (sería como hacer crecer el disco del Sol hasta que cubra todo el cielo de horizonte a horizonte). Un universo así sería como vivir en un horno...*

En febrero de 1848, E.A. Poe publicó el "poema en prosa" **Eureka**, en el que se da la primera solución cualitativa a la paradoja de Olbers, según afirma E. Harrison en su texto **Darkness at night. A riddle of the Universe**, Harvard Univ. Press, 1987. En **Eureka**, las premisas son metafísicas, algo inocentes y las discusiones más científicas son a menudo vagas y a veces erróneas. Pero de sus especulaciones metafísicas, se llega a la conclusión de que el universo está en expansión. Nadie se percató de estas especulaciones de un científico amateur y Poe murió antes de que se divulgara este argumento. Al comprender como la oscuridad nocturna era una prueba de la finitud temporal el mundo, Poe anticipaba con varias decenias los modelos relativistas del Big-Bang:

... no hay falacia astronómica más insostenible, y ninguna ha sido apoyada con más pertinencia, que la de la absoluta ilimitación del universo astral... Si la sucesión de estrellas fuera infinita, el fondo del cielo nos presentaría una luminosidad uniforme, como la desplegada por la Galaxia, pues no podría haber en todo ese fondo ningún

punto en el cual no existiera una estrella. *En tal estado de cosas, la única manera de comprender los* vacíos *que nuestros telescopios encuentran en innumerables direcciones sería suponiendo tan inmensa la distancia entre el fondo invisible y nosotros, que ningún rayo de éste hubiera podido alcanzarnos todavía. ¿Quién se atreverá a negar que pueda ser así? Sostengo, simplemente, que no tenemos ni un adarme de razón para creer que* sea así.

El principio teórico que era la base del pensamiento en la astronomía de la época (de Olbers) era el del Universo estático (el *Principio Cosmológico Perfecto*). Los supuestos de los que partía eran:

1) el Universo tiene una extensión infinita;

2) el número de estrellas es también infinito y estan distribuidas uniformemente a través del Universo;

3) las estrellas tienen una luminosidad media uniforme a lo largo y ancho de todo el Cosmos.

Una al menos de las hipótesis en que se apoya la paradoja, la uniformidad de la distribución, resultaba muy discutible debido a las observaciones astronómicas que por aquella época realizaba W. Herschel. Actualmente sabemos que existen galaxias, cúmulos de galaxias y supercúmulos de galaxias, distribuidos en estructuras filamentosas, según las últimas teorías. Pero, a medida que la escala aumenta, el Universo está distribuido de forma isotrópica. Así, suponiendo que el Universo es isótropo en grandes magnitudes y no a pequeñas escalas, sólo nos quedan dos alternativas: el Universo no es suficientemente viejo, ni tampoco estático.

La solución a la paradoja nos la dan precisamente estos dos conceptos. En 1929, E. Hubble dió a conocer la ley que lleva su nombre, que descubría la expansión del Universo y que indica que las galaxias se separan entre ellas. Era el fin de la idea de un Universo estático, vigente hasta entonces. Este movimiento no es de hecho propio, sino que se debe a que el espacio en su totalidad se está expandiendo.

Pero aún queda otra razón para explicar la paradoja de Olbers. Ya desde principios de este siglo se cuestionaba la idea de un Universo infinito. El mismo hecho de que las estrellas no hubieran estado iluminando desde siempre, sino que hubieran tenido una fase de nacimiento en un determinado instante, en el pasado más o menos reciente, sería otra de las soluciones para explicar la paradoja. Las teorías de Friedmann y Lemaître, así como las observaciones de Hubble, sugerían que, si las galaxias se separaban, tuvo que haber un tiempo en que se encontraran muy juntas: era el modelo del *Big Bang* o *Gran Explosión*, el Universo había tenido un principio. La luz proveniente de lugares muy distantes estaría alcanzándonos ahora...

11. Paradojas epigramáticas

Un *epigrama* es una composición poética breve, por lo común festiva o satírica. Sólo citamos tres de las paradojas epigramáticas, de entre las muchas, que aparecen en los textos breves de O. Wilde (1854-1900):

... Es tonto por su parte, pues sólo hay en el mundo una cosa peor que el que hablen de uno, y es que no hablen. **El retrato de Dorian Gray**, 1890.

Gerardo: *Supongo que se divertirá uno extraordinariamente en sociedad.*

Lord Illingworth: *Formar simplemente parte de ella es insoportable. Estar excluido de ella es sencillamente una tragedia.* **Una mujer sin importancia**, 1893.

Y, sin embargo, cada hombre mata lo que ama, sépanlo todos:
unos lo hacen con una mirada de odio;
otros con palabras cariñosas;
el cobarde con un beso;
¡ el hombre valiente, con una espada!

Balada de la cárcel de Reading, 1896.

Bibliografía

[Bol] B. Bolzano, *Les paradoxes de l'infini*, Edición póstuma de Fr. Prihonsky, 1851.

[Bor1] J.L. Borges, *Artificios*, Alianza Cien, 1993.

[Bor2] J.L. Borges, *Discusión*, Alianza Editorial, 1999.

[C] L. Carroll, *Logique sans peine*, Hermann, 1992 (recopila textos de *Symbolic* *logic, Part I*, publicado por primera vez en McMillan (Londres) en 1896, *What the Tortoise said to Achilles* y *A Logical Paradox*, publicados en la revista Mind en 1894).

[EF] G.W. Erickson and J.A. Fossa, *Dictionary of paradox*, Univ. Press of America, 1998.

[Fal] N. Falleta, *Le livre des paradoxes*, Belfond, 1985 (título original *Paradoxicon*, Doubleday and Co., 1983).

[Far] J.A. Faris, *The paradoxes of Zeno*, Avebury Series in Philosophy, 1996.

[G] A.R. Garciadiego Dantan, *Bertrand Russell y los orígenes de las "paradojas" de la teoría de conjuntos*, Alianza Universidad, 1992.

[P] E.A. Poe, *Eureka*, Alianza Editorial, 1990.

[Sa] R.M. Sainsbury, *Paradoxes*, Cambridge University Press, 1988.

[Ste] R.L. Stevenson, *Noches en la isla*, Anaya, 1987.

[Sto] T. Stoppard, *Rosencrantz y Guildenstern han muerto*, Ed. Cuadernos para el Diálogo, Edicusa, 1969.

[Wa] S. Wagon, *The Banach-Tarski paradox*, Cambridge Univ. Press, 1985.

[Wi] O. Wilde, *Obras completas*, Aguilar, 1994.

Las paradojas han tenido un papel crucial en la historia intelectual, a menudo presentando los desarrollos revolucionarios de las Ciencias, de las Matemáticas y de la Lógica. Cada vez que, en cualquier disciplina, aparece un problema que no puede resolverse en el interior del cuadro conceptual susceptible de aplicarse, experimentamos un choque, choque que puede constreñirnos a rechazar la antigua estructura inadecuada y a adoptar una nueva. Es a este proceso de mutación intelectual al que se le debe el nacimiento de la mayor parte de las ideas matemáticas y científicas. A. Rapoport, **Escapar a la paradoja**, Scientific American, 1967.