# Las matemáticas en el deporte

**por**

**Carlos Gorría Corres, Universidad del País Vasco-Euskal Herriko Unibertsitatea**

## 1. La mecánica de la carrera

**Objetivo:** Recorrer un determinado espacio en el mínimo tiempo posible.

**Factores que influyen en la velocidad:** Longitud y frecuencia de la zancada.

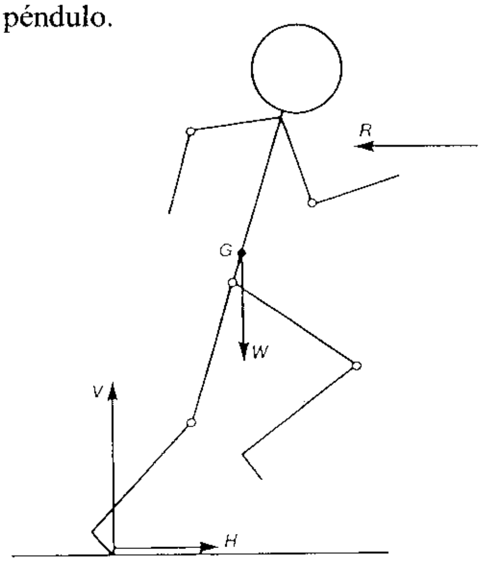
### 1.1 Algunas consideraciones

• Se ha comprobado estadísticamente que existe una proporción entre la altura del atleta y la longitud de su zancada: *longitud_zancada* $\approx$ *1.14 (altura_atleta)*

• Los corredores de pruebas de velocidad (100, 200, 400 m) procuran colocarse lo antes posible en la posición de máxima velocidad y para ello obtienen de los tacos una inmejorable ayuda. La distancia usual entre los tacos suele ser corta (0.3 m), media (0.4 a 0.5 m) o larga (0.6 a 0.7 m). Quien use la corta saldrá con más fuerza debido al impulso inicial de las dos piernas, pero necesitará más tiempo para adoptar una posición de carrera adecuada, mientras que, con una distancia media entre los tacos, el tiempo necesario para tomar esta posición será menor. Aunque para cada corredor la distancia óptima entre tacos puede variar ligeramente, la más eficaz será a la que hemos denominado "media".

• En las carreras de 200 y 400 m, también debemos tomar en cuenta la influencia de las curvas. El cuerpo, al entrar en una curva, induce una velocidad angular y junto a ella una fuerza centrífuga. Para compensar esta fuerza, el suelo reacciona con una fuerza centrípeta que se aplica gracias a la fuerza de rozamiento. En el caso de las competiciones en pista, la disminución del ángulo de las curvas conlleva el aumento de la fuerza centrífuga, y es necesaria la instalación de peraltes para evitar resbalones, debido a la mayor inclinación que adoptan los atletas para contrarrestar la fuerza centrífuga.

• En la salida de tacos, el cuerpo del corredor se encuentra horizontal y hasta adoptar la posición vertical la aceleración tiene componente horizontal y vertical, después tan sólo conserva su componente horizontal. Aún así, el cuerpo nunca viaja totalmente erguido, sino que se inclina ligeramente hacia adelante para compensar la fuerza de rozamiento del viento. El cuerpo, cuando viaja casi vertical, simula el movimiento de un péndulo.

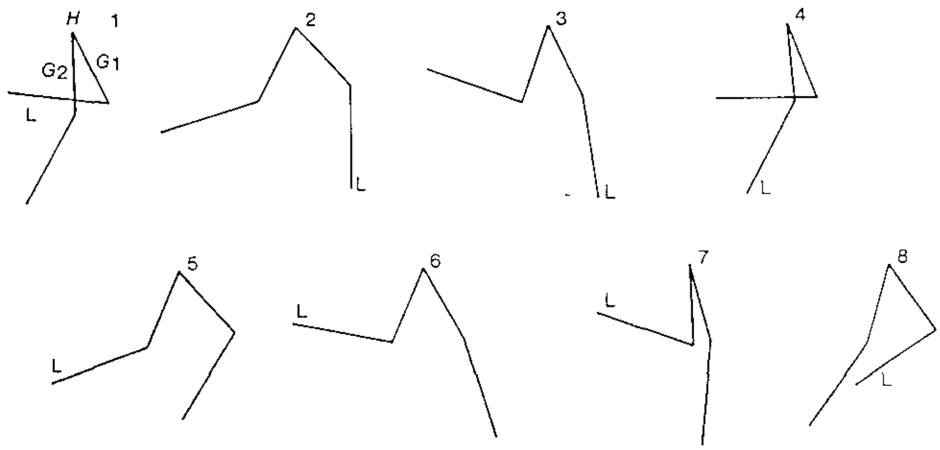



• El paso del corredor es cíclico y completa las siguientes tres etapas:

1. La primera es de soporte (desde que el pie se apoya en el suelo hasta que el centro de masa está por encima de él).
2. La segunda es de impulso (desde el final de la anterior hasta que el pie deja el suelo).
3. La tercera es de retroceso (período en el que la pierna permanece en el aire).

En la primera etapa, no se hace fuerza para no perder equilibrio, en la segunda, se toma velocidad y durante la tercera, el cuerpo describe un tiro parabólico.

• Es importante ver que, cuando un pierna gira, ejerce momento angular sobre la cadera y es necesario que la otra pierna se mueva antisimétricamente para compensar sus efectos, mientras los brazos también se mueven para mantener el equilibrio. Tampoco es un capricho que cuando la pierna viaja, ésta va encogida y no se estira hasta el momento de tomar suelo, porque, cuanto menor es el radio, menor es el momento angular inducido y la energía necesaria para realizar el movimiento ($P = L \cdot \omega$).




## 1.2 Modelo matemático

$$\text{Distancia} = \int_0^T v(t)\, dt \ , \quad \text{donde } v(t) \text{ es la velocidad}$$

La fuerza de rozamiento del aire es proporcional a la velocidad $R = K \cdot v(t)$.

La ecuacion de la dinámica del corredor es la siguiente:

$$m \cdot \frac{dv}{dt} = m \cdot a = m \cdot F(t) - m \cdot R \implies \frac{dv}{dt} = F(t) - Kv(t) \quad \text{con } v(0) = 0.$$

y se convierte en una ecuación diferencial para $v(t)$ .

Durante el movimiento, la fuerza máxima desarrollada por el corredor es $F^*$, y depende de su capacidad física, por tanto, $F(t) \leq F^*$ .

El oxígeno que envía la sangre a los músculos es $E(t) \geq 0$ y se cumple $\dfrac{dE}{dt} = S - F \cdot v$, siendo $S$ la cantidad de oxígeno sobrante en situación de reposo.

Para ganar la carrera, se debe minimizar $T$ teniendo en cuenta las consideraciones anteriores.

Para carreras cortas, el consumo de oxígeno es bajo y no es necesario incluirlo en el modelo. Además, se puede considerar que el atleta se emplea al máximo durante todo el esfuerzo y $F(t) = F^*$. Basta resolver la ecuación diferencial para $v(t)$ e integrarlo en el tiempo:

$$D = \frac{F^*}{K}\int_0^T (1 - e^{-Kt})\, dt \implies D = \frac{F^*}{K}\left(T - \frac{1}{K}(1 - e^{-KT})\right).$$

Sin embargo, en carreras largas, el consumo de oxígeno es determinante y el modelo (teniendo en cuenta que lo ideal es acabar la carrera vacío de oxígeno, $E(T) = 0$) será el siguiente (suponiendo la velocidad constante $v(t) = v = F(t)/k$ para simplificar el sistema):

$$\int_{E(0)}^0 dE = \int_0^T (S - Fv)\, dt \implies 0 - E(0) = \int_0^T (S - Kv^2)\, dt = (S - Kv^2)T$$

$$v^2 = \frac{1}{K}\left(S + \frac{E(0)}{T}\right) \implies D = \int_0^T \sqrt{\frac{1}{K}\left(S + \frac{E(0)}{T}\right)}\, dt \implies$$

$$D = \sqrt{T^2 \cdot \frac{S}{K} + T \cdot \frac{E(0)}{K}}$$

Mediante pruebas de esfuerzo, con análisis de consumo de ácido láctico y oxígeno y medición experimental del efecto del rozamiento del viento sobre el cuerpo del atleta, se pueden determinar las constantes $\dfrac{S}{K}$ y $\dfrac{E(0)}{K}$ para resolver numéricamente esta ecuación y determinar las aptitudes del atleta en carreras de velocidad o de fondo.

**2. Lanzamientos**

La teoría del tiro parabólico es fundamental en este tipo de deportes.

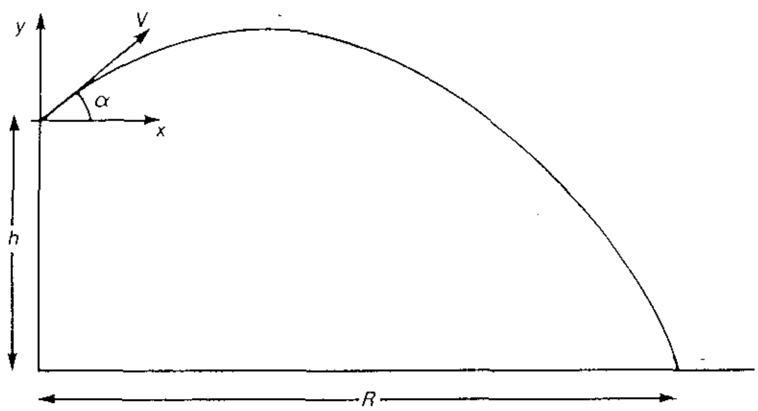
**2.1 Lanzamiento de peso**

La distancia recorrida por un objeto lanzado desde el nivel del suelo (proyectil de cañón) está determinada por la fórmula del tiro parabólico

$$\left.\begin{array}{l} x = v \cdot t \cdot \cos\alpha \\ y = v \cdot t \cdot \sin\alpha - \frac{1}{2}g \cdot t^2 = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow t = \frac{2v\sin\alpha}{g}$$

Por consiguiente, la longitud del lanzamiento es $x(t) = \dfrac{2v^2 \sin\alpha\cos\alpha}{g}$ .

Si derivamos esta distancia con respecto al ángulo $\alpha$ e igualamos la expresión a 0, encontraremos el ángulo óptimo que es de $45^o = \dfrac{\pi}{4}$ para alcanzar la longitud máxima.




Pero, en el caso de un lanzador de peso, la bola no despega desde el suelo, sino desde su brazo y, teniendo en cuenta que la altura del atleta es significativa en comparación a la longitud del lanzamiento, no será válida la fórmula del tiro parabólico simple, sino que habrá que formular ecuaciones diferenciales para modelizar esta situación y el ángulo óptimo dependerá de la altura del atleta y de la energía que imprima inicialmente a la bola

$$\left.\begin{array}{l} x = v \cdot t \cdot \cos\alpha \\ y = h + v \cdot t \cdot \sin\alpha - \frac{1}{2}g \cdot t^2 = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow t = \frac{2v\sin\alpha + \sqrt{4v^2\sin^2\alpha + 8gh}}{2g}$$

y ahora la expresión para la distancia es la siguiente

$$x(t) = \frac{v^2\cos\alpha}{g}\left(\sin\alpha + \sqrt{\sin^2\alpha + \frac{2gh}{v^2}}\right).$$

Los valores habituales son $v \approx 10 - 14\, m/s$ , $\alpha \approx 40 - 45^o$ , $h \approx 1.8 - 2.5\, m$ .

Nuevamente, para saber su valor máximo derivaremos con respecto a $\alpha$ ,

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha} = \frac{v^2}{g}\left( - \sin^2\alpha - \sin\alpha\sqrt{\sin^2\alpha + \frac{2gh}{v^2}} + \cos^2\alpha + \frac{\sin\alpha\cos^2\alpha}{\sqrt{\sin^2\alpha + \frac{2gh}{v^2}}} \right) = 0$$

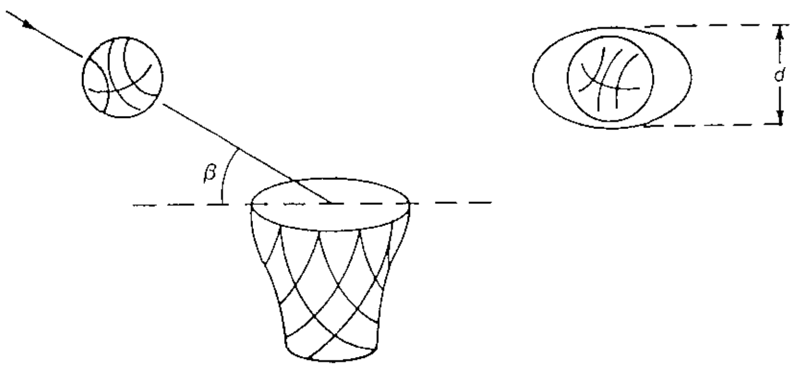
Para conocer el ángulo apropiado de tiro $\alpha$ para un atleta concreto, primeramente mediremos su altura $h$ y, experimentalmente, la velocidad de salida de la bola $v$ instalando en ésta un sensor magnético. Después, basta con resolver numéricamente la ecuación no lineal deducida anteriormente para $\alpha$.

Si añadimos al sistema la influencia del rozamiento del aire $\approx 0.2 \cdot d^2 \cdot v^2$, donde $d$ es el diámetro de la bola, entonces obtendríamos un sistema de ecuaciones diferenciales acopladas para las variables $x$ e $y$ , que sería mucho más complicado de resolver.

## 2.2 Lanzamiento en baloncesto

En el lanzamiento del balón de baloncesto, ocurre el efecto contrario, puesto que el punto de lanzamiento queda por debajo de la canasta.

El balón tiene 24.6 cm de diámetro y la cesta 45. Aunque la canasta es bastante mayor que el balón, éste no es fácil de introducir, puesto que no sigue una trayectoria perpendicular. Sea $\beta$ el ángulo de la dirección del balón en bajada; en esa dirección, la canasta se convierte en una elipse cuyo diámetro mínimo es $45 \cdot \sin\beta$ cm, por lo tanto, el balón no entrará si el ángulo de llegada es $\beta < 33^o 8'$ .




Supongamos que se lanza un tiro libre desde una altura de 2.15 m y la canasta está colocada a 3.05 m. Dejando a un lado la influencia del aire las ecuaciones quedan,

$$x_1 = v \cdot t \cdot \cos\alpha$$
$$y_1 = v \cdot t \cdot \cos\alpha - \tfrac{1}{2} g \cdot t^2$$

Igualando $t$ en ambas, tenemos $y_1 = x_1 \cdot tan\alpha - \dfrac{gx_1^2}{2v^2} \cdot sec^2\alpha, (sec^2\alpha = 1 + tan^2\alpha)$.
Ahora se puede despejar $\alpha$ ,

$$\boxed{tan\alpha = \tfrac{v^2}{gx_1}\left(1 \pm \sqrt{1 - \tfrac{2g}{v^2}\left(y_1 t \tfrac{gx_1^2}{2v^2}\right)}\right)}$$

El balón, al caer en la canasta, cumplirá la siguiente igualdad

$$\boxed{-tan\beta = \tfrac{dy}{dx} = tan\alpha - \tfrac{gx}{v^2} sec^2\alpha}.$$

En la realidad, la línea de tiro libre está a una distancia de 4.6 m y el balón debe subir 0.9 m. La velocidad aproximada de salida del balón es de 8 m/s. Introduciendo estos datos en las ecuaciones del primer cuadro, obtenemos dos valores para $\alpha$, $\alpha_1 = 64^o28'$ y $\alpha_1 = 36^o36'$ y sustituyendo estos dos valores en el segundo cuadro, deducimos dos valores para $\beta$, $\beta = 59^o34'$ y $\beta = 19^o21'$ . De esos dos valores, sólo el primero acabará en la canasta.

Calculando la altura máxima que alcanza el balón, hallamos la altura mínima a la que se deberá instalar la iluminación del pabellón. Tomando $h = 2.15\ m$, $v = 8\ m/s$ y $\alpha = 4^o28'$ se deduce,

$$y = vt\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2 \Longrightarrow \frac{dy}{dt} = v\sin\alpha - gt = 0 \Longrightarrow T = \frac{v\sin\alpha}{g} \Longrightarrow y(T) = \frac{v^2\sin^2\alpha}{2g}$$

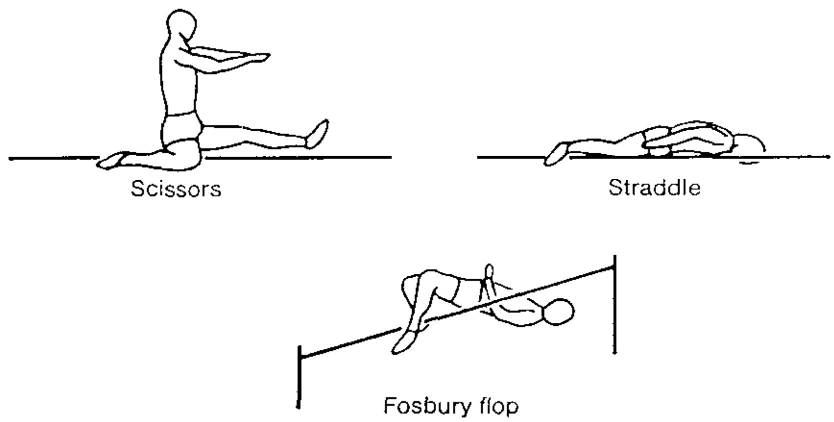
y con estos datos, la altura es de $h + y(T) = 4.81m$.

## 3. Saltos

En los saltos, habrá que tener muy en cuenta el centro de masa.

### 3.1 Salto de altura

En el salto de altura se trata de rebasar una línea situada a cierto nivel sobre el suelo. Durante la historia, se han desarrollado diferentes técnicas para superar esa línea. En un principio, el atleta saltaba erguido, pero esta forma no era muy adecuada, puesto que el centro de masa se encuentra en el tronco, y había que ponerlo muy por encima de la altura de salto. Más tarde, se desarrolló la técnica de "rosca", que consistía en posicionar el cuerpo horizontalmente y girar alrededor del listón. Por último, en el año 1968, Richard Fosbury provocó una revolución con su nueva técnica y en la actualidad todos los saltadores la utilizan. El atleta salta de espaldas y curva su cuerpo durante el salto para rebasar la altura, mientras algunas partes de su cuerpo están por debajo del listón; de esta manera el centro de gravedad permanece siempre por debajo de ese nivel y se pueden conseguir mejores marcas con el mismo impulso.

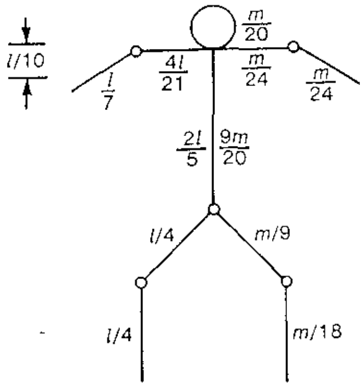


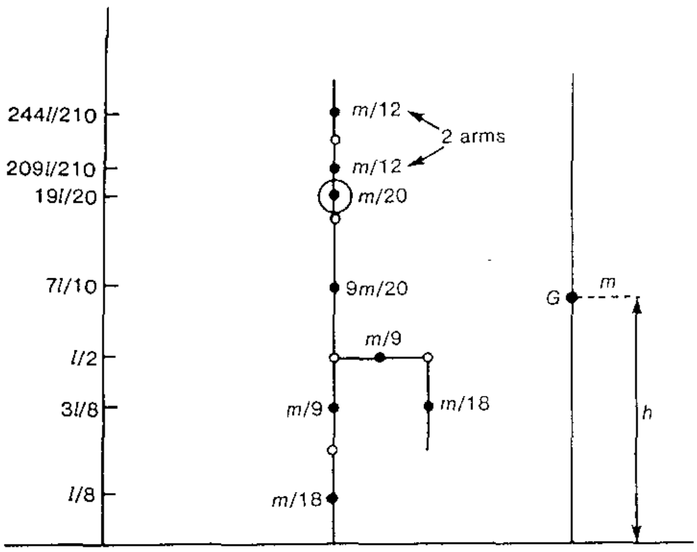

Cuando el atleta salta, sigue el comportamiento de un proyectil. La trayectoria del centro de gravedad es parabólica, comenzando en $y(0) = h$. La carrera es horizontal, y al final toma impulso ascendente $I = v \cdot m$, la velocidad horizontal $u$ permite pasar al otro lado de la línea, y la vertical $v$ cumplirá la segunda ley de Newton, $y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + h$ , $v = \frac{dy}{dt} = -gt + v_0$ . La altura superada por el centro de gravedad es $y_{max} = \frac{v^2}{2g} + h$ . El valor de $y_{max}$ depende del impulso, la curvatura que adopta el cuerpo y la distribución del peso en el atleta. Lógicamente es conveniente que el saltador sea alto.

Si la altura del saltador es $l$ y su masa $m$ , en el momento del salto la posición del centro de gravedad será.

$$h = \frac{m}{18}\frac{l}{8} + \frac{m}{9}\frac{3l}{8} + \frac{m}{18}\frac{3l}{8} + \frac{m}{9}\frac{l}{2} + \frac{9m}{20}\frac{7l}{10} + \frac{m}{12}\frac{209l}{210} + \frac{m}{20}\frac{19l}{20} + \frac{m}{12}\frac{244l}{210} = 0.667 \cdot l$$

Por ejemplo un atleta de 1.98 m. de altura tendrá su centro de gravedad a 1.32 m del suelo y uno de 1.83 m a 1.22 m.




El impulso necesario para superar una altura concreta es $I^2 = 2m^2g(y_{\max} - h)$. Por ejemplo, un saltador de 1.98 m, cuyo centro de gravedad deba pasar por 2.13 m, necesitará un impulso de $I^2 = 2m^2g * 0.81$ .

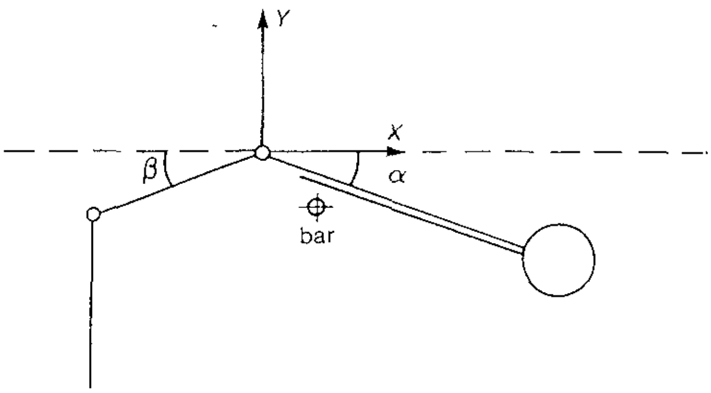
Analicemos la posición del saltador mediante los ángulos que forman sus piernas y su cuerpo cuando la cintura esta rebasando el listón:

$$(\overline{X}, \overline{Y}) = \left(\frac{251}{1680} l\cos\alpha - \frac{1}{18} l\cos\beta, -\frac{251}{1680} l\sin\alpha - \frac{1}{18} l\sin\beta - \frac{1}{72} l\right)$$

Si los angulos son $\alpha = \beta = 20^o$ y la altura es $l = 1.98$ , entonces $(\overline{X}, \overline{Y}) = (0.175, -0.166)$ . El centro de masas está 16.6 cm por debajo de la cintura y para sobrepasar los 2.13 m, el impulso necesario es,

$$I^2 = 2 \cdot m^2 \cdot g \cdot (1.964 - 1.32) = 2 \cdot m^2 \cdot g * 0.644,$$

mucho menor que con las otras técnicas.



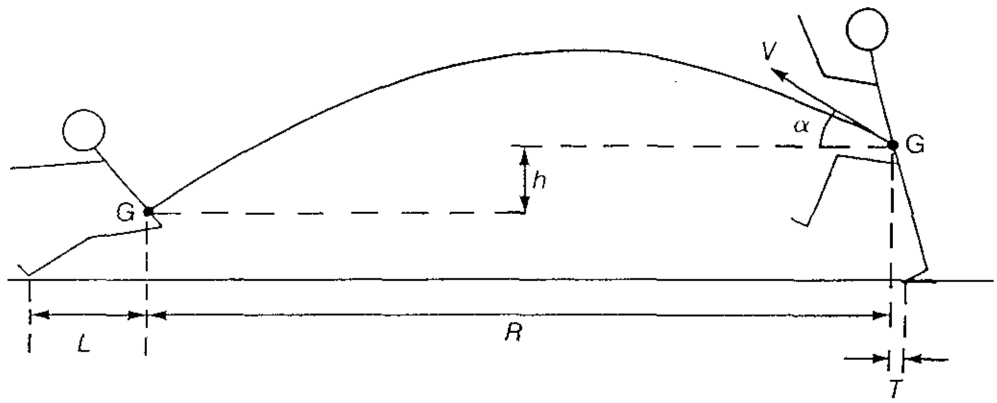

### 3.2 Salto de longitud

En el salto de longitud, consideraremos las ecuaciones del movimiento bajo el efecto gravitacional y la conservación del momento, sin tomar en cuenta el rozamiento del aire. Durante el vuelo, las piernas del atleta giran como las de un ciclista y tiene su explicación.

El vuelo del saltador tiene sigue una trayectoria parabólica y hay que tener en cuenta que en el impulso centro de gravedad está un poco por delante del pie de batida y al caer por detrás del punto de aterrizaje y por debajo del nivel de salida. Por tanto, la distancia es $D = T + R + L$ , donde,

$$D = \frac{v^2 \cos \alpha}{g} \left[ \sin \alpha + \sqrt{\sin^2 \alpha + \frac{2gh}{v^2}} \right]$$

con $v$ como velocidad inicial del salto y $\alpha$ el ángulo con la horizontal. Los valores habituales de estos parámetros son $v \approx 8 - 10\, m/s$ , $\alpha \approx 18^o - 22^o$ , $h \approx 0.4 - 0.6\ m.$ , $L \approx 0.75 - 1\ m$ , $T \approx 0.3 - 0.4\ m$ . Es clara la influencia de la velocidad inicial puesto que afecta cuadráticamente en la longitud.




Por ejemplo, para los datos $v = 9\ m/s$ , $\alpha = 20^o$ y $h = 0.5\ m$ , el recorrido del centro de gravedad es $R = 6.44$ y sumando $L = 0.8$ y $T = 0.35$, la longitud total es $D = 0.35 + 6.44 + 0.8 = 7.59$ .

Factores a tener en cuenta en la técnica del salto:

• El último paso se da ligeramente más corto y bajo para dar un mayor impulso al centro de masa.

• La pierna libre se adelantanta para aumentar el efecto de acción y rección sobre el pie de batida y para avanzar el centro de gravedad.

• El avance de la pierna crea un momento de inercia sobre la cadera y obliga a mover la otra pierna y los brazos cíclicamente para compensarlo.

• Al final, ambas piernas se sitúan por delante del cuerpo para adelantar el punto de contacto y aumentar la longitud del salto.

### 3.3 Análisis del record mundial de 1968

En el año 1968, el estadounidense Bob Beamon realizó un salto prodigioso de 8.90 m en la Olimpiada de México, e hicieron falta 30 años para que Mike Powel superara el registro. Durante mucho tiempo, se especuló con la influencia del rozamiento del aire, menos denso por efecto de la altura, pero vamos a analizar todos los factores del salto.

Igualando fuerzas $m \cdot a = m \cdot g + D$ , donde $D$ representa la fuerza de rozamiento del aire. Siendo $\rho$ la densidad del aire (a nivel del mar $\rho \approx 1.225 kg/m^3$ y en

Ciudad de México $\rho \approx 0.984 kg/m^3$ ), la fuerza de rozamiento está en función de $v^2$ y $A$ (superficie del cuerpo). En concreto, $D = \frac{1}{2} M \cdot \rho \cdot A \cdot v^2$, con $M$ = cte. La trayectoria del cuerpo es un tiro parabólico en la dirección $\widehat{V}$ , consecuentemente el efecto del aire sobre el cuerpo es $D = -\frac{1}{2} M \cdot \rho \cdot A \cdot v^2 \cdot \widehat{V}$ .

La trayectoria vertical es corta y el aire no influye apenas en ella y podemos deducir $T$ del apartado anterior, integrando la velocidad horizontal en ese periodo hallamos su longitud $m \cdot a = m \cdot \frac{du}{dt} = -\frac{1}{2} M \cdot \rho \cdot A \cdot u^2$. Separamos las variables e integramos,

$$\int_{u(0)} \frac{du}{u^2} = -\frac{M\rho A}{2m} \int_0 dt \Longrightarrow \frac{1}{u} = \frac{M\rho A}{2m} t + \frac{1}{u(0)}$$

donde $u(0)$ es la velocidad longitudinal inicial.

Podemos escribir $u = \frac{dx}{dt}$ y aplicar separación de variables de nuevo.

$$\int_0^R dx = \int_0^T \frac{dt}{\frac{M\rho A}{2m} t + \frac{1}{u(0)}} \Longrightarrow R = \frac{2m}{M\rho A} log_e \left(1 + \frac{M\rho A u(0) T}{2m}\right)$$

La duración del salto y la velocidad inicial suelen ser aproximadamente $1s$ y $10m/s$ luego $\frac{M\rho A u(0) T}{2m} << 1$ y se puede desarrollar la serie para el logaritmo,

$$R = \frac{2m}{M\rho A} \left( \frac{M\rho A u(0) T}{2m} - \frac{1}{2} \frac{M\rho A u(0) T}{2m}^2 + \dots \right) \approx u(0) - \frac{M\rho A u(0)^2}{4m} T^2$$

evaluando esta fórmula, considerando la altura de México y comparándola con la del mar

$$R_2 - R_1 \approx \frac{M A u(0)^2 T^2}{4m} (\rho_1 - \rho_2) = 0.042m.$$

Se deduce que la diferencia de longitud seria de unos $4cm$, con lo que podemos asegurar que, en cualquier caso,

**el salto de Bob Beamos fue extraordinario.**

## Bibliografía

[T] M. Stewart Townend, *Mathematics in sport*, John Wiley & Sons, 1984.