Geometría del Espacio-Tiempo

por

Juan Luis Mañes, Universidad del País Vasco-Euskal Herriko Unibertsitatea

1. Introducción

La realidad se nos muestra poblada de objetos que evolucionan en el *tiempo*. Estos objetos existen en el *espacio*, y la *geometría* nos proporciona una descripción de sus formas y tamaños, posiciones relativas, etc. Aunque todos tenemos cierta intuición de lo que son el espacio y el tiempo, probablemente nos resulta difícil dar una definición precisa de los mismos. Pero percibimos el espacio y el tiempo como entidades claramente diferenciadas: Podemos movernos y desplazar objetos en el espacio, el cuál parece tener tres dimensiones (largo, ancho y alto), pero no podemos mover objetos en el tiempo. Podemos dirigir nuestra mirada en cualquier dirección del espacio, pero no así en el tiempo; no podemos ver el futuro, y apenas podemos aspirar a recordar el pasado.

Sin embargo, en el título de este capítulo el espacio y el tiempo aparecen extrañamente fusionados en un 'espacio-tiempo'. Nos puede chocar la unión de dos conceptos aparentemente tan diferentes y la aplicación de la geometría a su descripción. En realidad, la fusión del espacio y el tiempo supone la culminación de un proceso de unificación en nuestra comprensión de la realidad iniciado por Newton en el siglo XVII, y que continúa hoy en día. En sus *Principia*, Newton demostró que la misma fuerza responsable de la caída de los cuerpos en la vida cotidina explicaba también el movimiento de los astros y bautizó a esta fuerza con el nombre de 'gravitación universal'. Para la resolución del problema del movimiento de los cuerpos sometidos a la fuerza de la gravedad tuvo que inventar nuevas técnicas matemáticas que él denominó 'teoría de fluxiones', y que hoy conocemos como 'cálculo infinitesimal'[1].

Este proceso fue continuado por Maxwell, con su publicación en 1864 de las leyes que unifican la electricidad, el magnetismo y la óptica. Estas leyes tomaron la forma de un conjunto de ecuaciones diferenciales lineales en derivadas parciales, las famosas 'ecuaciones de Maxwell'. Dichas ecuaciones predecían la existencia de ondas electromagnéticas, que engloban las ondas de radio y televisión, así como los rayos X y la radiación Gama y, más importante, identificaban a la luz como una onda electromagnética más.

La unificación y geometrización del espacio y el tiempo tuvo lugar entre 1905 y 1915 y es atribuible fundamentalmente al físico Albert Einstein. Sin embargo, las bases geométricas habían sido establecidas en el siglo XIX por varios matemáticos: Bolyai, Lobachevski y Riemann, que crearon las primeras geometrías no euclídeas. Y en su formulación final de la Relatividad General Einstein (ayudado por su amigo el matemático Marcel Grossmann) tuvo que recurrir al 'cálculo diferencial absoluto' de Levi-Civita.

En el resto de este capítulo intentaremos presentar de una manera sencilla las ideas de Einstein sobre el espacio y el tiempo, y la naturaleza geométrica de su unión, el espacio-tiempo.

2. La velocidad de la luz

Todos hemos oído decir que la velocidad de la luz constituye un límite infranqueable, y que esto es así independientemente de cualquier posible avance tecnológico en el futuro. Pero, ¿por qué precisamente la velocidad de la luz? y, ¿qué es lo que la hace infranqueable? La clave se encuentra en el famoso postulado de Einstein de 'la invariancia de la velocidad de la luz'.

Este postulado afirma simplemente que la velocidad de la luz es totalmente independiente de las velocidades de la fuente de luz y del observador. A este postulado,

[1]El cálculo infinitesimal fue también desarrollado independientemente y casi simultáneamente por el filósofo y matemático G. W. Leibniz

superficialmente inocuo, llegó Einstein en 1905 tras reflexionar largamente sobre la estructura de las ecuaciones de Maxwell y sobre los resultados negativos de ciertos experimentos llevados a cabo por Michelson y Morley en 1887.[2]

Hemos intentado ilustrar el significado del postulado mediante la figura 1.

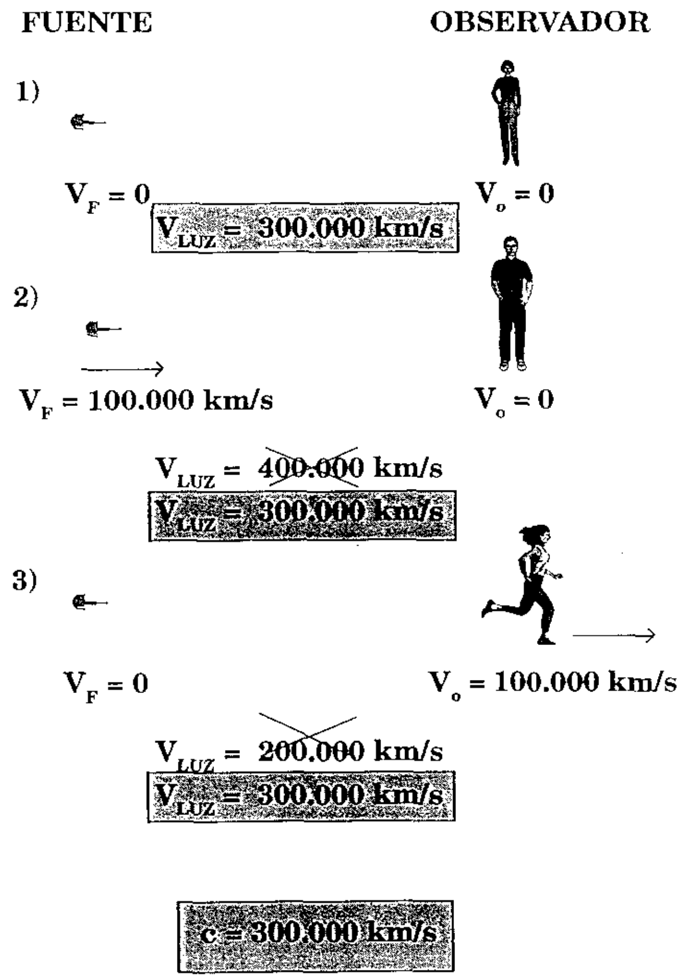


Figura 1

[2]Michelson y Morley intentaban detectar el movimiento de la Tierra alrededor del Sol con respecto a cierto hipotéstico 'éter' en el que se propagarían las ondas electromagnéticas.

En el primer caso, tanto la fuente como el observador se encuentran en reposo, y el observador mide una velocidad de 300.000 km/s. En el segundo, la fuente avanza hacia el observador a 100.00 km/s. Nuestra experiencia cotidiana nos lleva a esperar que ahora el observador medirá una velocidad de 400.000 km/s; sin embargo, el postulado de Einstein afirma que la velocidad medida seguirá siendo de 300.000 km/s. Lo mismo sucede en el tercer caso, en el que el observador se aleja de la fuente de luz.

2.1 La dilatación temporal

Es obvio que el postulado de Einstein contradice nuestras intuición respecto a la naturaleza del movimiento. Pero además, nos obliga a cambiar revolucionariamente nuestras nociones acerca del tiempo. Para ver por qué, recordemos que aunque no es fácil definir lo que es el tiempo, siempre lo podemos asociar con las nociones de *duración* y *simultaneidad.* Y el postulado de Einstein convierte ambas nociones en dependientes del observador, es decir, en 'relativas'. Este es el origen del nombre de *Relatividad* dado a la teoría de Einstein.

La figura 2 intenta ilustrar la *relatividad de la duración.* Una fuente de luz situada en un avión emite un destello que se refleja en un espejo y vuelve a su origen. Para un observador situado en el avión, entre la emisión y recepción de la luz por la bombilla transcurre un tiempo τ igual a $2L/c$, donde L es la distancia entre la bombilla y el espejo y c es la velocidad de la luz. Pero para un observador en tierra, la luz ha recorrido una distancia más larga, pues el avión se va desplazando a la derecha a medida que la luz viaja. Es fácil ver utilizando el Teorema de Pitágoras que, segúnel observador en tierra, la distancia recorrida por la luz es

$$\frac{2L}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

donde v es la velocidad del avión con respecto a tierra. Como según el postulado de Einstein la velocidad de la luz con respecto al observador en tierra sigue siendo c, concluimos que para este observador el tiempo transcurrido entre la emisión y la recepción del destello no es $2L/c$, sino

$$t = \frac{2L/v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

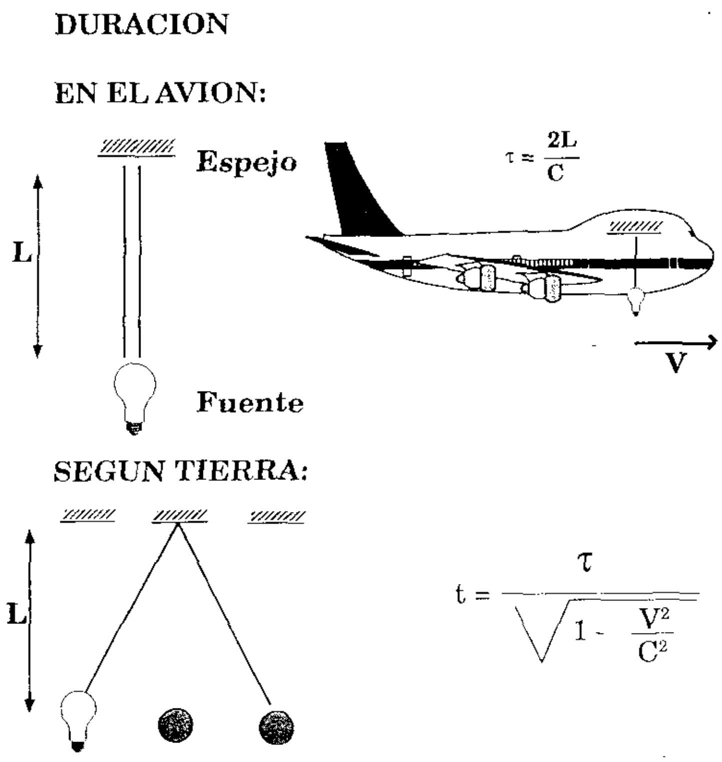


Figura 2

Vemos por tanto que los tiempos medidos por ambos observadores están relacionados mediante la siguiente ecuación:

$$t = \frac{\tau}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Para el observador en el avión los dos sucesos, 'emisión del destello' y 'recepción del destello' por la bombilla tienen lugar *en el mismo sitio,* pues para él la bombilla no se mueve. Al tiempo τ medido entre dos sucesos que tienen lugar en el mismo sitio se la llama 'tiempo propio'. La ecuación anterior nos dice que el tiempo t medido por cualquier otro observador (en este caso el de tierra) siempre es mayor que el tiempo propio τ. Vemos que el convertir la velocidad de la luz en un absoluto (invariancia de c) nos lleva ineludiblemente a la relatividad de la duración. A este fenómeno se le conoce como 'dilatación temporal'.

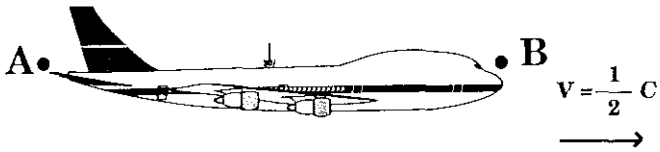
La dilatación temporal da lugar a predicciones casi paradójicas. Cuando una persona viaja, la duración del viaje experimentada por ella es un 'tiempo propio' pues, al no moverse el viajero con respecto a sí mismo, el comienzo y el final del viaje siempre tienen lugar en el mismo sitio. La persona que no viaja experimenta por tanto una dilatación temporal. Esto da lugar a la célebre paradoja de los gemelos: Si uno de los gemelos viaja y vuelve a encontrarse con su hermano, para él habrá transcurrido menos tiempo. El gemelo viajero será más joven que el que se ha quedado en tierra.

Este efecto es muy pequeño a velocidades ordinarias, y por eso había pasado desapercibido. En un vuelo directo Madrid-Los Angeles de 11 horas de duración (a 900 km/h), el viajero sólo envejece unas 20 milésimas de microsegundo menos que el que no viaja. Para alguien que se pase un año en la estación orbital (que se mueve a 8 km/s), la diferencia de tiempo es de 10 milisegundos, poco significativo pero medible con relojes de precisión. Sin embargo, si consideramos el caso más extremo de alguien que viajase hasta Alfa-Centauro (la estrella más próxima al Sol, a unos 4 años-luz de distancia) a una velocida igual al 99 por ciento de la velocidad de la luz, el efecto sería espectacular: Mientras que para un observador en la Tierra el viaje duraría 4 años y 15 días, para el astronauta sólo habrían transcurrido 7 meses.

2.2 Relatividad de la simultaneidad

Junto con la duración de un proceso, la noción de *simultaneidad* está íntimamente ligada a nuestra percepción del tiempo. Todos creemos entender lo que significa que dos sucesos hayan tenido lugar 'al mismo tiempo', o que el suceso S_1 haya tenido lugar antes que el suceso S_2. El propio 'presente' está constituido por un conjunto casi infinito de sucesos simultáneos. Sin embargo, vamos a ver que la invariancia de la velocidad de la luz convierte la simultaneidad en un concepto relativo al observador, y que la idea de un 'presente universal' carece de sentido. Para entender esto, al igual que hicimos al demostrar la relatividad de la duación, analizaremos un experimento que involucra rayos de luz.

Si en el centro exacto de un avión se produce un destello luminoso (figura 3), es obvio que para un observador situado en el avión la luz alcanzará la proa y la popa del mismo a la vez. Dirá que los sucesos S_1, 'la luz llega al punto A', y S_2, 'la luz llega al punto B', son simultáneos.



La lámpara situada en el centro del avión emite un destello. Poco despues tienen lugar dos «sucesos»:

S_1: La luz llega a A.

S_2: La luz llega a B.

Figura 3

Sin embargo, para un observador en tierra A va al encuentro de la luz, mientras que B se aleja. La luz llegará a A antes que a B, por la sencilla razón de que para hacerlo tiene que recorrer una distancia menor (véase la figura 4). Dirá que el suceso S_1 tiene lugar antes que el suceso S_2.

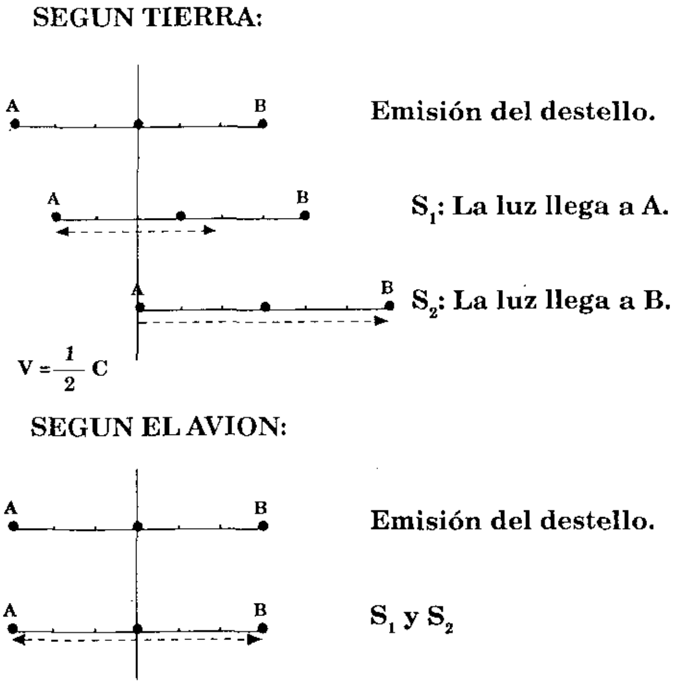


Figura 4

Vemos pues que el concepto de simultaneidad es relativo al observador. Y esto invalida el concepto de 'presente universal'. ¿Qué significa esto? El presente universal sería el conjunto de sucesos que tienen lugar 'ahora', es decir, 'al mismo tiempo'. En otras palabras, sería el un conjunto de sucesos simultáneos. Pero como el concepto de simultaneidad es relativo, no existe un presente universal absoluto. Cada observador puede definir su propio presente, y éste no coincidiá con el que definan los demás.

Un análisis más detallado que el presentado aquí demuestra que es incluso posible invertir la ordenación temporal de sucesos. Es perfectamente posible que mientras que para un observador S_1 ha tenido lugar antes que S_2, para otro observador diferente sea S_2 anterior a S_1. Pero se demuestra también que esta inversión temporal no puede tener lugar si entre los dos sucesos existe una relación causal: sea cual sea el observador, la causa siempre antecede al efecto. La Relatividad es pues compatible con el principio de causalidad.

2.3 La velocidad de la luz como límite

Hemos visto que el postulado Einstein de la invariancia de la velocidad de la luz altera profundamente nuestra concepción del tiempo. Pero además, convierte a la velocidad de la luz en una barrera infranqueable. La razón es la siguiente: Usando argumentos que no describiremos aquí, Einstein pudo demostrar que la masa de un objeto depende de su velocidad. Concretamente, si su masa cuando está en reposo es m_0, su masa cuando se mueve a velocidad v vendrá dada por

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Conforme aumente la velocidad, su masa aumentará también, y crecerá sin límites si la velocidad se aproxima a la de la luz. Como para acelerar un objeto necesitamos aplicar una fuerza proporcional a su masa, necesitaríamos disponer de una fuerza infinita para poder acelerarlo hasta la velocidad de la luz. Esto convierte a la velocidad de la luz en un límite, no ya infranqueable, sino también inalcanzable para cualquier objeto material.

Esto explica que ninguna nave pueda alcanzar la velocidad de la luz pero, ¿seremos algún día capaces de enviar *señales* a velocidades superlumínicas? Se puede demostrar que si pudiésemos enviar una señal a velocidad mayor que la de la luz, para algunos observadores la señal llegaría a su destino *antes* de haber sido emitida. Como una señal puede emplearse par producir un efecto, tendríamos que el efecto podría preceder a su causa. Esto supondría una violación del principio de causalidad, por lo que se cree que tampoco son posibles las velocidades superlumínicas en el caso de señales.

3. El Espacio-Tiempo

En la sección anterior hemos visto que la principal consecuencia de la invariancia de la velocidad de la luz es el carácter relativo del tiempo. La duración de un proceso depende del observador, y sucesos simultáneos para un observador no lo son en general para otros observadores en movimiento.

De manera análoga puede demostrarse el carácter relativo del espacio. La longitud de un objeto no es un concepto absoluto, sino que depende del observador. Para medir un objeto en reposo basta con usar una regla. Para medir un objeto en movimiento, podemos anotar las posiciones de sus extremos, y la diferencia nos dará la longitud. Pero es evidente que si el objeto se mueve, hemos de tener cuidado de medir las posiciones de sus extremos *al mismo tiempo*. De lo contrario, la diferencia entre las posiciones tendrá poco que ver con la longitud del objeto. Pero, dado que la simultaneidad es un concepto relativo, se sigue que también lo será la longitud de un objeto. De hecho, puede demostrarse que si l_0 es la longitud de un objeto en reposo, la longitud l del mismo objeto cuando se mueva a velocidad v vendrá dada por:

$$l = l_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

A este fenómeno se le conoce como 'contracción de las longitudes'.

Vemos pues que al convertirse la velocidad de la luz en un absoluto, el espacio y el tiempo pasaron a ser meros conceptos relativos. De hecho, en 1908 el matemático Hermann Minkowski escribió:

"De ahora en adelante el espacio por sí mismo, y el tiempo por sí mismo, se desvanecerán entre sombras y sólo cierta unión entre los dos conservará una realidad independiente."

¿A qué realidad, a qué unión del espacio y el tiempo se refería Minkowski? Para ayudarnos a comprender lo que tenía en mente al escribir estas palabras, conviene que recordemos una situación análoga en un contexto más elemental.

3.1 El teorema de Pitágoras

Supongamos que queremos calcular la distancia entre dos puntos del plano. Para ello, elegimos un sistema ortogonal de ejes OXY (véase la figura 5) y obtenemos sus coordenadas (x_1, y_1) y (x_2, y_2).

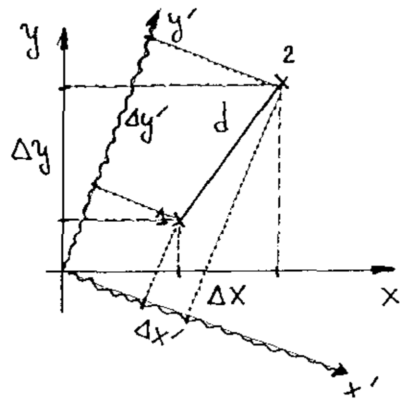


Figura 5

A partir de las diferencias de coordenadas $\Delta x = x_2 - x_1$ y $\Delta y = y_2 - y_1$, calculamos su distancia utilizando el teorema de Pitágoras:

$$d^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$$

Obviamente, podríamos haber elegido un sistema ortogonal $O'X'Y'$ diferente, y tanto las coordenadas como sus diferencias habrían tomado otros valores. Sin embargo, la distancia entre los puntos es un concepto geométrico independiente del procedimiento que se utilice para calcularla, y tendríamos:

$$d^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 = (\Delta x')^2 + (\Delta y')^2$$

Podríamos incluso decir que la 'anchura' Δx y la 'altura' Δy son conceptos 'relativos al sistema de referencia'. De hecho, eligiendo un sistema de ejes apropiado (figura 6) podemos hacer que la 'anchura' sea cero, de forma que $d = \Delta y'$. Sin embargo, la distancia d es un 'invariante', algo que refleja la geometría intrínseca del plano y que no depende del sistema de referencia.

Algo muy similar hemos visto que sucede con el espacio y el tiempo. Tanto la duración (tiempo) como la distancia (espacio) entre dos *sucesos* dependen del observador (sistema de referencia). Ambos son conceptos relativos, al igual que lo son la 'anchura' Δx y la 'altura' Δy del ejemplo anterior. Resulta entonces natural preguntarse si existe algún concepto que combine el espacio y el tiempo y que sea el mismo para todos los observadores, es decir, que sea un invariante. De existir, tendrá que describir alguna propiedad geométrica intrínseca no ya del espacio o del tiempo, sino del *espacio-tiempo*.

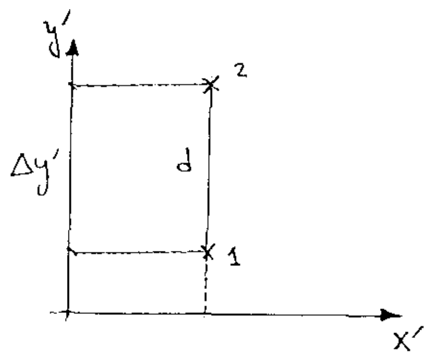


Figura 6

3.2 La métrica de Minkowski

La respuesta a esta pregunta supone una generalización sumamente peculiar del teorema de Pitágoras. Para simplificar el razonamiento, consideraremos únicamente una dimensión espacial, de forma que cada suceso queda caracterizado por la posición sobre el eje de las X en que ha tenido lugar, y por el tiempo t. Si tenemos dos sucesos con coordenadas (x_1, t_1) y (x_2, t_2), Minkowski les asocia una 'distancia espacio-temporal' dada por:

$$d^2 = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2$$

Si comparamos esta fórmula con la que da la distancia entre dos puntos del plano, notaremos dos diferencias. La primera, más bien trivial, es el factor de c^2. Simplemente refleja el hecho de que espacio y tiempo tienen unidades diferentes, y para conseguir algo con dimensiones de longitud a partir de un tiempo tenemos que multiplicarlo por una velocidad.

La segunda diferencia, la presencia de un signo menos, es crucial. Desde un punto de vista matemático, la fórmula para d^2 es una *forma cuadrática* definida positiva en el caso de la distancia entre dos puntos del plano, y no definida en el caso de dos sucesos. Estas formas cuadráticas definen dos 'métricas'. La del plano es la métrica ordinaria o 'euclídea'. La del espacio-tiempo es la métrica minkowskiana, y tiene propiedades poco familiares. Por ejemplo, la distancia espacio-temporal al cuadrado d^2 entre dos sucesos simultáneos ($\Delta t = 0$) que tienen lugar en puntos diferentes ($\Delta x \neq 0$) es negativa.

¿Por qué eligió Minkowski el signo menos? ¿No podía haber tomado un signo más, como en la métrica euclídea? La respuesta es que sólo tomando el signo menos se consigue que la distancia espacio-temporal sea invariante, es decir, igual para todos los observadores. Y sólo en este caso puede corresponder a una propiedad geométrica intrínseca del espacio-tiempo.

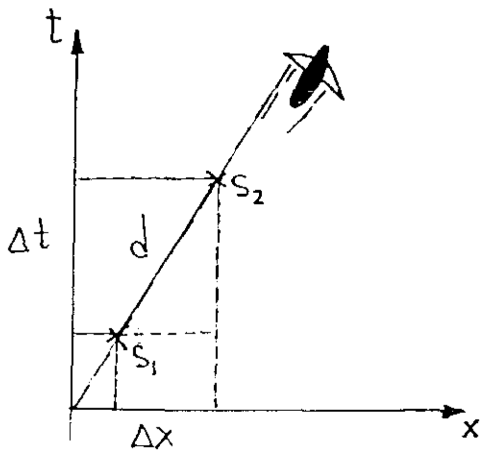


Figura 7

En lugar de intentar dar una prueba general de esta afirmación, la ilustraremos con un ejemplo concreto. En la figura 7 se representa la trayectoria de un avión en un diagrama espacio-temporal. En el avión tienen lugar dos sucesos S_1 y S_2, en el mismo punto del avión. Para un observador de tierra, si entre los dos sucesos transcurre un tiempo Δt, la separación espacial entre los mismos es $\Delta x = v\Delta t$, donde v es la velocidad del avión. La distancia espacio-temporal según este observador es por tanto:

$$d^2 = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 = (c^2 - v^2)(\Delta t)^2$$

Para un observador del avión ambos sucesos tienen lugar en el mismo punto (figura 8), por lo que $\Delta x' = 0$ y $d'^2 = c^2(\Delta t')^2$. Pero$\Delta t'$ es un *tiempo propio*, y la relación con Δt será la dada por el fenómeno de dilatación temporal descrito anteriormente:

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

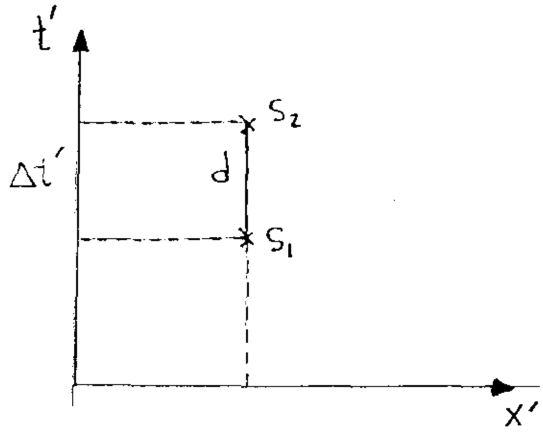


Figura 8

Esto implica

$$d'^2 = c^2(\Delta t')^2 = c^2(\Delta t)^2(1 - \frac{v^2}{c^2}) = (c^2 - v^2)(\Delta t)^2 = d^2$$

y vemos que ambos observadores miden la misma distancia espacio-temporal. Es obvio que esto no sería cierto de haber tomado el signo más en la definición de d^2.

Para sucesos que tienen lugar en nuestro universo con tres dimensiones espaciales la distancia espacio-temporal está dada por la métrica minkowskiana

$$d^2 = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2$$

que es una generalización inmediata de la estudiada hasta ahora. Esta métrica define la geometría de la variedad espacio-temporal en la que tienen lugar los sucesos que componen la realidad. Los tiempos y las posiciones atribuidos a los sucesos son conceptos relativos, dependientes del observador. Pero la geometría del espacio-tiempo es un concepto invariante, igual par todos los observadores. Este es el sentido de la afirmación de Minkowski, que repetimos aquí y con la que terminamos esta sección:

"De ahora en adelante el espacio por sí mismo, y el tiempo por sí mismo, se desvanecerán entre sombras y sólo cierta unión entre los dos conservará una realidad independiente."

4. El espacio-tiempo curvo

Las ideas presentadas hasta ahora corresponden a lo que se ha venido en llamar la 'Teoría Especial de la Relatividad', y salvo la formulación espacio-temporal de Minkowski, fueron introducidas por Einstein en 1905. Un problema con la teoría especial es que era incompatible con la existencia de la fuerza de gravedad tal como la había formulado Newton en 1687. Esto fue desde el principio obvio para Einstein, quien dedicó los siguientes diez años de su vida a buscar una teoría que incorporase la Relatividad y la Gravitación. El resultado, la 'Teoría General de la Relatividad' publicada en 1915, constituye una obra monumental comparable a los *Principia* de Newton.

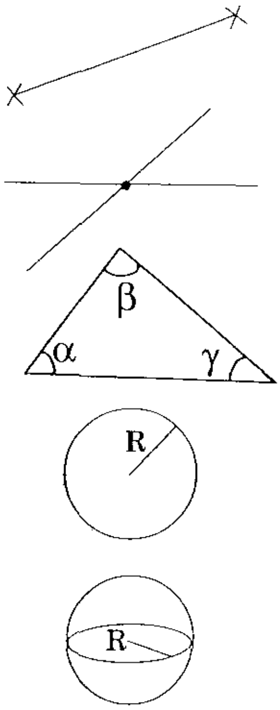
En la teoría de Newton la gravedad aparece como una fuerza que 'actúa a distancia'. Esto significa que si tenemos dos cuerpos en movimiento, la fuerza que actúa sobre cada uno de ellos *ahora* depende de la posición del otro *en el mismo instante.* Vemos pues que entra en juego el concepto de simultaneidad, que en la Relatividad Especial deja de tener un sentido absoluto. En lo que sigue veremos que la solución de Einstein consistió en dejar de considerar la gravedad como una fuerza. Para Newton, la manzana cae porque la Tierra ejerce una fuerza de atracción gravitatoria sobre ella. Para Einstein no existe la fuerza de gravedad y la explicación es completamente diferente. Para entenderla, hemos de recurrir el concepto de espacio curvo.

4.1 Geometrías no euclídeas

La geometría que aprendemos de pequeños y que resulta útil en muchas circunstancias es la llamada 'geometría euclídea', por poder deducirse de unos pocos postulados básicos atribuidos a Euclides. En la figura 9 vemos algunas de sus proposiciones más conocidas.

Las geometrías 'no euclídeas' fueron descubiertas en el siglo XIX por varios matemáticos: Bolyai (1823), Lobachevsky (1826) y Riemann (1854). Todas tienen en común el abandono del llamado 'quinto postulado' de Euclides, y su sustitución por uno diferente. Este postulado hace referencia al número de paralelas a una recta que es posible trazar por un punto exterior a la misma, y se supone igual a uno en la geometría tradicional o euclídea, pero no así en las nuevas geometrías. Desde cierto punto de vista, la geometría euclídea es una geometría 'plana', y las no euclídeas son geometrías 'curvas'.

GEOMETRIA EUCLIDEA



La línea recta es la distancia más corta entre dos puntos.

Dos rectas distintas no pueden cortarse en más de un punto.

$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$

$L = 2\pi R$

$A = 4\pi R^2$

Figura 9

Para entender lo que esto significa, conviene eliminar una de las tres dimensiones del espacio ordinario y quedarnos con una variedad bidimensional. En la figura 10 se ha representado la superficie de una esfera. Podemos imaginarnos además unos seres bidimensionales que viven sobre la misma y son totalmente incapaces de concebir una tercera dimensión. Si estos seres se dedicasen a explorar su mundo y su geometría se encontrarían con algunas sorpresas. Podrían construir circunferencias alrededor del polo norte, y observarían que su longitud es menor que $2\pi r$; peor aún, después de sobrepasar el ''ecuador', un aumento del radio implicaría una *disminución* de la longitud de la circunferencia, hasta que al llegar al polo sur, ¡se encontrarían con una circunferencia de longitud cero que contiene a todas las construidas previamente! También comprobarían que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es *mayor* que 180 grados, y que dos 'rectas' pueden cortarse en más de un punto. De hecho, todas las 'rectas' que pasan por el polo norte se vuelven a encontrar en el polo sur.

UNIVERSO CURVO EN DOS DIMENSIONES

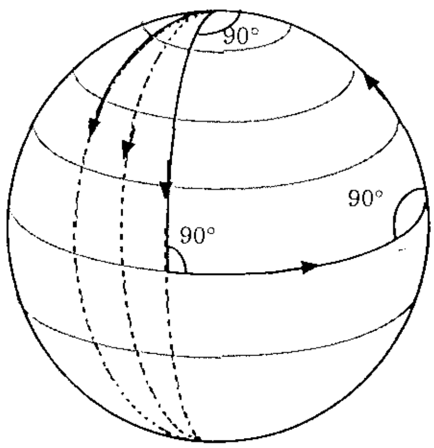


Figura 10

Los resultados anteriores serían ciertos para un espacio con *curvatura positiva*. En un espacio con curvatura negativa (véase figura 11), la suma de los ángulos interiores de un trángulo sería menor que 180 grados, y la longitud de la circunferencia mayor que $2\pi r$.

CURVATURA

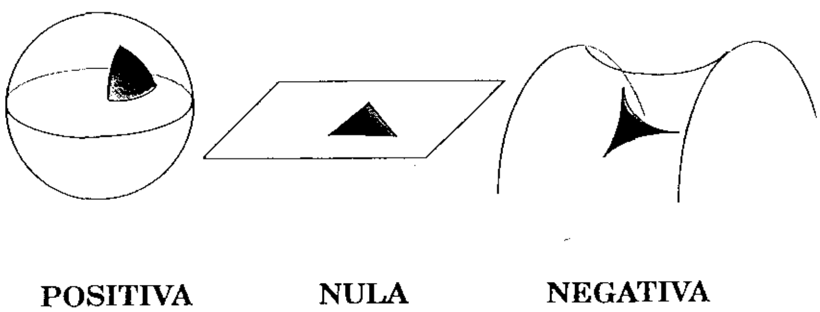


Figura 11

Es fácil extrapolar todo esto a un espacio curvo tridimensional. Si nuestro Universo fuese un espacio con curvatura positiva, la superficie de las *esferas* centradas en un punto sería menor que $4\pi r^2$, y superado cierto valor del radio su área *dis-*

minuiría, hasta reducirse a cero al final. Por otra parte, si enviásemos una nave y ésta mantuviese un rumbo fijo, acabaría regresando al punto de partida.

Nuestra experiencia cotidiana nos indica que vivimos en un espacio tridimensional plano, descrito por la geometría euclídea. Sin embargo, sólo tenemos experiencia directa del espacio a distancias pequeñísimas en comparación con el tamaño del universo. Cabe pregunarse si a gran escala nuestro universo sigue siendo plano. Después de todo, una porción muy pequeña de una esfera parece ser plana.[3]

Esta pregunta ya se la hizo William Clifford en 1872. Estudiando las relaciones geométricas entre las estrellas más próximas, no pudo detectar ninguna discrepancia con la geometría euclídea y concluyó que, al menos hasta distancias de unos cuantos años luz, el espacio era plano. Einstein en cambio consideró la curvatura del *espacio-tiempo*, y concluyó que la gravedad no era sino una manifestación física de la misma.

4.2 Rectas, geodésicas y el principio de inercia

El lector habrá notado quizás que al referirnos a las rectas que pasan por el polo norte y vuelven a encontrarse en el polo sur de la esfera de la figura 10 hemos utilizado comillas. La verdad es que desde nuestro punto de vista tridimensional cualquier línea contenida en la superficie de una esfera es una curva, no una recta. Sin embargo, para un ser bidimensional confinado a su superficie e incapaz de imaginar una tercera dimensión, los 'círculos máximos' son las 'rectas' más rectas que puede concebir. Como prueba aducirá además que el explorador que sale del polo norte y viaja siguiendo un meridiano (círculo máximo) *nunca se desvía ni a la izquierda ni a la derecha.*

En un sentido estricto, lo que hemos llamado 'rectas' sobre la superficie de la esfera son en realidad 'geodésicas'. Una geodésica es lo más parecido a una recta que podemos tener en un espacio curvo. Los triángulos de las figuras 10 y 11 están formados por geodésicas, no por rectas.

En un espacio plano, la recta es 'la distancia más corta entre dos puntos'. De la misma manera, dados dos puntos en un espacio curvo la 'geodésica' sería la curva de longitud mínima que los une. Los 'círculos máximos' de una esfera cumplen precisamente esta condición.

Una definición más sofisticada de geodésica utiliza la palabra *extremal* en lugar de mínima. De hecho, es fácil ver que en un espacio-tiempo de Minkowski las rectas

[3]Técnicamente diríamos que una geometría curva localmente es euclídea.

(como la trayectoria del avión en la figura 7) tienen longitud *máxima*, no mínima. En este sentido, en el espacio-tiempo minkowskiano 'la recta es la distancia *más larga* entre dos puntos'.

El último ingrediente necesario para entender la explicación de Einstein de la gravedad esd el 'principio de inercia'. Este fue formulado por Newton y afirma que en ausencia de fuerzas un cuerpo sigue un movimiento rectilíneo a velocidad constante. Por ejemplo, si el cuerpo se mueve en la dirección de las X, la ecuación que describe su movimiento será:

$$x = x_0 + vt$$

Nótese que ésta es la ecuación de una recta en el plano OXT. Podemos por tanto reformular el principio de inercia de la siguiente manera:

En ausencia de fuerzas, la trayectoria de un cuerpo en el espacio-tiempo de Minkowski es una línea recta.

Esta es una formulación geométrica de un principio físico, pero es válida únicamente en ausencia cualquier fuerza, incluyendo la de gravedad. ¿Cómo podemos extender esta formulación cuando estamos en presencia de la gravedad?

La idea de Einstein es muy simple en principio: la gravedad *no* es una fuerza. La Tierra no atrae a los cuerpos a través de una fuerza, sino que *curva el espacio-tiempo a su alrededor.* Y en su presencia los cuerpos siguen geodésicas en el espacio-tiempo curvo. El principio de inercia sirve tanto en ausencia como en presencia de la gravedad, pues basta con sustituir la palabra 'recta' por 'geodésica'. Cuando vemos un planeta describir una elipse alrededor del Sol, nos parece que su trayectoria no tiene nada de recta. Sin embargo, si pudiesemos ver su trayectoria no ya en el espacio, sino en el *espacio-tiempo* curvo, nos daría mos cuenta de que describe una geodésica perfecta, la línea más recta posible en presencia de curvatura.

Aunque aparentemente simple en principio, esta idea resultó muy difícil de implementar en la práctica. Esto lo consiguió Einstein gracias a la ayuda de su amigo el matemático Marcel Grossmann, quien le introdujo al 'cálculo diferencial absoluto' de Levi-Civita y a las ideas geométricas de Riemann. Así, algo que pasaba por ser una de las partes mas abstrusas de las matemáticas y de la geometría se convirtió en la base de una de las teorías físicas más revolucionarias del siglo XX.