

Predicción del tiempo y Matemáticas

por

**Mikel Lezaun Iturralde, Universidad del País Vasco-Euskal
Herriko Unibertsitatea**

1. Notas históricas. Introducción

¿Qué tiempo va hacer? Ésta es una pregunta que desde siempre se ha hecho el hombre y que nunca pierde interés. Así, en cuanto llega el fin de semana o se acerca un acontecimiento importante, nos interesamos por la previsión del tiempo, aunque a continuación nos digamos: bueno, total no aciertan nunca.

Los orígenes de la meteorología científica se remontan a la invención del barómetro por Torricelli en 1643 y a las experiencias de Pascal, que en 1648 demostró que la presión atmosférica decrece con la altura y que existe un vacío encima de la atmósfera. El siglo XVIII vio la creación de numerosas estaciones de observación meteorológica y su organización en red permitió la obtención de los primeros mapas meteorológicos. En 1852 se fundó la Sociedad Meteorológica de Francia, iniciativa que fue imitada por muchos países.

Ahora bien, sin mucho riesgo a equivocarse, se puede otorgar la paternidad de una meteorología predictiva al célebre astrónomo Le Verrier, descubridor del planeta Neptuno. Como sucede a menudo, el origen de sus trabajos no fue una motivación altruista o la mejora de las condiciones de vida, sino que se debió a un hecho militar. En efecto, durante la guerra de Crimea (1854), una tempestad

tan repentina como imprevista destruyó la flota francesa en el Mar Negro, y se demandó al célebre astrónomo si habría alguna forma de prever la ocurrencia de semejantes catástrofes. Le Verrier expuso en 1855 a Napoleón III su proyecto de red de observación meteorológica y, aprovechando la invención del telégrafo eléctrico, creó un verdadero servicio de aviso de tormentas. Después de un período de estancamiento, otra vez fueron razones militares las que impulsaron una renovación de la meteorología durante la guerra de 1914, época en la que la radio sustituyó al telégrafo. Desde entonces, las posibilidades de predicción meteorológica no han dejado de progresar.

Antes de entrar de lleno en las predicciones, conviene precisar bien su escala espacial y su alcance. Así, la dificultad de las previsiones no es la misma en unas zonas de la Tierra que en otras, ni en una u otra época del año. También es muy distinto predecir el tiempo del día siguiente o el tiempo que hará dentro de una semana. En particular, es casi imposible predecir la ocurrencia de fenómenos meteorológicos muy localizados una vez que el alcance de la previsión aumenta.

En la actualidad las predicciones se clasifican, según el período de tiempo que abarcan, en tres categorías. Las previsiones a corto plazo son las que van de algunas horas a un día. Son muy útiles para los acontecimientos deportivos, la navegación aérea o para indicar el estado de las carreteras. Las previsiones a medio plazo son las que su alcance está comprendido entre uno y cuatro días. Ni que decir tiene que son muy importantes para muchas personas y actividades, como son los trabajos agrícolas, las obras públicas, la pesca costera, la navegación, las actividades turísticas, etc. Por último, las previsiones a largo plazo son las que se hacen para entre cuatro y diez días. También éstas tienen una importancia económica enorme (riego de cultivos, gestión de stocks de combustible, etc.), pero su fiabilidad todavía es mediocre.

Predecir el tiempo es predecir el estado de la atmósfera, en particular los desplazamientos de las depresiones y de las nubes asociadas, así como de los movimientos de las masas de aire caliente y de aire frío que se encuentran e interaccionan. Si la Tierra no girara, el movimiento atmosférico general sería muy simple: el aire “muy caliente” de las zonas ecuatoriales ascendería por convección térmica, de allí se dirigiría por la parte alta de la atmósfera hacia los polos, donde al enfriarse descendería para luego volver por la parte baja de la atmósfera hacia las zonas ecuatoriales. Este movimiento convectivo a escala planetaria no dependería de la longitud terrestre.

Ahora bien, la Tierra y con ella nuestro sistema de referencia, gira. La rotación

del sistema de referencia implica la existencia de una fuerza llamada de Coriolis, que tiende a curvar la trayectoria de los móviles que se desplazan en un sistema en rotación. La fuerza de Coriolis hace que los vientos en vez de dirigirse de las zonas de altas presiones hacia las zonas de bajas presiones siguiendo una dirección perpendicular a las líneas de igual presión o isobaras, como ocurriría en el caso de ausencia de rotación terrestre, lo hagan en direcciones sensiblemente paralelas a esas líneas y giren en sentido diferente según sean de zonas de presión alta (anticiclones) o de presión baja (depresiones). Ésta es la causa de los gigantescos movimientos giratorios que constituyen las depresiones (que en nuestro hemisferio giran en sentido contrario al de las manecillas de un reloj) y los anticiclones (que giran en el sentido de las agujas de un reloj). Estas inestabilidades hidrodinámicas tienen posiciones e intensidades variables y son las que complican las predicciones meteorológicas.

Para terminar esta introducción resaltaremos que las predicciones meteorológicas, cualquiera que sea el plazo considerado, reposan sobre una base común esencial: el conocimiento permanente de las observaciones relativas al estado actual de la atmósfera.

2. El hecho de predecir el tiempo

Durante siglos, los pronósticos se apoyaban en datos empíricos que se expresaban en forma de refranes que, dependiendo de la época del año, daban indicaciones sobre el tiempo venidero según fuera el tiempo presente u otros fenómenos naturales. Estos fenómenos pueden ser, por ejemplo, el color del sol, el del cielo, el de las nubes, o la aparición del arco iris. Hay que indicar que esos refranes tienen una cierta validez local para las previsiones a muy corto plazo. Como ejemplos citaremos:

*Cielo empedrado, suelo mojado.
Cielo de lanas, si no llueve hoy, lloverá mañana.
Arco iris al mediodía, llueve todo el día.
Marzo marceador, un día malo y otro peor.*

En todos los países perviven muchos refranes de este tipo y, aunque a veces sean contradictorios o tengan una interpretación ambigua, constituyen verdaderas guías para los labradores y la población rural.

Como hemos indicado antes, se puede decir que desde mediados del siglo XIX los meteorólogos tienen a su disposición una gran cantidad de datos referentes al estado instantáneo de la atmósfera. ¿Cómo los tratan para deducir de ellos el

tiempo venidero? Durante mucho tiempo, lo esencial de su trabajo ha consistido en trasladar a un mapa las observaciones obtenidas en la superficie terrestre y, a partir de él, hacer un mapa pronóstico que era una estimación personal de la forma a la que iba a evolucionar la situación meteorológica. De este mapa inferían cómo iba a ser el tiempo previsto en el lugar considerado. Este método, eficaz a muy corto plazo, suponía que al menos durante varias horas, la circulación atmosférica mantendría esencialmente la misma velocidad y la misma orientación que la que tenía en ese momento.

Hoy en día, debido a la multiplicación de los medios de observación y de medida, a la rapidez de su transmisión por la red de telecomunicaciones y al desarrollo de medios de cálculo muy potentes (grandes ordenadores), esta situación ha cambiado radicalmente. Tampoco hay que olvidar el papel de incesantes investigaciones que encaminadas a la comprensión de nuevos fenómenos meteorológicos han tenido como consecuencia una constante mejora de los modelos matemáticos de la atmósfera. Pues bien, ¿en qué consisten estos modelos? Su principio básico es que al ser la atmósfera un fluido, se le puede aplicar las leyes de la mecánica de los fluidos y de la termodinámica.

3. Las ecuaciones básicas del movimiento atmosférico

En un sistema de referencia inercial, la aplicación de la segunda ley de Newton (fuerza igual a masa por aceleración) a una “pequeña” parcela de fluido se escribe

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} - g\delta_{i3} + f_{ri}, \quad i = 1, 2, 3,$$

donde $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ es la velocidad, ρ la densidad y p la presión en cada punto de la atmósfera. El primer miembro de esta ecuación es la derivada material de la velocidad y el segundo representa la suma de las fuerzas que actúan sobre la parcela de fluido. Así, el término $-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i}$ representa la fuerza producida por las diferencias de presión, $-g\delta_{i3}$ proviene de la fuerza gravitatoria y $\vec{f}_r = (f_{r1}, f_{r2}, f_{r3})$ representa las fuerzas de fricción que el resto del fluido ejerce sobre la superficie de la parcela.

La ley de conservación de la masa afirma que la *masa de una parcela de fluido, cuando se sigue en su movimiento, se conserva*. La traducción a lenguaje matemático

de esta ley de conservación es la denominada ecuación de continuidad

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial(\rho v_j)}{\partial x_j} = 0.$$

Haciendo un balance de la energía (primer principio de la termodinámica) en una parcela de fluido atmosférico, se obtiene la siguiente ecuación en derivadas parciales

$$\rho_0 c_V \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 v_j \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) - k \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 T}{\partial x_j^2} + p \sum_{j=1}^3 \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = - \sum_{j=1}^3 \frac{\partial R_j}{\partial x_j} + C + \varphi,$$

donde T es la temperatura. En esta ecuación, el término $-\sum_{j=1}^3 \frac{\partial R_j}{\partial x_j}$ representa los cambios de temperatura debidos a la radiación, tanto solar como la emitida por el calentamiento de la Tierra, C los debidos a la evaporación o condensación del agua y φ los debidos a la disipación intrínseca.

Una idealización que se usa frecuentemente es asumir que el fluido verifica la condición de incompresibilidad

$$\sum_{j=1}^3 \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0. \quad (4.1)$$

Para la densidad, utilizaremos la ley de estado

$$\rho = \rho_0 [1 - \varepsilon(T - T_0)],$$

que expresa que si en el fluido tienen lugar cambios de densidad, éstos son debidos a cambios de temperatura y no a expansiones o contracciones de parcelas de fluido causadas por el movimiento.

Si admitimos que el fluido es newtoniano, lo cual supone que la fuerza de fricción \vec{f}_r y la disipación intrínseca φ sólo dependen (vía viscosidad) de las diferencias de velocidad, y si se asume la hipótesis de Boussinesq que dice que la densidad se puede considerar constante salvo en el término correspondiente a la fuerza gravitatoria, se tiene el sistema

$$\rho_0 \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x_i} - g \rho_0 [1 - \varepsilon(T - T_0)] \delta_{i3} + \mu \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (4.2)$$

$$\rho_0 c_V \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 v_j \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) - k \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 T}{\partial x_j^2} = - \sum_{j=1}^3 \frac{\partial R_j}{\partial x_j} + C + 2\mu \sum_{i,j=1}^3 \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)^2. \quad (4.3)$$

Observemos que si se especifican las fuentes externas de calor debidas a la radiación y las debidas a la evaporación o condensación, el sistema (4.1)-(4.3) es completo en el sentido de que hay cinco ecuaciones para cinco funciones incógnita (las tres componentes de la velocidad, la presión y la temperatura).

Como hemos indicado anteriormente, estas ecuaciones solamente son válidas para un sistema de coordenadas inercial. Ahora bien, en meteorología se utiliza como referencia sistemas ligados a la superficie de la Tierra. Esto supone dos alteraciones en las ecuaciones, las debidas a la rotación terrestre (fuerza de Coriolis) y las debidas a la forma esférica de la Tierra. Se tiene por tanto que modificar las ecuaciones anteriores realizando cambios de sistemas de referencia. Se llega así a las ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_1}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 v_j \frac{\partial v_1}{\partial x_j} - \frac{v_1 v_2 \tan \phi}{a} + \frac{v_1 v_3}{a} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_1} + 2\Omega(v_2 \sin \phi - v_3 \cos \phi) + f_{r1}, \\ \frac{\partial v_2}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 v_j \frac{\partial v_2}{\partial x_j} - \frac{v_1^2 \tan \phi}{a} + \frac{v_1 v_3}{a} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_2} - 2\Omega v_1 \sin \phi + f_{r2}, \\ \frac{\partial v_3}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 v_j \frac{\partial v_3}{\partial x_j} - \frac{v_1^2 + v_2^2}{a} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_3} - g + 2\Omega v_1 \cos \phi + f_{r3}, \end{aligned}$$

donde ϕ es la latitud, a el radio medio de la Tierra y Ω su velocidad de rotación.

Estas son las ecuaciones básicas de la conservación del momento de la meteorología dinámica. Junto con la primera ley de la termodinámica, la ecuación de la conservación de la masa y la ecuación de estado, forman el modelo básico completo del movimiento de la atmósfera. Notemos que desde un punto de vista matemático, para que el problema esté bien propuesto, se tiene que añadir a estas ecuaciones las respectivas condiciones iniciales y de contorno. También hay que resaltar que basándose en consideraciones teóricas y en trabajos numéricos, a menudo se modifican estas ecuaciones pues para situaciones particulares se puede utilizar aproximaciones simplificadas.

4. Simulación numérica

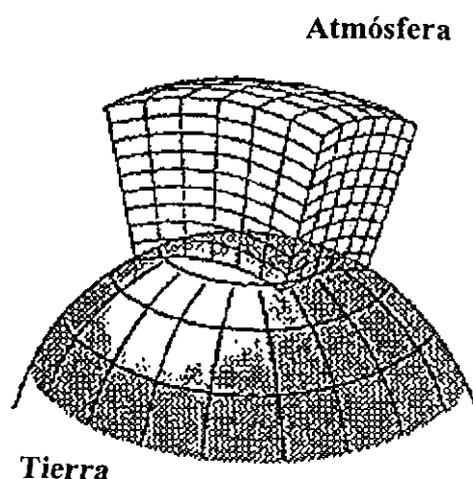
Las ecuaciones en derivadas parciales anteriores son una variante de las denominadas ecuaciones de Navier-Stokes y como para éstas, sólo se han hallado soluciones analíticas (expresiones matemáticas explícitas) en unos pocos casos particulares. La dificultad esencial reside en las no linealidades, en concreto en la presencia de la operación $\sum_{j=1}^3 v_j \frac{\partial}{\partial x_j}$. Para resolverlas es pues necesario apelar a aproximaciones numéricas que puedan tratarse con ordenador. Respecto de las ecuaciones de Navier-Stokes, es interesante resaltar que uno de los siete problemas que el Clay Mathematics Institute of Cambridge, Massachusetts, ha elegido como problemas del nuevo milenio es: *Existencia y regularidad de solución de las ecuaciones de Navier-Stokes*. Hay que indicar que la resolución de cada uno de esos siete problemas está premiada con un millón de dólares.

Notemos que el modelo matemático debe tratar todo el globo terrestre y no solamente el país para el que se quiere hacer una previsión meteorológica, ya que la situación atmosférica a diez mil kilómetros probablemente no afectará al tiempo del día siguiente, pero su influencia se hará creciente cuando el plazo de la previsión aumente.

Veamos ahora de manera esquemática la forma en que a partir del conocimiento de los valores de las distintas variables en un instante inicial, se puede resolver numéricamente estas ecuaciones y, en consecuencia, predecir el tiempo.

La simulación numérica se desarrolla en varias etapas:

1.- Se divide la atmósfera en un gran número de cajas elementales de forma que en cada una de ellas las variables atmosféricas sean homogéneas. Típicamente, las dimensiones de estas cajas van de una docena a una centena de kilómetros horizontalmente, y de algunas centenas de metros verticalmente hasta alcanzar una altura de 10 o 12 kilómetros. De esta forma el número de incógnitas del problema (los valores de las funciones en toda la atmósfera) pasa a ser finito.



2.- Varias veces al día se realizan en todo el Globo una serie de medidas de variables atmosféricas (presión, temperatura, viento, humedad, nubosidad, contenido de agua líquida,...) tanto en superficie como en los distintos niveles atmosféricos. Estas observaciones se obtienen por radiosondeo, satélites, barcos, aviones y estaciones de observación en superficie. Inmediatamente después de ser obtenidas, se distribuyen por líneas especiales de comunicación a los distintos Servicios Meteorológicos donde se procede a realizar varios tipos de análisis, con el fin de asignar en cada uno de los vértices de las cajas (nodos) en que hemos dividido la atmósfera, valores interpolados de las distintas variables. Se trata pues de construir con toda celeridad una especie de “retrato robot” del estado actual de la atmósfera. Indudablemente, la calidad y fiabilidad de este “retrato robot” va a depender en gran medida de que la posean las observaciones realizadas. El problema es que éstas, que lógicamente son muy limitadas y están muy desigualmente repartidas, hayan sido capaces de recoger las características fundamentales de la situación atmosférica.

3.- Con el mallado de la atmósfera descrito anteriormente, se aproximan las derivadas por diferencias con lo cual el sistema de ecuaciones diferenciales inicial se transforma en un sistema de ecuaciones algebraicas con N incógnitas, donde N es muy grande. Por ejemplo, si Δt es un intervalo de tiempo muy pequeño, la derivada $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}(\vec{x}, t)$ se puede aproximar por la relación $\frac{\vec{v}(\vec{x}, t + \Delta t) - \vec{v}(\vec{x}, t)}{\Delta t}$. Conocidos los valores de las distintas funciones en el instante t , podemos resolver este sistema y se obtiene valores aproximados de las funciones para un instante posterior $t + \Delta t$. Repitiendo este proceso al siguiente paso de tiempo $t + 2\Delta t$ y así sucesivamente, se van obteniendo valores aproximados de $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, p , ρ y T para tiempos futuros.

Se puede estimar la gran cantidad de operaciones que hay que realizar teniendo en cuenta que un proceso normal de este tipo involucra a los seis o siete mil nodos del mallado de cada uno de los 30 a 50 niveles atmosféricos, y que en cada nodo se tienen 4 o 5 variables. Unido a esto el hecho de que los cálculos deben ser realizados en muy poco tiempo, se comprenderá fácilmente la razón por la que los Servicios Meteorológicos desarrollados requieren potencias de cálculo muy altas.

Naturalmente, cuanto mayor es el número de cajas en las que dividimos la atmósfera, con lo cual su dimensión es más pequeña, mejor será el resultado del cálculo. Ahora bien, en ese caso también será mayor el número de nodos y de ecuaciones discretas y por tanto más largo el tiempo de resolución. La mayor parte de las veces, una predicción meteorológica es una verdadera carrera contrarreloj, ya

que de nada sirve calcular con gran precisión el tiempo que va hacer el día siguiente si este cálculo requiere más de veinticuatro horas. Así pues, siempre habrá que hacer un compromiso entre la precisión del cálculo y su duración.

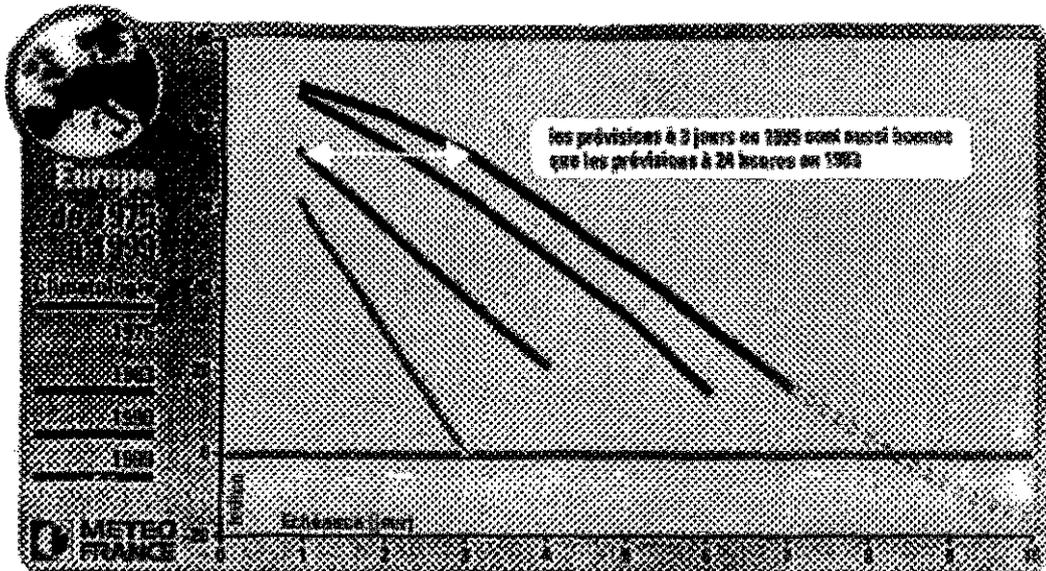
4.- El resultado de todos los cálculos anteriores es una gran cantidad de matrices de números que representan los campos previstos de las distintas variables atmosféricas para dentro de unas horas o días. Estas matrices se pueden utilizar directamente para algunas aplicaciones pero, en general, los mismos ordenadores las transforman en campos gráficos mucho más conocidos y accesibles para el trabajo de los predictores.

El proceso de predicción del tiempo no acaba con la simulación numérica. ¡Los ordenadores no solucionan todo! En particular para los plazos más breves (de algunas horas a uno o dos días), es indispensable la destreza del especialista encargado de la predicción que, como gran conocedor del clima regional y de los límites de los modelos, ajusta e incluso modifica los resultados de la simulación y los traduce en términos de tiempo observable: duración e intensidad de las precipitaciones, temperaturas máxima y mínima del día, posible aparición de nieblas, de tormentas o de ráfagas de viento, etc.

Desde un punto de vista práctico, la predicción mediante modelos matemáticos abarca un plazo que va desde las 8 o 10 horas hasta, en el mejor de los casos, los nueve o diez días siguientes, y ello con serias limitaciones dependientes de la situación atmosférica concreta y de la época del año. No son muy raras las situaciones para las que es muy difícil ir más allá de las 60 o 72 horas. Para períodos de tiempo inferiores a seis u ocho horas, hoy en día los modelos matemáticos no son los adecuados y es preciso utilizar otras técnicas denominadas de predicción inmediata o de predicción a muy corto plazo. Éstas se desarrollan a partir de extrapolaciones más o menos complejas de datos meteorológicos obtenidos mediante estaciones automáticas de superficie y teledetección (radares, satélites, redes de detección de rayos...) con gran resolución espacial y temporal. Ello requiere una vigilancia continua de la evolución atmosférica y una rápida toma de decisiones sobre posibles envíos de avisos rectificando las predicciones.

A modo de conclusión observemos la gráfica siguiente proporcionada por Météo-France y que da cuenta de las mejoras en las predicciones meteorológicas mediante modelos matemáticos. En abscisas se indica los plazos para los que se hace la predicción (de uno a diez días), y en el eje vertical el porcentaje de aciertos en las predicciones. Así, desde 1999, las predicciones de los modelos para tres días son tan

tan buenas (70% de aciertos) como las previsiones que se hacían en 1983 para 24 horas.



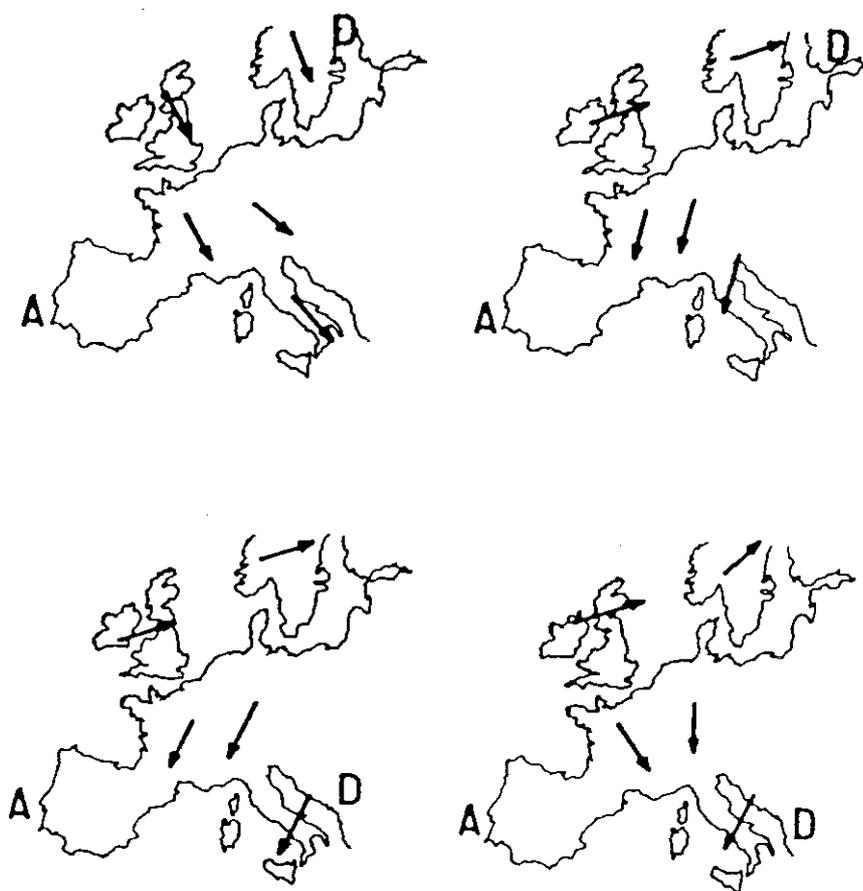
Para terminar, diremos que los progresos de los modelos de predicción numérica se deben al aumento de la potencia de cálculo de los superordenadores y a los progresos en la investigación (técnicas que permiten una mejora en el aprovechamiento de los datos observados, mejor representación de los datos meteorológicos...)

5. Sensibilidad respecto de las condiciones iniciales

Ya hemos visto que en cuanto no se trata de predicciones a muy corto plazo, es indispensable recurrir a los cálculos numéricos. Ahora bien ¿es suficiente disponer de ordenadores suficientemente rápidos para predecir el tiempo que va a hacer dentro de, por ejemplo, dos semanas? La respuesta a esta pregunta se obtiene realizando el siguiente test: partiendo de dos (o varios) estados iniciales muy cercanos y cuyas diferencias son del orden de las incertidumbres inevitables derivadas de las imperfecciones de la red de observación, se hace dos (o varias) previsiones con el modelo que se quiere comprobar, para plazos de tiempo cada vez más largos. Comparando las previsiones del tiempo efectuadas a partir de estas diferentes situaciones iniciales, se observa que la pequeña diferencia inicial va creciendo exponencialmente. Se tiene pues que las ecuaciones de los modelos meteorológicos son muy sensibles a

pequeñas variaciones en las condiciones iniciales. Este proceder permite también estimar el plazo máximo para el que se puede hacer una previsión aceptable.

En los gráficos siguientes se muestra cuatro previsiones a una semana extraídas de cálculos numéricos realizados por el Centro Europeo de Previsiones Meteorológicas a medio plazo. Estas predicciones están hechas con condiciones iniciales tan similares que es prácticamente imposible distinguirlas en el plano de isobaras, y que son tan válidas las unas como las otras. Esta situación no está elegida de forma artificial, sino que responde a incertitudes reales ligadas a las imperfecciones de la red de observación. En cada uno de los mapas se ha dibujado la dirección media del viento dominante en cinco puntos de Europa, así como la posición del anticiclón (A) y de la depresión (D). Se observa que al cabo de una semana, los imperceptibles errores iniciales se amplifican hasta tal punto que se obtienen resultados muy diferentes, que por otro lado son igualmente posibles.



Esta sensibilidad de los modelos a las condiciones iniciales es un fenómeno fundamental que es inherente a la propia naturaleza de las ecuaciones de la mecánica de fluidos y que, irremediablemente, limitará la fiabilidad de las previsiones a largo plazo, cualesquiera que sean los progresos realizados en materia de cálculo o de observaciones.

En la siguiente sección vamos a ilustrar con más detalle todas estas cuestiones referentes a la impredecibilidad y caos.

6. Del aleteo de las alas de una mariposa a los ciclones

Veamos ahora el modelo introducido y estudiado por el meteorólogo E. Lorenz a comienzo de los años 1960. Esta última precisión es importante ya que en esa época los ordenadores eran poco potentes y lentos, por lo que estaba fuera de lugar la posibilidad de resolver numéricamente, y rápidamente, un modelo meteorológico tan sofisticado como el mostrado anteriormente. Una cuestión intrigaba a Lorenz: ¿Cómo es posible que conociendo las ecuaciones de la circulación atmosférica, así como las condiciones de partida, no se llegaba a predecir con un grado de fiabilidad aceptable el tiempo que haría tres días después? Para tratar de responder a esta pregunta veamos la forma en que Lorenz simplificó considerablemente las ecuaciones de la circulación atmosférica hasta llegar al sistema que lleva su nombre.

Problema de Bénard

Volvamos a las ecuaciones del movimiento atmosférico en un sistema inercial. Si en la ecuación (3) no tenemos en cuenta ni la radiación ni los efectos de la evaporación o condensación del vapor de agua y si además despreciamos su último término (cuadrático), obtenemos el denominado sistema de Bénard

$$\rho_0 \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} - g\rho_0[1 - \varepsilon(T - T_0)]\delta_{i3} + \mu \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2}, \quad i = 1, 2, 3,$$

$$\rho_0 c_V \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 v_j \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) = k \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 T}{\partial x_j^2}$$

$$\sum_{j=1}^3 \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0.$$

Estas ecuaciones no están desprovistas de significado pues modelan una experiencia en la que un fluido viscoso incompresible está contenido entre dos placas

horizontales. En esta experiencia, la placa inferior se mantiene caliente y la superior fría con el fin de que entre ellas se produzca un movimiento convectivo.

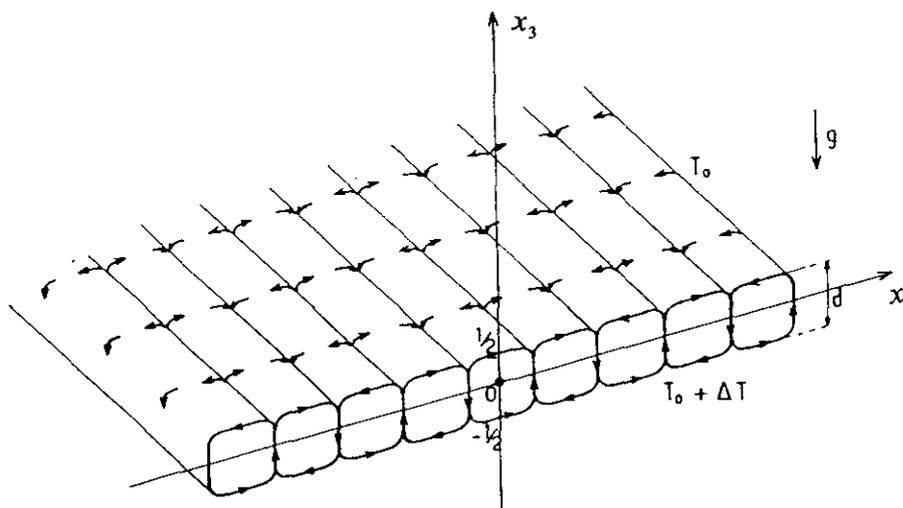
Haciendo un adecuado cambio de variables se obtiene el sistema (adimensional):

$$\frac{1}{\text{Pr}} \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \theta \delta_{i3} + \nu \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 v_j \frac{\partial \theta}{\partial x_j} = \text{Ra} v_3 + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_j^2}, \quad (4.5)$$

$$\sum_{j=1}^3 \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0, \quad (4.6)$$

donde Pr es el número de Prandtl que básicamente depende de la viscosidad y Ra el número de Rayleigh, que es función de la diferencia entre la temperatura de la pared horizontal inferior (caliente) y la de la superior (fría). Hay que notar que después de este cambio, la “nueva” temperatura θ es tal que su valor en las placas horizontales es cero.



Estas ecuaciones siguen siendo del tipo Navier-Stokes y su análisis y resolución presenta las mismas dificultades que las comentadas anteriormente. Ahora bien, realizando en determinadas condiciones la experiencia modelada por estas ecuaciones, se observa que en el seno del flujo aparecen unos rollos convectivos y su aspecto

es como el de la figura precedente. Buscando soluciones que respondieran a esta situación, Lorenz obtuvo su célebre sistema.

Sistema de Lorenz

Para empezar, como este flujo es plano, el campo de velocidades será de la forma

$$v_1 = v_1(x_1, x_3, t), \quad v_2 = 0, \quad v_3 = v_3(x_1, x_3, t).$$

Con el fin de que la velocidad sea periódica en la dirección x_1 y se verifique la condición de incompresibilidad (4.6) y las condiciones de contorno $v_3 = 0$ y $\frac{\partial v_1}{\partial x_3} = 0$ sobre las paredes horizontales, tomamos en una primera aproximación

$$v_1(x_1, x_3, t) = \pi\psi_1(t)\text{sen}(\pi x_3)\text{sen}(qx_1), \quad v_3(x_1, x_3, t) = q\psi_1(t)\text{cos}(\pi x_3)\text{cos}(qx_1). \quad (4.7)$$

Como la temperatura está acoplada al campo de velocidades, es natural imponerle en x_1 la misma periodicidad que la de su tercera componente v_3 . Teniendo también en cuenta que su valor en las placas horizontales es cero, en una primera aproximación tomamos para la temperatura

$$\theta(x_1, x_3, t) = \theta_1(t)\text{cos}(\pi x_3)\text{cos}(qx_1) + \theta_2(t)\text{sen}(2\pi x_3). \quad (4.8)$$

La adición del último término de esta expresión se muestra necesaria para preservar al menos una parte de la no linealidad.

Notemos que elegidas la velocidad \vec{v} y la temperatura θ de esta forma, están completamente determinadas una vez conocida ψ_1 , θ_1 y θ_2 . Veamos que para eso hay que resolver un sistema de tres ecuaciones con esas tres incógnitas.

Haciendo la derivada parcial $\frac{\partial}{\partial x_3}$ de la primera ecuación de (4.4), la derivada parcial $\frac{\partial}{\partial x_1}$ de la tercera, restando (es decir calculando el rotacional de estas dos ecuaciones) e introduciendo las expresiones de (4.7) en la ecuación obtenida, se llega a

$$\frac{1}{\text{Pr}} \frac{d\psi_1}{dt} = \frac{q\theta_1}{\pi^2 + q^2} - (\pi^2 + q^2)\psi_1.$$

Introduciendo las expresiones (4.7) y (4.8) en la ecuación (4.5) se obtiene las ecuaciones

$$\frac{d\theta_1}{dt} = -\pi q\psi_1\theta_2 + q\text{Ra}\psi_1 - (\pi^2 + q^2)\theta_1, \quad \frac{d\theta_2}{dt} = \frac{1}{2}\pi q\psi_1\theta_1 - 4\pi^2\theta_2.$$

Volviendo a hacer en las tres últimas ecuaciones un adecuado cambio de variables, se tiene el sistema de Lorenz:

$$\frac{dx}{dt} + \sigma(x - y) = 0, \quad \frac{dy}{dt} + y - rx + xz = 0, \quad \frac{dz}{dt} + bz - xy = 0,$$

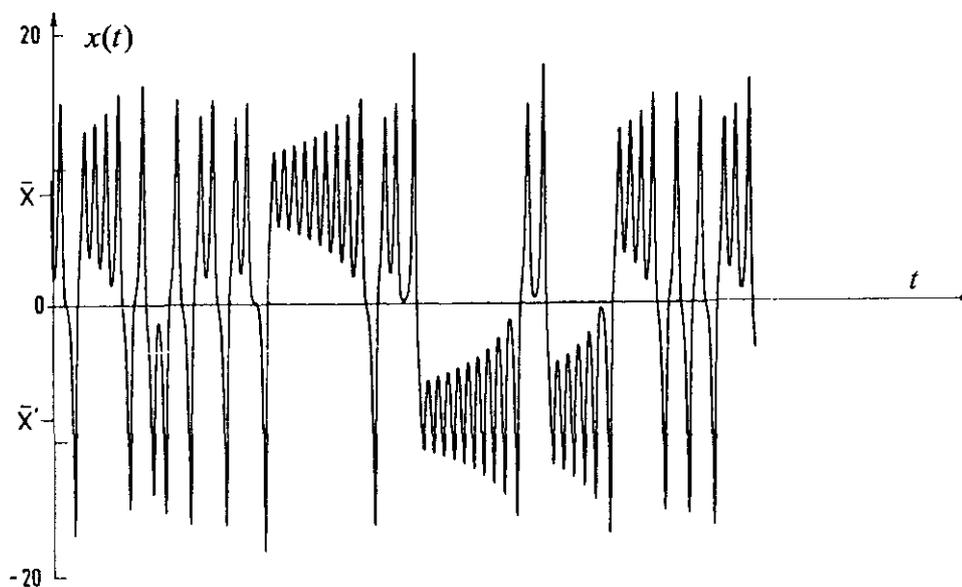
donde se ha puesto $\sigma = \text{Pr}$, $r = \frac{q^2 \text{Ra}}{(\pi^2 + q^2)^3}$ y $b = \frac{4\pi^2}{\pi^2 + q^2}$.

Notemos que Lorenz tomó los siguientes valores de los parámetros: $\sigma = 10$, $b = 8/3$ y $r = 28$.

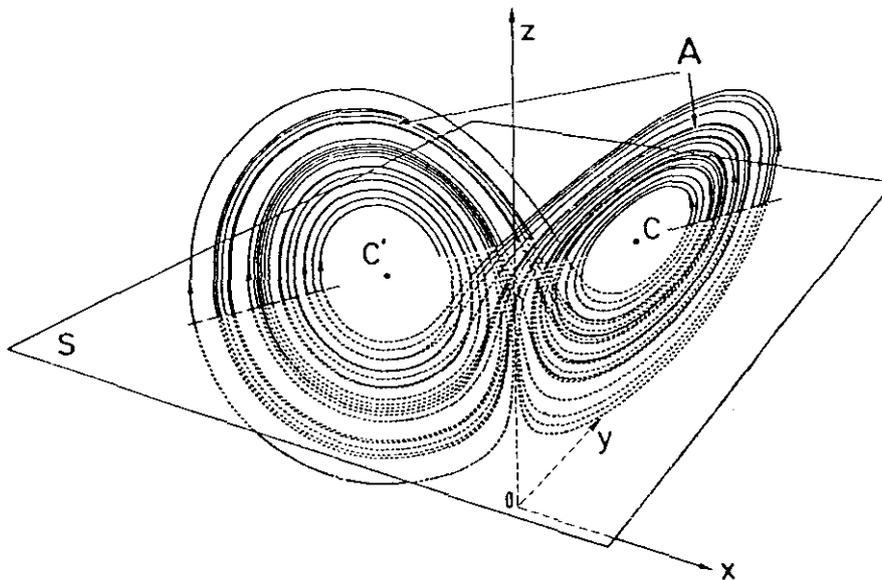
Es fácil adivinar que simplificado hasta este punto, este sistema no tendrá ninguna utilidad para previsiones meteorológicas reales. Sin embargo, posee los ingredientes necesarios para ser representativo de movimientos atmosféricos y constituye el modelo teórico de caos determinista más célebre y más estudiado.

Lo mismo que los modelos meteorológicos completos, y a pesar de su aspecto tan sencillo, estas tres ecuaciones no tienen solución analítica. Por tanto hay que resolverlas por métodos numéricos utilizando un ordenador. Así lo hizo Lorenz y se topó con numerosas sorpresas.

La primera es que la evolución de cada una de las componentes de la solución tiene un comportamiento que sólo obedece a la fantasía del azar. En la siguiente gráfica se muestra la variación temporal de la variable x .



El segundo descubrimiento es que si dibujamos la sucesión de valores que en el transcurso del tiempo toman las soluciones, se obtiene una trayectoria que se enrolla sobre un curioso objeto de dos lóbulos. Este objeto que atrae a toda trayectoria no tiene volumen pero tampoco es una simple superficie; su dimensión, en el sentido que en matemáticas se entiende por dimensión de Hausdorff, es no entera. Se descubrió así el primer “atractor extraño”. En la gráfica siguiente mostramos una perspectiva de este atractor de Lorenz.



La tercera sorpresa se produjo cuando al querer rehacer con más detalle el cálculo de la solución para un tiempo particularmente largo, Lorenz introdujo en su ordenador los valores de la solución que había obtenido para un tiempo intermedio. Hecho esto, observó que los valores de la solución obtenidos para un poco más tarde ya no guardaban ninguna relación con los que se tenían del cálculo precedente. Intentando descifrar lo que ocurría, Lorenz comprendió que involuntariamente introducía un pequeño error inicial, debido a que la máquina trabajaba con seis cifras significativas mientras que los datos que él introducía después de interrumpir el cálculo sólo tenían las tres cifras que le proporcionaba la impresora. Este pequeñísimo error inicial crecía exponencialmente con el cálculo hasta un nivel que cambiaba radicalmente los resultados obtenidos, lo cual ponía en evidencia la sensibilidad del sistema de Lorenz respecto de las condiciones iniciales.

Con este modelo simplificado, Lorenz había ganado su apuesta de comprender la impredecibilidad atmosférica. Las verdaderas ecuaciones de la circulación atmosférica tendrían que presentar la misma sensibilidad a las condiciones iniciales, lo que haría imposible todo pronóstico a largo plazo. Así, un mínimo error de observación cambiaría completamente la predicción para el tiempo que haría dentro de una semana. Lorenz dio de este efecto una imagen muy impactante, que bautizó “efecto mariposa”: una perturbación tan débil como el aleteo de las alas de una mariposa puede producir en la otra punta del Globo, un mes más tarde, un efecto considerable, como por ejemplo el desencadenamiento de un ciclón o al contrario, el término de una tempestad. Así, podemos concluir diciendo que son las propias matemáticas las que muestran que pequeños e inevitables errores en las mediciones originales pueden provocar evoluciones tan diversas que hacen poco fiable la predicción a largo plazo.

Bibliografía

[BPV] P. Bergé, Y. Pomeau, C. Vidal, *L'ordre dans le chaos*, Hermann, Paris, 1984.

[BPD] P. Bergé, Y. Pomeau, M. Dubois-Gance, *Des rythmes au chaos*, Ed. Odile Jacob, Paris, 1994.

[D] John A. Dutton, *Dynamics of atmospheric motion*, Dover Publications, Inc. New-York, 1995.

[L] Edward N. Lorenz, *La esencia del caos*, Editorial Debate, Madrid, 2000.

Instituto Nacional de Meteorología, <http://www.inm.es>.

Météo-France, <http://www.meteo.fr>.

