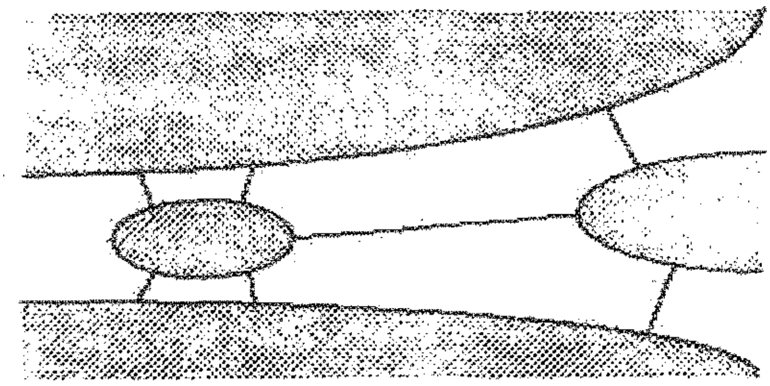
Áreas y Puzzles

por

Martintxo Saralegi-Aranguren, Université d'Artois

David Hilbert (1896-1943) nació en un pueblo cerca de Königsberg, la capital de la Prusia del Este en aquella época (hoy Kaliningrado, Rusia). La ciudad de Königsberg es famosa por ser la ciudad natal de Immanuel Kant, pero también es famosa por sus siete puentes y por el problema que consistía en saber si una persona podría cruzar todos los puentes una sola vez.

Este problema fue resuelto por Euler, quien demostró que no tenía solución.



Hilbert fue catedrático en Gotinga, el hogar académico de Gauss y Riemann. Contribuyó de forma sustancial en casi todas las ramas de las Matemáticas. Es autor del clásico *Fundamentos de la Geometría* (1899) y del *Fundamentos de la Matemática*, en colaboración con otros autores. En la Conferencia Internacional de Matemáticos que tuvo lugar en París en 1900, la ponencia de Hilbert consistió en un repaso a 23 problemas matemáticos, los que él creía podrían ser las metas de la investigación matemática del siglo que empezaba. Estos problemas, de hecho, han estimulado gran parte de los trabajos matemáticos del siglo XX, y cada vez que aparecen noticias de que otro de los "problemas de Hilbert" ha sido resuelto, la comunidad matemática internacional espera los detalles con impaciencia.

El que nos interesa en esta charla es el número 3, que por cierto fue resuelto ese mismo año por un estudiante suyo de 22 años llamado Max Dehn. El enunciado es:

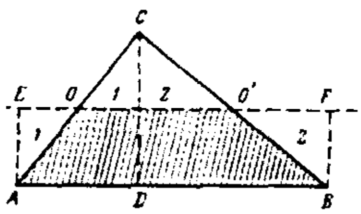
Encontrar dos tetraedros de misma base y misma altura
que no puedan ser descompuestos
en la misma familia finita de tetraedros congruentes.

Aunque desde los griegos se sabe que dos triángulos de igual área se descomponen en triángulos congruentes, Hilbert sospechaba que este resultado era falso al pasar a dimensión tres. Y de ahí su tercer problema. De hecho, encontramos en la correspondencia de Gauss su malestar con que ciertos teoremas de geometría sólida dependiesen del axioma de continuidad. En particular el cálculo del volumen de una pirámide exige un procedimiento infinito a diferencia del cálculo del área de un triángulo.

Empezamos pues esta charla tratando el caso de dimensión dos y después el caso de dimensión tres.

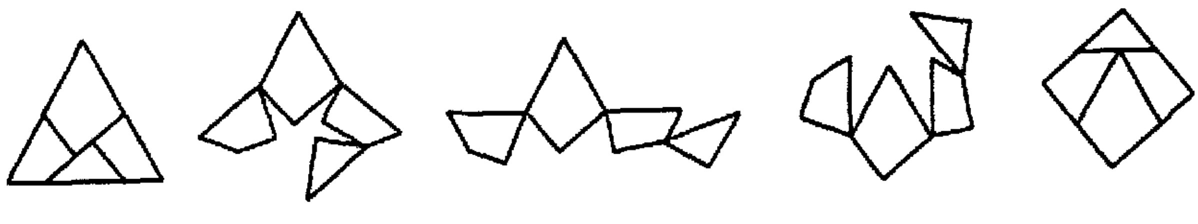
1. Polígonos

Denotaremos por $a(P)$ el área de un polígono. Todos sabemos que si T es un triángulo de base b y de altura h, se tiene $a(T) = b.h$. La manera geométrica ("a la griega") de demostrar este hecho es la siguiente:

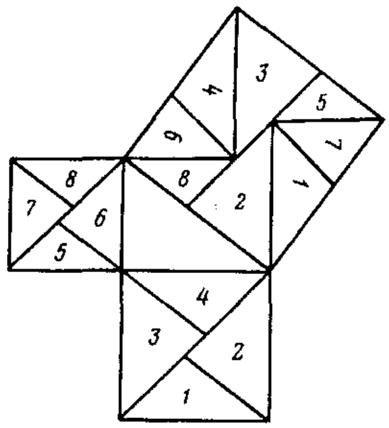


Así pues, dos triángulos de misma base y misma altura tienen el mismo área.

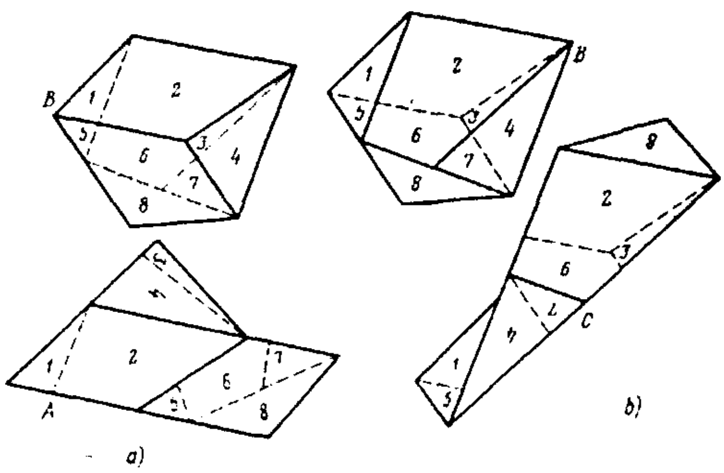
Esto da pie a la definición siguiente: dos polígonos P_1 y P_2 son *equivalentes*, escrito $P_1 \bowtie P_2$, si podemos descomponerlos en la misma familia finita de polígonos.



Obsérvese que esta noción no cambia si sustituimos "misma familia de polígonos" por "misma familia de triángulos". El Teorema de Pitágoras se demuestra con esta herramienta de la manera siguiente:



La relación que acabamos de introducir $\bowtie$ es una relación de equivalencia. En efecto, las propiedades reflexiva y simétrica son inmediatas. Respecto a la propiedad transitiva supongamos que tenemos las dos relaciones $A \bowtie B$ y $B \bowtie C$, lo que nos da dos descomposiciones a) y b). Para demostrar $A \bowtie C$, lo que hacemos es superponer las dos descomposiciones de B (trazo punteado) y trasladar el resultado a A y C.



Es claro que dos polígonos equivalentes tienen la misma área. De hecho, la figura anterior muestra que dos triángulos son equivalentes si y sólo si tienen la misma área. El resultado es más general

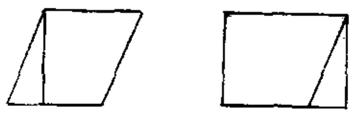
Teorema de Bolyai-Gerwien *Dados dos polígonos P_1 y P_2 se tiene la equivalencia*

$$a(P_1) = a(P_2) \Longleftrightarrow P_1 \bowtie P_2.$$

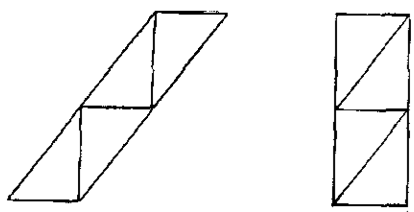
Demostración La suficiencia es directa, ya que dos polígonos congruentes tienen la misma área. Para la necesidad vamos a proceder en varias etapas:

Etapa 1 *Dos paralelogramos de misma base y misma altura son equivalentes*: bastará ver que todo paralelogramo de base b y de altura h es equivalente a un rectángulo de base b y altura h y utilizar luego la transitividad de la relación $\bowtie$.

Si el pie de la altura cae en la base, procedemos como indica la figura

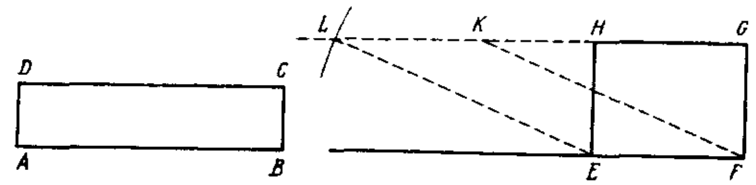


En caso contrario, habrá que cortar horizontalmente el paralelogramo un número suficiente de veces. Esto se puede hacer ya que el cuerpo de los números reales es arquimediano



Etapa 2 *Todo paralelogramo es equivalente a un rectángulo de base dada*: gracias a la Etapa 1, podemos suponer que el paralelogramo en cuestión es un rectángulo

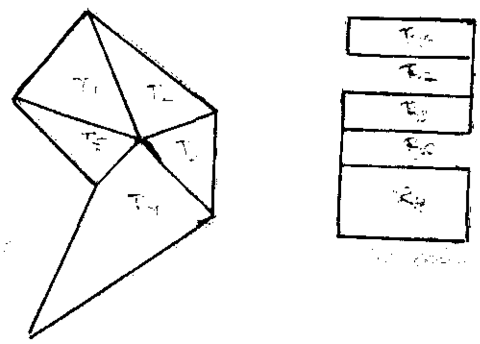
$ABCD$. Sea $EFGH$ un rectángulo de la misma área con EF la base dada. Si la base AB es más pequeña que la base dada EF entonces subdividimos verticalmente el rectángulo $EFGH$ en rectángulos suficientemente pequeños para que cada base sea más pequeña que EF. Entonces estamos en la situación siguiente, donde hemos construido el paralelogramo $EFLK$ cuyos lados EL y FK miden lo mismo que AB



Observemos que $a(ABCD) = a(EFGH) = a(EFLK)$. Además, tenemos $EFLK \bowtie EFGH$ ya que tienen la misma base y la misma altura (ver la Etapa 1). Por otra parte, $EFLK \bowtie ABCD$ por las mismas razones. Por lo tanto, $ABCD \bowtie EFGH$.

Etapa 3 *Todo triángulo es equivalente a un paralelogramo*: ya demostrado.

Etapa 4 *Todo polígono es equivalente a un rectángulo de base dada*: cada polígono P es descomponible en un número finito de triángulos: $P \bowtie T_1 + \ldots + T_n$. Aquí, la suma + indica la unión. Gracias a las Etapas 2 y 3 encontramos una familia de rectángulos de base dada $\{R_i : i = 1, \ldots, n\}$ con $T_i \bowtie R_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$.



El rectángulo buscado es $R = R_1 + \ldots + R_n$.

Etapa Final *Dos polígonos de misma área son equivalentes*: sean dos polígonos P_1 y P_2 con $a(P_1) = a(P_2)$. Fijemos una base b. La Etapa 4 permite escribir $P_1 \bowtie R_1$ y $P_2 \bowtie R_2$ con R_1 y R_2 rectángulos de base dada b. Como

$$a(R_1) = a(P_1) = a(P_2) = a(R_2),$$

se tiene que necesariamente los dos rectángulos poseen la misma base y la misma altura. Por lo tanto $R_1 = R_2$ y finalmente $P_1 \bowtie P_2$. ∎

2. Poliedros

Denotaremos por $v(P)$ el volumen de un poliedro. Todos sabemos que si T es un tetraedro de base B y de altura h, se tiene $v(T) = a(B).h$. Así pues, dos tetraedros de misma base y misma altura tienen el mismo volumen. La manera geométrica de demostrar este hecho exige un proceso infinito (¿sabéis hacerlo sin integrar?), con lo que la situación es distinta entre la dimensión 2 y la dimensión 3, lo que dió pie a Hilbert para proponer su conjetura.

Diremos que dos poliedros P_1 y P_2 son *equivalentes*, escrito $P_1 \bowtie P_2$, si podemos descomponerlos en la misma familia finita de poliedros. Obsérvese que esta noción no cambia si sustituimos "misma familia de poliedros" por "misma familia de tetraedros". Como en el caso de los polígonos, se demuestra que la relación $\bowtie$ es una relación de equivalencia.

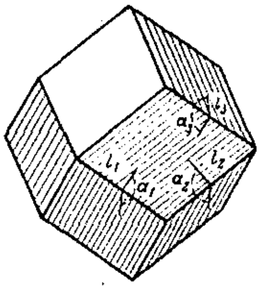
Es claro que dos poliedros equivalentes tienen el mismo volumen. Pero el recíproco es falso como vamos a ver a continuación. Para ello introducimos el *invariante de Dehn*.

Recordatorio El conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales es un espacio vectorial sobre el cuerpo de los números racionales $\mathbb{Q}$. Su dimensión es infinita. En adelante fijamos $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una aplicación $\mathbb{Q}$-lineal (es decir, una aplicación verificando $f(n+m) = f(n) + f(m)$, para todos $n, m \in \mathbb{Z}$), con $f(\pi) = 0$. ¡Hay un número infinito!

Definición El *invariante de Dehn* de un poliedro P es el número

$$f(P) = \sum f(\alpha_i).l_i,$$

donde la suma se hace sobre las aristas del poliedro, l_i denota la longitud de la arista y α_i el ángulo diedral.



Observemos que la condición $f(\pi) = 0$ hace que las aristas virtuales no aporten nada a este invariante.

Veamos algunos ejemplos.

<u>Cubo</u>: cada ángulo diedral del cubo $\mathbf{C}$ es $\frac{\pi}{2}$. Puesto que f es $\mathbb{Q}$-lineal se tendrá $0 = f(\pi) = 2f(\frac{\pi}{2})$, con lo que $f(\frac{\pi}{2}) = 0$. Así pues $f(\mathbf{C}) = 0$.

<u>Prisma</u>: el invariante de Dehn del prisma P contiene dos partes, la que proviene de las aristas verticales y la que proviene de las horizontales: $f(P) = d_1 + d_2$. Todas las aristas verticales tienen la misma longitud l. El aporte de estas aristas es pues

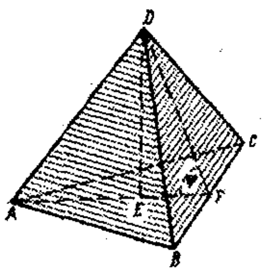
$$d_1 = l.f(\alpha_1 + \ldots + \alpha_n),$$

donde los α_i son los ángulos diedrales correspondientes. Ahora bien, esta suma es π con lo que $d_1 = 0$. Las otras aristas vienen emparejadas: cada arista de la base tiene una correspondiente en la tapa de la misma longitud. Así,

$$d_2 = l_1.f(\alpha_{n+1,\text{base}} + \ldots + \alpha_{n+1,\text{tapa}}) + \ldots + l_q.f(\alpha_{q,\text{base}} + \ldots + \alpha_{q,\text{tapa}}).$$

Ahora bien, como $\alpha_{j,\text{base}} + \alpha_{j,\text{tapa}} = \pi$, tendremos $d_2 = 0$ y por lo tanto $f(P) = 0$.

Tetraedro regular: por simetría, se tiene que el invariante de Dehn del tetraedro regular T es $f(T) = 6f(\varphi)$, donde φ es el ángulo agudo de coseno $\frac{1}{3}$.



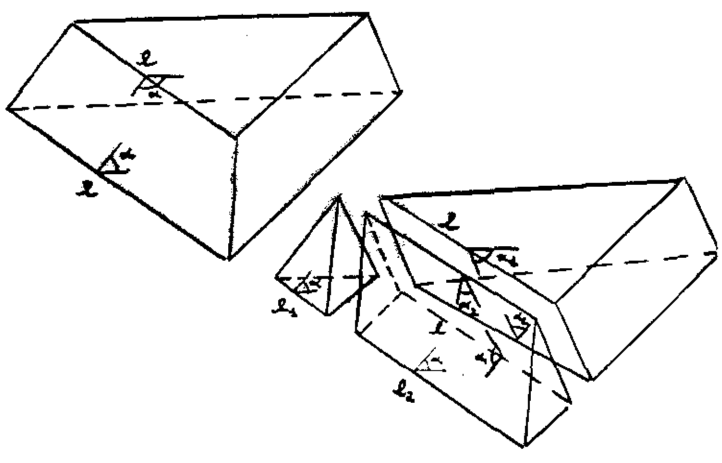
Suma de poliedros: si P es la unión de varios poliedros $P_1, \ldots, P_n$, entonces se tiene $f(P) = f(P_1) + \ldots + f(P_n)$.

El resultado clave para resolver el problema de Hilbert es el siguiente.

Proposición *Dados dos poliedros P_1 y P_2 se tiene la relación*

$$P_1 \bowtie P_2 \Longrightarrow f(P_1) = f(P_2).$$

Demostración Podemos obtener P_2 a partir de P_1 mediante una serie de descomposiciones que consisten en "dar un corte", es decir, añadir dos caras y las correspondientes aristas. Los tres casos posibles de aristas están representados debajo



Para demostrar el resultado vamos a ver que $f(P)$ es invariante por estos cortes:

Corte en la arista: la arista de origen l queda subdividida en dos aristas l_1 y l_2. El ángulo diedral α es el mismo. El invariante de Dehn se preserva:

$$l.f(\alpha) = l_1.f(\alpha) + l_2.f(\alpha).$$

Corte en el ángulo: la arista es la misma antes y después de la descomposición, mientras que el ángulo α queda dividido en dos ángulos α_1 y α_2. El invariante de Dehn se preserva:

$$l.f(\alpha) = l.f(\alpha_1) + l.f(\alpha_2).$$

Nueva arista: de hecho hay dos nuevas aristas con ángulos suplementarios. El invariante de Dehn se preserva:

$$0 = l.f(\pi) = l.f(\alpha_1) + l.f(\alpha_2).$$

Esto termina la demostración. ∎

Gracias a este resultado obtenemos el Teorema sorprendente siguiente.

Teorema *El tetraedro regular y el cubo del mismo volumen no son equivalentes.*

Demostración Vamos a encontrar $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de modo que los invariantes de Dehn asociados $f(\mathbf{C})$ y $f(\mathbf{T})$ sean distintos. Esto implicará que el cubo $\mathbf{C}$ y el tetraedro regular $\mathbf{T}$ no son equivalentes.

Sabemos que $f(\mathbf{C}) = 0$ y $f(\mathbf{T}) = 6l.f(\varphi)$, donde el ángulo φ verifica la condición $\cos(\varphi) = \frac{1}{3}$. Para demostrar el Teorema bastará encontrar

una aplicación $\mathbb{Q}$-lineal $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, con $f(\pi) = 0$ y $f(\varphi) \neq 0$,

lo que es equivalente a mostrar que

φ y π son $\mathbb{Q}$-linealmente independientes,

o bien que

no existen dos enteros n y m, con $\quad n\pi + m\varphi = 0.$

Para ello basta demostrar que

$\cos(m\varphi)$ *es distinto de 1 y de -1.*

Llegamos a esto demostrando por inducción sobre m que

$$\cos(m\varphi) = \frac{a_m}{3^m}\text{, } \textit{donde el entero } a_m \textit{ no es divisible por 3.}$$

Para $m = 1$ tenemos directamente $cos(\varphi) = \frac{1}{3}$. Supongamos el resultado cierto para m. Por trigonometría elemental, podemos escribir:

$$\cos((m+1)\varphi) = \frac{2}{3}\cos(m\varphi) - \cos((m-1)\varphi) =$$

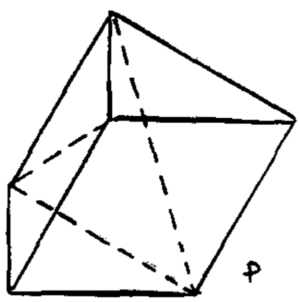
$$= \frac{2a_m}{3^{m+1}} - \frac{a_{m-1}}{3^{m-1}} = \frac{2a_m - 9a_{m-1}}{3^{m+1}}$$

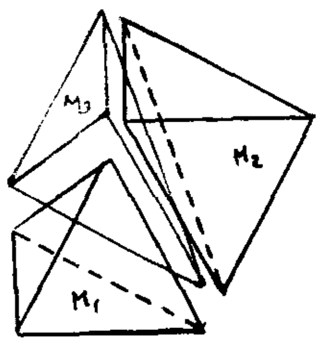
y $2a_m - 9a_{m-1}$ no es divisible por 3 ya que $2a_m$ no lo es. ∎

Estamos en condiciones de responder a la pregunta de Hilbert.

Problema de Hilbert *Encontrar dos tetraedros de misma base y misma altura que no puedan ser descompuestos en la misma familia finita de tetraedros congruentes.*

Demostración A partir del tetraedro regular M_1 construimos un prisma P de misma base y misma altura.





Este prisma se descompone en tres tetraedros: M_1, M_2 y M_3 que tienen la misma base y la misma altura. Sabemos que tenemos

$$0 = f(P) = f(M_1) + f(M_2) + f(M_3),$$

con $f(M_1) \neq 0$.

Forzosamente los tres invariantes de Dehn no pueden ser iguales. Así pues, hemos encontrado dos tetraedros de igual base y altura con invariantes de Dehn distintos y, por consiguiente, no equivalentes. ∎

Bibliografía

V.G. Boltianski, *Figuras equivalentes y equicompuestas*, Lecciones populares de Matemáticas, Editorial Mir, 1981.