Curvas y superficies: evolución del concepto de curvatura

por

Luis Español González, Universidad de La Rioja

Se trata de una historia de la curvatura hasta Gauss, que se fija en el proceso de elaboración de un concepto matemático abstracto a partir de ideas originadas en la percepción sensible y con un estímulo en problemas de aplicación. A su vez, cuando un concepto ya surgido entra en contacto con nuevos modos de formular la matemática, evoluciona también la manera de presentarlo para su conocimiento y difusión generales.

1. Introducción

Se dice con frecuencia que la curvatura es el concepto central de la geometría diferencial. En el estudio de las variedades hay aspectos algebraicos, analíticos o topológicos, pero parece como si un problema no fuera típicamente geométrico hasta que no interviene la curvatura. También se reconoce que la curvatura juega un papel importante en física.

La idea de curvatura pertenece al mundo sensible, está asociada a las sensaciones que acompañan a un movimiento y es anterior al concepto matemático que se ha elaborado a partir de esa idea previa sensible. Un ciego recibiría información sobre la curvatura de un alambre pasando los dedos sobre él. Hay relaciones de curvatura que se perciben con facilidad en las curvas planas. Se identifica la recta con la curvatura nula y la circunfrencia con la curvatura constante no nula, tanto más grande cuanto menor es el radio. Una espiral tiene curvatura creciente hacia el interior. En una parábola hay un punto de curvatura máxima, en una hipérbola dos con la misma curvatura máxima y en una elipse hay dos puntos opuestos con curvatura mínima igual y otros dos con máxima. Las relaciones de igual curvatura en diversos puntos que se detectan sensiblemente obedecen a razones de simetría, son igualdades debidas a la forma percibida, con más facilidad por la vista que por el tacto, pero desde luego distan de ser igualdades numéricas. Medir la curvatura de una curva, es decir, asignar un número como valor de la curvatura de una curva en un punto, es un asunto mucho más profundo que requiere conceptos y cálculos, es un asunto matemático. Mirando o tocando un solo punto (fragmento ínfimo) de la curva no se percibe la curvatura, que sólo surge de una sensación extensiva. Partiendo de la percepción de la curvatura en un fragmento de curva y notando que es una percepción variable, el proceso matemático consiste en transformar esta sensación extensiva en una magnitud intensiva definida en cada punto de la curva. Este proceso de abstracción es similar al que pasa de la velocidad o la aceleración como sensaciones a su determinación como magnitudes definidas en cada instante.

El proceso que va desde lo sensible hacia lo abstracto matemático es histórico y enlaza con la subsiguiente evolución de la propia abstracción matemática en términos de reformulaciones en nuevos contextos teóricos, generalizaciones, etc. El contexto teórico en el que se pudieron expresar las magnitudes variables está formado por la geometría analítica y el análisis infinitesimal, por lo que el concepto de curvatura tiene su historia dentro de este contexto y sus propias evoluciones posteriores, lo que no impide que existan unos balbuceos previos en la matemática griega y sus continuadores.

En la construcción del concepto de curvatura es previa la determinación de la recta tangente a una curva en un punto, estando la curvatura vinculada a la variación de la tangente a lo largo de la curva. Por eso la prehistoria de la curvatura comienza con el estudio de la variación de la tangente en las curvas planas y, por una correlación automática en esta dimensión, también de la variación de la normal. Tangentes y normales están claras en el texto de Euclides, que no estudia más curvas que rectas y circunferencias, pero ya le dieron trabajo notable a Apolonio cuando quiso averiguar las propiedades de estas rectas que describen la forma de las cónicas, que es tanto como decir su curvatura. Más preciso pudo ser Descartes en las curvas algebraicas gracias a las raíces dobles de las ecuaciones, cuando en cada punto de la curva consideró una circunferencia de contacto doble (del mismo modo que la tangente era una secante con contacto doble) que determinaba la normal de la curva en el punto. Tan sólo en la fase transitoria hacia la modernidad pudo Huygens conceptualizar en parte la curvatura de las curvas planas, pero pasar de formas geométricas extensivas a magnitudes numéricas intensivas en todo tipo de ecuaciones sólo pudo hacerse cuando el análisis infinitesimal entró en acción, como se ve desde el libro de L'Hôpital en el caso plano.

La sensación de curvatura se hace menos accesible en las curvas alabeadas y en las superficies. Se percibe cierta constancia en la forma como se enrosca una hélice sobre un cilindro, pero no es la misma que la constancia de la curvatura en la circunferencia base de la hélice. Hay una sensación de constancia en la curvatura de una esfera, inversamente proporcional al radio, pero la sensación de curvatura en un cilindro depende claramente de la dirección en que se aprecie, y es más complicado precisar esta sensación en cuádricas menos simples. Deslizando un dedo sobre una superficie la curvatura depende del trayecto seguido por el contacto y no tenemos sensibilidad en la palma de la mano para recibir con claridad una sensación de curvatura bidimensional. Por eso el paso de la curvatura de las curvas planas a la curvatura de las curvas alabeadas y de las superficies es un proceso mixto de abstracción de difusas sensaciones directas y de generalización de conceptos ya acuñados en el caso plano.

Euler dio forma matemática a la curvatura de las superficies según direcciones, Monge y su escuela alcanzaron el concepto de curvatura de una curva alabeada concretando la vaga idea intermedia de "doble curvatura" debida a Clairaut; finalmente Gauss logró conceptualizar la curvatura de una superficie y presentarla como una magnitud intrínseca. Podemos decir que en el periodo Monge-Gauss se termina el proceso histórico de elevación hasta el concepto matemático de curvatura desde la idea de curvatura proporcionada por las sensaciones; a partir de entonces se avanza en la reformulación del concepto en nuevos contextos teóricos y en el terreno de las generalizaciones.

2. En busca de las normales

Los primeros esfuerzos encaminados a trazar las normales a las curvas, y por tanto también las tangentes, son un paso previo a la determinación de la curvatura. El problema del trazado de tangentes y normales es obvio en la recta y en la circunferencia, pero se complica en las cónicas. A la vista de las obras antiguas disponibles, corresponde a Apolonio el mérito de la resolución de dicho problema. Pappus objetó que el procedimiento del genio de Perga utilizaba una hipérbola auxiliar de difícil trazado, recurso que siglos después fue suprimido por Huygens. Antes de la aparición de los infinitesimales, Descartes logró la obtención de normales por métodos algebraicos aplicables a las cónicas y a curvas algebraicas más generales.

La información que ha llegado hasta nuestro días del mundo griego es más rica en documentos de la ciencia matemática teórica que en otros que den fe de los problemas aplicados que pudieran motivar los anteriores, sin olvidar el puro reto intelectual que éstos suponen; pero respecto a los autores citados del siglo XVII ya tenemos buena noticia de sus preocupaciones aplicadas. Huygens era un relojero para el que las normales jugaban un papel decisivo en el diseño de relojes de péndulo. Descartes usaba las normales en las leyes de su *Dióptrica*, obra relativa al comportamiento de la luz a través de cristales curvos.

2.1 Apolonio y Huygens

Apolonio planteó la cuestión de trazar las normales a una cónica desde un punto como un problema de mínimos, resuelto en el Libro V de su obra *Cónicas* [A]. El método sintético de la época, fuertemente basado en figuras, le obligaba a resolver sucesivamente casos de creciente dificultad, ya fuera por la curva o por la posición del punto dado respecto a ella. La curva más sencilla era la parábola y el caso más simple se presentaba cuando el punto desde el que se quería trazar la normal estaba en el eje de la curva. Este caso es la proposición V.8 de las *Cónicas* de Apolonio, es decir, la octava del quinto libro de los ocho que forman la obra, parcialmente conocida a través de versiones árabes. Luego, en V.51, trata el caso de la parábola con el punto dado dentro de la curva y debajo del eje, en V.58 el punto está fuera de la parábola y no pertenece a su eje; finalmente, en V.62, el punto está dentro y encima del eje. Esta casuística se completa con los diversos casos dedicados a la elipse y a la hipérbola.

Veamos como ejemplo V.8. El enunciado explica la forma de trazar la normal PG a la parábola desde un punto G de su eje en el interior de la curva. Se reproduce a continuación en forma casi literal, pero utilizando simbología moderna. La demostración sigue con notación algebraica las ideas expuestas geométricamente por el griego.

Apolonio, Cónicas V.8.- *Sea A el vértice de la parábola $y^2 = \ell x$. Si G es un punto sobre el eje con $AG > \frac{\ell}{2}$ y si N es un punto entre A y G con $NG = \frac{\ell}{2}$ y si NP es perpendicular al eje y corta a la parábola en P, entonces PG es la mínima distancia* *desde G a la parábola.*

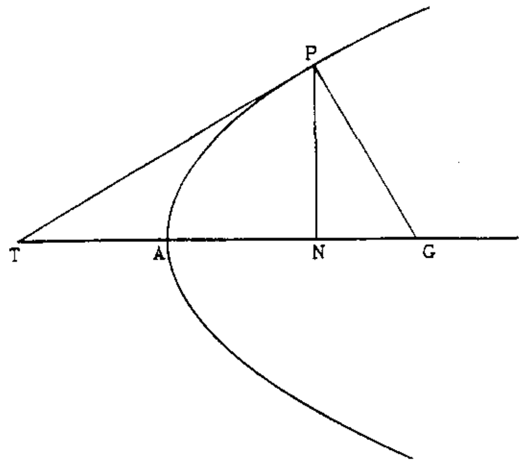

Fig. 1

Según la Fig. 1 (basada en la Fig. V.8 de [A]) la ecuación dada para representar la parábola se obtiene tomando $x = AN$, $y = PN$, y el parámetro ℓ, llamado *lado recto*, es la cuerda de la parábola que es perpendicular al eje y lo corta en L a distancia $\frac{\ell}{4}$ del vértice A. Teniendo en cuenta la ecuación de la parábola, el teorema de Pitágoras aplicado al triángulo PNL permite obtener $PL = GL$ (y como consecuencia que PG es la bisectriz del ángulo formado por PL y la paralela al eje por P en el interior de la parábola). Si tomamos sobre la parábola un punto Q, cuyas coordenadas sean (a, b), próximo a P, por ejemplo a su izquierda, se obtiene

$$(QG)^2 = b^2 + (x + \frac{\ell}{2} - a)^2 = (PG)^2 + (x - a)^2,$$

de modo que $QG > PG$. Se obtiene la desigualdad opuesta si Q se toma al otro lado de P. De este modo queda probado que el segmento PG es mínimo.

En *Cónicas* V.51 (caso en que el punto dado está debajo del eje) Apolonio utiliza la hipérbola auxiliar que se observa en la Fig. 2. (Fig. V.51 de [A]) cuyas asíntotas son el eje de la parábola y la recta perpendicular TH.

El comentarista Pappus criticó el uso de esta sección cónica auxiliar, pues mal podrían trazarse las normales a la parábola si no se sabía dibujar dicha hipérbola. El problema que Pappus dejaba planteado era por tanto encontrar un método alternativo que permitiera el trazado efectivo de las normales sin utilizar un recurso intermedio de difícil ejecución; podría usarse una circunferencia en vez de una hipérbola, pues el trazado de esta curva elemental es posible. Según el historiador Toomer, traductor de Apolonio del árabe al inglés, Huygens conoció este reto de Pappus en un texto de principios del siglo XVII, sin conocer la obra de Apolonio, y resolvió el problema hacia mediados del siglo mediante una construcción que se muestra en la Fig. 3 (que es la Fig. 5.62** del comentario de Toomer en [A]).

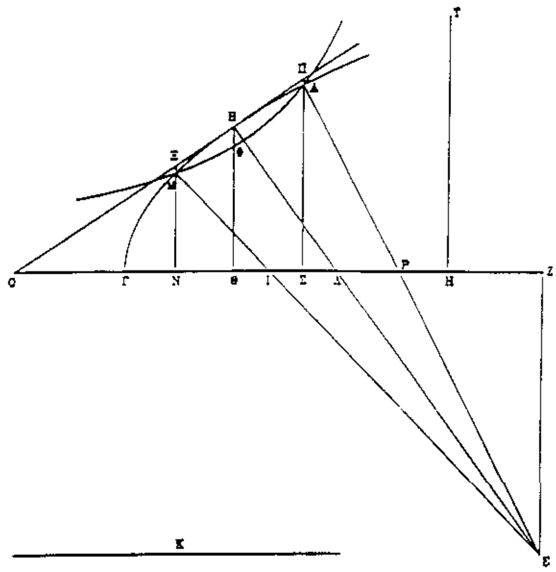

Fig. 2

Huygens, Obras I.365.- *Dadas una parábola y un punto, dibujar desde éste una línea recta que corte a la parábola en ángulos rectos. Sea BA la parábola dada y el punto C que no esté sobre el eje, pues en este caso la construcción es bien conocida. Desde C se dibuja la perpendicular CF al eje de la parábola, BG, y desde el vértice B se toma BH igual a la mitad del latus rectum, y sea HF bisecado en K, y sea KL perpendicular al eje BK e igual a $\frac{1}{2}CF$. Entonces, con centro L, describir la circunferencia que pasa por el vértice B de la parábola: que cortará a la parábola. Sea A el punto de corte, y únase CA. Afirmo que ésta [línea CA] corta a la parábola en ángulos rectos.*

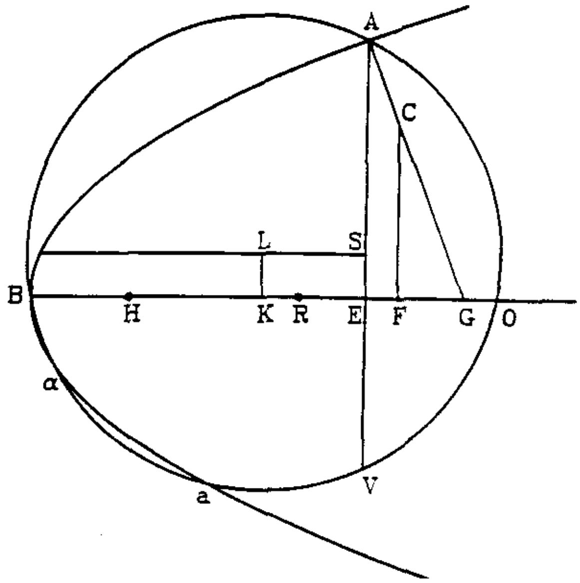

Fig. 3

2.2 Descartes

El filósofo Descartes [D] creó en 1637 un método para conducir la razón al conocimiento y lo aplicó a la resolución de problemas que tenía planteada la filosofía natural de su tiempo. Uno de estos problemas era el estudio del comportamiento de un rayo de luz al incidir en un espejo o lente. En este problema óptico es muy importante considerar las normales a la superficie del cristal, pues a ella se refieren las relaciones entre el rayo incidente y el rayo reflejado o refractado. Para estudiar estas relaciones y también para resolver otros problemas geométricos generales, Descartes ideó un nuevo método matemático consistente en aplicar el álgebra a la geometría, lo que luego se llamó geometría analítica.

Descartes abordó el problema óptico antes mencionado considerando que la sección plana del cristal era simétrica y se representaba mediante una ecuación de la forma $y^2 = f(x)$, tomando el eje de simetría como eje de abscisas y suponiendo que el segundo miembro es un polinomio (en realidad usaba elipses e hipérbolas). La cuestión era entonces encontrar la normal a la curva en uno de sus puntos P, para lo que propuso encontrar en el eje de simetría el punto A tal que AP fuera la normal. La solución cartesiana (según la interpretación algo libre de [RPB] en una de sus "notas complementarias") es como sigue: Con centro en A y radio AP se obtiene una circunferencia que en general cortará a la curva en otro punto, según las soluciones de un sistema de dos ecuaciones algebraicas. La normal se obtiene entonces calculando la posición de A para que haya dos puntos de corte confundidos en P, es decir, para que la solución del sistema correspondiente al punto P sea doble. Si p es la abscisa de P y r es el radio de la circunferencia, se obtiene el valor buscado de la abscisa a de A a partir de la ecuación

$$(x-a)^2 + f(x) - r^2 = (x-p)^2(A_0 + A_1x + A_2x^2 + \ldots),$$

en la que los coeficientes indeterminados A_n también se van calculando. Por ejemplo: la normal a $y^2 = \ell x$ (que no necesita los A_n) en $x = 1$ se traza desde $a = \frac{\ell+2}{2}$, y la normal a $y^2 = x^3$ en $x = \ell^2$ desde $a = \ell\sqrt{1+2\ell^2}$.

3. Curvatura con infinitesimales

Ya se ha dicho que el momento de expresar la curvatura había de llegar cuando los matemáticos comenzaran a manejar los infinitesimales. Esto se hizo en dos etapas a lo largo de la segunda mitad del siglo XVII, una primera con los métodos de precálculo y la segunda una vez que Newton y Leibniz sentaron las bases del cálculo infinitesimal. En este contexto aparece de nuevo Huygens, usando los infinitesimales de una manera geométrica, con un estilo muy similar al de Newton, y más tarde L'Hôpital, que ya utiliza la formulación del cálculo introducida por Leibniz.

3.1 Huygens

Al relojero Huygens le interesaban los péndulos y por ello dedicó tiempo a los problemas sobre las curvas planas y sus evolutas. Para medir bien el tiempo el péndulo debe seguir una trayectoria isocrona, que no es la circular, sino que se eleva sobre ella en los extremos. Si se quiere que la masa del péndulo recorra una curva, el hilo debe enrollarse sobre su evoluta. Huygens quedó fascinado al descubrir que la trayectoria isocrona es la cicloide y que su evoluta es otra cicloide con la concavidad invertida. Con estas motivaciones llegó a obtener en 1673 el centro de curvatura de una curva en un punto como el punto de intersección de la normal en el punto con otra normal "muy próxima". Según una "nota complementaria"[RPB], el procedimiento es como sigue:

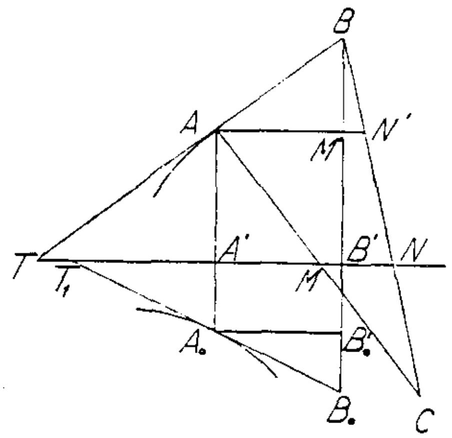

Fig. 4

En la Fig. 4 (Fig. 33 de [RPB]) C es el centro de curvatura de la curva en A, obtenido como intersección de la normal AC con la normal BC a la curva en un punto B "muy próximo", de modo que el arco de curva AB se considera como si fuera un segmento. Razonando por semejanza de triángulos y recurriendo a una curva auxiliar A_0B_0 cuyas ordenadas son las abscisas subnormales de la curva dada, Huygens llega a calcular el radio de curvatura (la distancia AC) a partir de la fórmula

$$\frac{AM}{AC} = 1 - \frac{TB'}{TN}(1 + \frac{B_0B'}{T_1B'}).$$

Traducida a terminología más moderna y una vez efectuadas ciertas identificaciones de puntos "muy próximos", dicha fórmula queda de la forma

$$\frac{m}{r} = 1 - \frac{t}{t+n}(1 + \frac{n}{t_n}),$$

donde, referidos siempre al punto A, las medidas de segmentos que aparecen en la fórmula son las siguientes: $r = AC$ el radio de curvatura, $m = AM$ el segmento normal, $t = TB' = TA'$ el segmento tangente, $n = A'M = B'N = A'A_0 = B'B_0$ el segmento subnormal y $t_n = T_1B' = T_1A'$ el segmento subtangente de la curva subnormal. Si suponemos una curva $y = f(x)$, es un sencillo ejercicio de cálculo probar que la fórmula anterior da efectivamente

$$\frac{1}{r} = \frac{f''}{(1 + (f')^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Esta fórmula fue obtenida también por Newton mediante sus métodos de cálculo infinitesimal.

3.2 L'Hôpital

Como buen marqués, las inquietudes de L'Hôpital no eran eminentemente prácticas, sino más próximas al ideal griego de la persona ociosa dedicada al conocimiento. En unos tiempos en los que el mercantilismo estaba en pleno desarrollo, no le importó recurrir a un sabio a sueldo, Juan Bernoulli, para producir la obra que le ha hecho célebre, el primer libro de texto de cálculo infinitesimal. El título del libro [H], publicado en 1696, tiene una primera parte muy conocida, que dice *Análisis de los infinitamente pequeños*, a la que sigue otra que no suele mencionarse y afirma el propósisto de ese análisis, que es *para la inteligencia de las líneas curvas*. De modo que el propósito del álgebra o análisis infinitesimal de L'Hôpital era, como en el caso del álgebra de Descartes, disponer de un método para estudiar las curvas. Pero, como el marqués indica en el prefacio, el método infinitesimal sirve para todo tipo de curvas, no sólo para las algebraicas. En dicho texto preliminar, el autor menciona especialmente a Descartes y a Huygens, con los problemas de cáusticas por reflexión o refracción y de evolutas y evolventes, que son los asuntos prácticos que motivaron a dichos autores anteriores.

De hecho, L'Hôpital introduce el cálculo infinitesimal en las diez páginas de la primera sección del libro, pasando a continuación a estudiar los problemas de curvas que se resuelven con este método. En la sección séptima se ocupa de las evolutas. Dada una curva, construye su evoluta calculando la distancia entre ambas medida a lo largo de la normal a la curva, que resulta tangente a la evoluta; de este modo lo que calcula es el radio de curvatura de la curva dada, que es descrita como evolvente de la evoluta por el método del hilo que se desenrolla. El planteamiento es similar al de Huygens, pero utilizando el formalismo de las diferenciales, llamadas "diferencias" en el texto original. El enunciado de L'Hôpital, que se complementa con la Fig. 5, es el siguiente:

L'Hôpital, Analyse 77.- *Dada la naturaleza de la linea curva AMD con una de sus perpendiculares cualquiera MC; determinar la longitud del radio MC de su evoluta: es decir, la intersección de las perpendiculares infinitamente próximas MC, mC.*

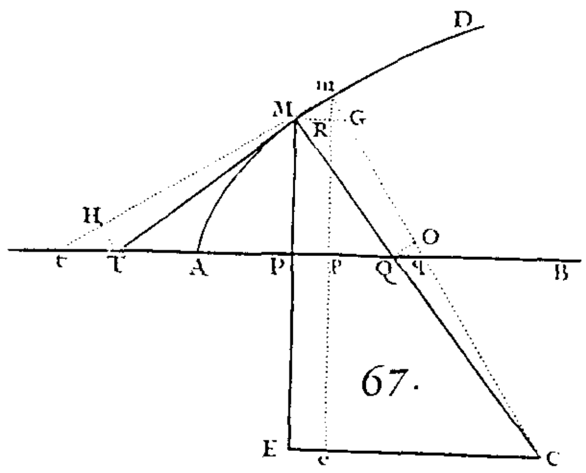

Fig. 5

Dicho enunciado se plantea como "problema general" en la Proposición VII.I, titulada "Uso del cálculo de las diferencias para encontrar las evolutas", a la que sigue un corolario en el que se da la fórmula literal siguiente:

$$MC = \frac{\overline{dx^2 + dy^2}\sqrt{dx^2 + dy^2}}{-dxddy}.$$

4. Curvatura analítica y geométrica

El genio de Euler llena el universo matemático de la mitad central del siglo XVIII, periodo que fue cerrado por la pléyade de matemáticos franceses que vivieron la Revolución, entre los que destaca Monge en el ámbito geométrico que nos ocupa. Fruto de las ideas de la Revolución Francesa fue la creación de la Escuela Politécnica, de la que Monge fue fundador y profesor. Por eso tuvo un buen número de discípulos en aquel ambiente selecto de ingenieros militares, muy bien formados en matemáticas y en estrecho contacto con los problemas prácticos. Ellos llevaron más lejos el desarrollo de las ideas de su maestro y prepararon el terreno sobre el que Gauss realizó su contribución definitiva.

Los trabajos de Euler sobre la curvatura de curvas planas continuan en la línea del texto de L'Hôpital, mejorando notablemente en claridad, destreza y elegancia el uso del cálculo infinitesimal. Pero su innovación principal es la aplicación del concepto a las superficies, definiendo su curvatura en un punto según las distintas direcciones tangentes. En su trabajo sobre la curvatura Euler sacó el mejor fruto analítico posible de la idea existente de curvatura plana, sin introducir ideas geométricas nuevas. Es un gran ejemplo de reformulación de un concepto plano con aplicación posterior al espacio, una extensión que actúa en el mundo propio del análisis matemático, sin relación relevante con el conocimiento exterior, contacto con la realidad más concreta que sí existía en otros campos de la matemática que Euler cultivó. Por el contrario, la obra matemática de Monge, menos amplia y variada que la su antecesor suizo, se muestra plena de relaciones entre análisis y geometría, y también llena de desarrollos que surgen directamente de problemas diversos de la práctica del ingeniero, así los relacionados con la construcción, fortificaciones, transporte de tierras, talla de piedras, etc. Con Monge reencontramos el estilo de Huygens, dejado de lado en lo que al tema que nos ocupa se refiere, al tratar de L'Hôpital y Euler, más centrados en las cuestiones meramente analíticas.

Como Euler, Monge fue un analista que manejó con habilidad los métodos infinitesimales de su época (infinitésimos de orden superior que se desprecian, etc.) y se ocupó especialmente de las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, que aplicó al estudio de las superficies y a otros temas físicos. Pero Monge era también un geómetra en el sentido visual del término, de modo que para él las superficies eran engendradas por el movimiento de rectas o curvas sometidas a ciertas condiciones de ligadura, o como envolventes de superficies en movimiento, y de la expresión analítica de estos modos de generación surgían las ecuaciones de las superficies, ya fueran ecuaciones "finitas", de "diferencias parciales primeras" o de "diferencias parciales segundas", es decir, las ecuaciones del lugar geométrico o ecuaciones en derivadas parciales de primer o segundo orden respectivamente.

4.1 Euler y las curvas planas

A las manos de Euler llegó una noción ya elaborada de curvatura de una curva plana en un punto y la fórmula que permitía calcularla, pero un espíritu genial como el suyo no dejó de poner nuevas luces sobre el concepto y su cálculo. Su primera aportación, en 1736, fue tomar la longitud de arco como parámetro para expresar la curva en forma intrínseca, encontrando que el radio de curvatura es la función de dicho parámetro dada por la variación de la tangente, según la fórmula

$$\frac{1}{r} = \frac{d\phi}{ds},$$

en la que ϕ es el ángulo que forma la tangente con el eje y s es el parámetro arco.

En 1748 Euler publicó un libro de texto [E] titulado *Introducción al análisis del infinito*, cuyo primer volumen está dedicado al análisis y el segundo a las curvas, con un apéndice sobre superficies. El Capítulo XIV de este segundo volumen, titulado "Sobre la curvatura de una curva", se dedica a definir y calcular la curvatura de una curva plana. Su método es singular y parte de la idea de curvas osculadoras utilizada por Descartes para los polinomios, pero que Euler extiende a todas las funciones mediante su desarrollo en serie de potencias. Tomando como partida la tangente en un punto, Euler considera "una curva más sencilla que está mucho más próxima a la curva dada, en el sentido de que no es sólo tangente sino que la besa" y afirma que las curvas osculadoras tienen la misma curvatura en el punto de contacto, lo que aparece como una definición intuitiva de curvatura, pero ya una intuición matemática. Si la osculadora es tan sencilla que su curvatura es calculable, entonces se obtiene la curvatura de la curva dada en el punto de contacto.

En nuestros días tomamos como osculatriz una circunferencia, la curva de curvatura más simple y evidente, pero su obtención es más compleja que la de la osculatriz que eligió Euler: la parábola dada por el desarrollo en serie de potencias hasta el grado dos de la función que define la curva. Para calcular la parábola osculadora Euler toma como origen el punto en cuestión, como eje de ordenadas la tangente y de abscisas la normal a la curva en el punto, de modo que la parábola queda, usando la notación de Euler, en la forma $s^2 = br$, donde r es la abscisa y s la ordenada. Luego obtiene que el radio de curvatura de esa parábola en el vértice es $\frac{1}{2}b$. Para hacer este cálculo sigue un método sencillo e ingenioso. Toma una circunferencia de radio a y calcula la parábola osculadora por el método general antes descrito del desarrollo en serie de potencias, parábola que resulta ser $s^2 = 2ar$, y el radio de curvatura de esta parábola es a porque coincide con el de la circunferencia al ser ambas curvas osculadoras.

Vamos a ver con algún detalle la parábola osculadora al círculo, caso especialmente simple pero que servirá para ilustrar el caso general. Tomemos, como Euler y con su misma notación, la circunferencia de ecuación $y^2 = 2ax - x^2$ y calculemos la parábola osculadora en un punto M arbitrario, de coordenadas (p, q), siempre con la notación de Euler (ver Fig. 6, que es la Fig. 55 de [E]). En un punto (t, u) de la circunferencia próximo a M, la ecuación de la circunferencia es de la forma $0 = 2(a-p)t - 2qu - t^2 - u^2$, lo que no es sino (salvo proporcionalidad) el desarrollo en serie de potencias en el punto M, hasta el grado dos, de la ecuación de la circunferencia. Los términos lineales dan la ecuación de la tangente en M y la ecuación completa es la de una cónica que pasa por M. Tanto la ecuación de la tangente como la de la cónica osculadora están referidas a los ejes paralelos a los coordenados pasando por M.

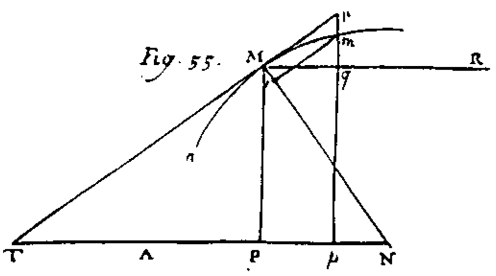

Fig. 6

Euler introduce un cambio de coordenadas, tomando unas nuevas (r, s) sobre la normal y la tangente en M respectivamente. Las fórmulas del cambio de coordenadas son

$$t = \frac{1}{a}[(a-p)r + qs], \quad u = \frac{1}{a}[-qr + (a-p)s],$$

y dejan el desarrollo en serie de la forma $s^2 + r^2 - 2ar = 0$. Ahora interviene de nuevo la aguda visión matemática de Euler. Escribiendo las ecuaciones inversas del cambio, que son

$$r = \frac{1}{a}[(a-p)t - qu], \quad s = \frac{1}{a}[qt + (a-p)u],$$

observa que la segunda es en efecto una función de primer grado de t y de u, mientras que la primera sólo es lineal en apariencia, pues la ecuación de la cónica la deja ver como una función de segundo grado $r = \frac{1}{2a}(t^2 + u^2)$; luego "$r$ es infinitamente menor que s y r^2 puede despreciarse frente a s^2". De este modo resulta la ecuación de la parábola osculadora $s^2 = 2ar$, que no depende del punto de la circunferencia considerado.

En general, Euler toma una curva y obtiene en uno de sus puntos, por el método que hemos aplicado a la circunferencia, un desarrollo en serie

$$0 = At + Bu + Ct^2 + Dtu + Eu^2 + Ft^3 + Gt^2u + \dots,$$

que reduce a una cónica anulando el desarrollo desde el término de coeficiente F en adelante. Aplicando el cambio de coordenadas anterior y despreciando los términos "infinitamente menores" obtiene una parábola osculadora cuyo radio de curvatura es

$$\frac{(A^2+B^2)\sqrt{A^2+B^2}}{2(A^2E-ABD+B^2C)},$$

que resulta ser el radio de curvatura de la curva dada en el punto considerado. Se observa sin dificultad que lo dicho antes para la circunferencia es un caso particular de este método.

Ahora los estudiantes obtienen la curvatura de una curva $f(x,y) = 0$ cuyo desarrollo en serie de potencias es

$$0 = f_x dx + f_y dy + \frac{1}{2}(f_{xx}dx^2 + 2f_{xy}dxdy + f_{yy}dy^2) + \dots,$$

mediante la fórmula

$$\kappa = \frac{f_x^2 f_{yy} - 2f_x f_y f_{xy} + f_y^2 f_{xx}}{(f_x^2+f_y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

lo que se identifica de inmediato con el método de Euler. Si la ecuación de la curva se da en forma explícita, $y - f(x) = 0$, sale la ecuación de la curvatura según L'Hôpital.

La conclusión es que Euler alcanzó un dominio muy refinado del análisis que le permitió dar una expresión matemática más elaborada de la idea de curvatura de una curva plana. En este fragmento de su obra no hay una idea nueva surgida de un problema de aplicación, sino un avance técnico propiciado por un mejor conocimiento y manejo del método analítico. No tuvo el mismo éxito con la curvas alabeadas, pues para el estudio de las curvas no planas faltaban todavía las claves que dieran un sentido preciso a la idea escurridiza de su curvatura. En aquel momento, gracias a Clairaut, tan sólo se disponía de una vaga noción de "doble curvatura" originada en la geometría descriptiva, que representaba una curva en el espacio mediante dos proyecciones ortogonales planas, cuyas curvaturas determinarían, en un cierto sentido poco preciso, la curvatura de la curva espacial. Euler reconoce este mérito al geómetra francés al comienzo del "Apéndice sobre superficies" que cierra [E], en el que tan sólo hace consideraciones elementales sobre las superficies y sus intersecciones, sobre todo las secciones palnas.

4.2 Euler y las superficies

En el apéndice que acabamos de citar, Euler se refiere a "las superficies de los sólidos" indicando que "para la comprensión de una superficie, es una gran ayuda conocer la intersección de la superficie y ciertos planos dados". Esta idea tendría años después una aplicación magnífica. Se trata de un trabajo expuesto en 1760 pero no publicado hasta 1767, titulado *Investigaciones sobre la curvatura de las superficies*. En él se aproxima a la idea de curvatura de una superficie en un punto considerando las curvaturas de todas las curvas planas que son secciones normales a la superficie en dicho punto. Euler refiere la superficie a su plano tangente en el punto en cuestión tomado como plano (x, y), de modo que le da la ecuación $z = f(x, y)$ siendo f una función que se anula en el origen igual que sus primeras derivadas. Luego corta la superficie con los planos normales $y = x \tan\theta$ en la dirección tangente θ y calcula las curvaturas de las secciones planas. Es claro que la curvatura de la sección plana en la dirección $\theta = 0$ es $\kappa_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)$ y que en la dirección perpendicular es $\kappa_2 = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)$. Con esta notación, la expresión de la curvatura de la sección normal arbitraria, calculada mediante la derivada segunda de la función $f(x\cos\theta, x\mathrm{sen}\theta)$, es

$$\kappa(\theta) = \kappa_1 \cos^2\theta + \kappa_2 \mathrm{sen}^2\theta + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)(\cos\theta + \mathrm{sen}\theta).$$

Finalmente, Euler hace un cambio de ejes ortogonales en el plano (x, y) para anular el último término de la suma anterior, resultando el teorema que lleva su nombre, que es el más importante de Euler en la geometría de curvas y superficies. Todavía hizo intentos en otros temas, como la superficies aplicables en el plano, pero sin llegar a resultados concluyentes.

4.3 Monge y las superficies

Quizás el recurso más destacado de la geometría de Monge sea el uso de las superficies regladas, por sí mismas o asociadas a curvas o superficies a estudiar. Esto se aprecia bien en su obra [M] *Aplicación del análisis a la geometría*, publicada en 1807 después de varios artículos sobre el tema y otros apuntes preliminares realizados a lo largo de los treinta años anteriores. El autor comienza dando las ecuaciones del plano tangente y de la recta normal a una superficie $z = f(x, y)$ en un punto.
Después incluye una amplia lista de tipos particulares de superficies cuyas ecuaciones obtiene a partir de su modo de generación. La última de ellas es la "superficie engendrada por el movimiento de una recta que pasa siempre por el eje de las z"

y que se apoya en dos curvas directrices dadas, lo que da lugar a una familia que determina mediante ecuaciones en derivadas parciales, indicando además dos tipos de corte de piedras que siguen este procedimiento de generación.

Luego aborda las superficies desarrollables, que define intuitivamente, como su propio nombre indica, por su aplicabilidad completa y sin deformaciones en un plano. Pero enseguida las identifica con las envolventes de familias uniparamétricas de planos y las caracteriza mediante la ecuación en derivadas parciales de segundo orden

$$rt - s^2 = 0,$$

condición que hoy conocemos como la anulación de la segunda forma fundamental. Además, derivando respecto al parámetro la ecuación del plano variable encuentra las ecuaciones de las generatirces y la de la arista de retroceso. Este apartado termina con una colección de casos particulares.

Monge titula el bloque temático siguiente "De las dos curvaturas de una superficie curva", aludiendo a las curvaturas principales de Euler pero sin mencionar al autor suizo, quizás porque el francés plantea el asunto con un procedimiento distinto. Toma la normal en un punto de la superficie y luego la normal en otro punto "infinitamente próximo" siguiendo una cierta dirección, estudiando las condiciones para que estas dos normales "consecutivas", que en general se cruzarán, estén en un mismo plano y por tanto se corten. Con este método encuentra la ecuación diferencial de la líneas de curvatura, que simplifica a la manera euleriana tomando coordenadas convenientemente, para dejarla en la forma

$$\frac{dy^2}{dx^2} + \frac{dy}{dx}\left(\frac{r-t}{s}\right) - 1 = 0.$$

En esta ecuación se aprecia con facilidad que, en cada punto, la condición propuesta se verifica en dos direcciones que son perpendiculares. De este análisis Monge concluye su famoso teorema que caracteriza las líneas de curvatura como aquéllas sobre la superficie que al ser recorridas por la normal determinan una superficie desarrollable. Después de algunos ejemplos más simples, estudia las líneas de curvatura de un elipsoide, representadas en la Fig. 7 (Fig. 2.22 de [S], libro que ya no se utiliza como texto pero que sigue siendo muy interesante desde el punto de vista histórico). Monge considera la construcción de un nuevo edificio para la Asamblea Nacional que estuviera cubierto por una bóveda elipsoidal.

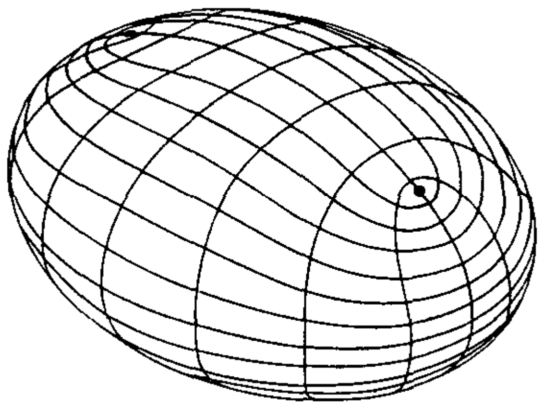

Fig. 7

Así la autoridad podría sentarse bajo uno de los puntos umbílicos de la bóveda, dejando tras ella un breve espacio para los servicios técnicos de la Asamblea y frente a ella un amplio espacio destinado a los representantes de los ciudadanos. Para cortar las piedras que formaran dicha bóveda, señala Monge, las caras de apoyo deberían seguir el trazado de las superficies desarrollables generadas por las normales al elipsoide al moverse a lo largo de sus líneas de curvatura.

4.4 Monge y las curvas alabeadas

No menos interesante es el trabajo de Monge sobre las curvas alabeadas, que llama, siguiendo a Clairaut, de doble curvatura. Esta era una manera de hablar que se justificaba mediante proyecciones o diciendo que las curvas eran la intersección de dos superficies y heredaban una curvatura de cada una de ella. Pero realmente no habían aislado dos magnitudes intensivas en cada punto que fueran lo que ahora llamamos la curvatura y la torsión. Sin embargo, veremos que Monge dio realmente las claves para la identificación posterior de estos conceptos.

La parte de [M] dedicada a las curvas se titula "Sobre las envolventes, los radios de curvatura y los diferentes géneros de inflexiones de las curvas de doble curvatura". Esta parte ocupa el final y tiene mucha menos extensión que la dedicada a las superficies. El objetivo de Monge era extender al espacio las propiedades de curvatura de las curvas planas entendidas a la manera de Huygens y L'Hôpital, es decir, viendo que toda curva se puede describir desenrollando un hilo enrollado sobre otra: "He demostrado que una curva cualquiera, plana o de doble curvatura, tiene una infinidad de evolutas, todas de doble curvatura, excepto una única para cada curva plana, y he dado el modo de encontrar las ecuaciones de todas esas evolutas a partir de las de la evolvente, lo que era mi propósito inicial en esta Memoria; así que no hay curva que no se pueda engendrar por el desarrollo de una infinidad de otras". Luego reconoce que este desarrollo no es fácil en la práctica en el caso de doble curvatura y propone un método que utiliza dos hilos según la Fig. 8 (Fig. 6 de [M]); así concluye que "sería fácil hacer oscilar un péndulo en una curva de doble curvatura cualquiera, si ello fuera necesario, suponiendo que esta curva volviera su convexidad hacia el centro de las fuerzas que actuaran sobre el péndulo".

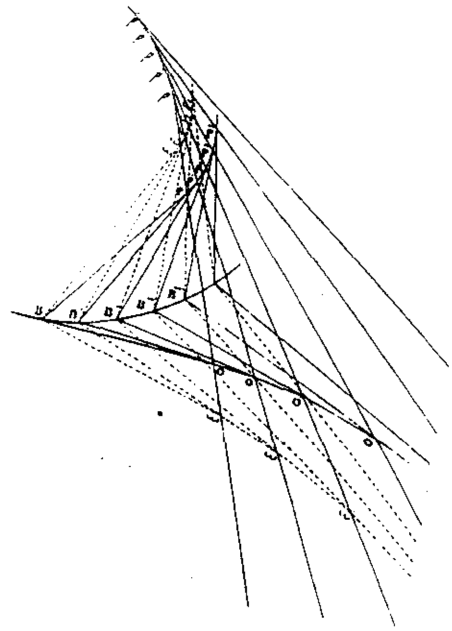

Fig. 8

El método de Monge para las curvas está también basado en las superficies desarrollables, pues lo que hace es obtener la envolvente de la familia de planos normales a la curva. Cortando el plano normal en un punto por otro correspondiente a un punto "infinitamente próximo" obtiene una recta en el plano normal que es el eje de un círculo cuya circunferencia pasa por los dos puntos y cuyo radio representa para Monge la curvatura de la curva en el punto dado, siendo su centro el centro de curvatura. Además, al variar el punto, todos esos ejes forman una superficie desarrollable que es el lugar geométrico de una infinidad de evolutas de la curva dada. Monge prueba que en el caso plano el lugar geométrico de los centros de curvatura es la evoluta ya conocida y que la superficie desarrollable es en este caso un cilindro con dicha evoluta como base; recíprocamente, si la superficie desarrollable es un cilindro la curva es plana. Si la curva no es plana entonces este lugar no puede ser una evoluta (es decir, no puede servir para obtener la curva inicial mediante un hilo enrollado sobre ella). Prueba también que la superficie desarrollable es un cono si y sólo si la curva es esférica.

Hasta aquí los razonamientos de Monge son geométricos, sin que intervengan las ecuaciones, pero para obtener la arista de retroceso, excluidos ya los casos plano y esférico, recurre al método analítico tomando la curva en la forma $y = \phi(x)$, $z = \psi(x)$, lo que tiene una clara influencia de la geometría descriptiva, pues se da la curva alabeada mediante dos de sus proyecciones ortogonales, a la manera de Clairaut.

A partir de dicha ecuación Monge obtuvo la del plano normal en uno de sus puntos, que derivó dos veces respecto al parámetro x obteniendo un sistema lineal de tres ecuaciones con tres incógnitas a cuya solución llamó "centro de curvatura esférica" de la curva en el punto dado. Modificando un poco la notación de Monge, si (x, y, z) es un punto de la curva, las coordenadas (X, Y, Z) de ese centro son

$$X = x + \frac{1}{c}[(\phi'\psi''' - \phi'''\psi')a - 3(\phi'\psi'' - \phi''\psi')b],$$

$$Y = \phi + \frac{1}{c}(-\psi'''a + 3\psi''b), \qquad Z = \psi + \frac{1}{c}(\phi'''a + 3\phi''b),$$

donde a, b, c son las expresiones

$$a = 1 + (\phi')^2 + (\psi')^2, \quad b = \phi'\phi'' + \psi'\psi'', \quad c = \psi''\phi''' - \psi'''\phi''.$$

Para Monge, este punto era la intersección de dos ejes polares consecutivos o de tres planos normales consecutivos. De este modo Monge obtuvo la familia de esferas osculatrices de la curva, siendo el lugar geométrico de sus centros la arista de retroceso de la desarrollable. Además, dio la ecuación general de la familia de evolutas, entre las que no se encuentra la arista de retroceso.

El gran geómetra explica también que un curva tiene un "punto de inflexión simple" si en ese punto se hace plana -tiene tres puntos consecutivos en un plano-lo que significa que el centro de curvatura esférica anterior se hace infinito, así que la condición que han de cumplir dichos puntos es $c = 0$. Por otra parte, un "punto de inflexión doble" se presenta cuando la curva se hace recta en ese punto. Para encontrar estos puntos Monge calcula el "radio de curvatura", que no es el de la esfera osculatriz sino el del centro de curvatura (hoy sabemos que es la intersección de la esfera osculatriz con el plano osculador). Al hacer infinito dicho radio obtiene las condiciones $\phi'' = 0 = \psi''$. Hoy identificamos esta condición como la anulación de la curvatura y la anterior como la anulación de la torsión.

4.5 La tropa de Monge

Hemos visto que Monge se quedó muy cerca de explicitar lo que Darboux llamó el triedro móvil de una curva. La tangente y el plano normal eran los primeros elementos conocidos, el eje polar que Monge calculó tiene la dirección de la binormal y es perpendicular al plano osculador, en el que está el circulo osculador, que tiene su centro en la normal. El radio de este círculo es efectivamente el radio de curvatura y el otro radio que Monge consideró, el esférico que se hace infinito en las curvas planas, es función de la curvatura y la torsión. Pero lo cierto es que el genial geómetra francés despejó el enigma de la curvatura de las curvas alabeadas y dejó el tema a falta tan sólo de algunos detalles clarificadores.

Recomponiendo las enseñanzas de Monge, su discípulo Lancret definió en 1802 la curvatura y la torsión -que llamó "flexiones primera y segunda"- como la variación de los ángulos formados por los planos normal y osculador con otros homólogos consecutivos y caracterizó las hélices circulares como las curvas alabeadas que tiene constante la razón entre la curvatura y la torsión.

Otro discípulo temprano de Monge, Meusnier, completó en 1785 el conocimiento de las curvaturas normales de Euler, calculando en función de ellas la curvatura de las secciones planas oblicuas y asociando a la superficie en cada punto un toro cuyos dos radios son los radios de curvatura principales. Por otra parte, Dupin estudió con detalle en 1813 los distintos tipos de puntos que puede tener una superficie en función de la naturaleza de las direcciones principales, las asintóticas que las bisecan y de las curvaturas normales. Probó también que las superficies triplemente ortogonales se cortan a lo largo de líneas de curvatura.

Para introducir el trabajo posterior de Gauss es importante recordar a otro discípulo, Rodrigues, que en 1815 reinterpretó el teorema de su maestro que caracterizaba las líneas de curvatura. Estudió la variación de la normal a lo largo de estas curvas mediante la longitud del arco que dibujaban sobre una esfera de radio unidad las normales sucesivas una vez trasladadas al centro de la esfera sin modificar su dirección. De este modo probó que las curvaturas principales venían dadas por las razones

$$\frac{ds^*}{ds},$$

donde s^* es la longitud del arco trazado sobre la esfera y s la longitud del arco de línea de curvatura recorrido por la normal. Esta técnica de las "indicatrices" es la extensión natural al espacio del método seguido por Euler cuando expresó la curvatura de una curva plana como la variación por unidad de longitud del ángulo girado por la tangente. Las indicatrices de las rectas tangente y binormal dan respectivamente la curvatura y la torsión de una curva alabeada.

5. La curvatura de Gauss

Después de Euler y los franceses, la curvatura de una superficie sólo se comprendía direccionalmente y seguía sin ser una magnitud intensiva definida en un punto, como era la curvatura de una curva plana y como eran las flexiones de una curva alabeada. Completar este proceso es el mérito de Gauss, uno de los muchos que le corresponden en las matemáticas y la física. El trabajo de Gauss [G] sobre este tema apareció en 1827, con el título *Investigaciones generales sobre las superficies curvas*. Se trata de un trabajo teórico que se gestó mientras su autor trabajaba como geodesta, actividad que le sugirió la idea de considerar las superficies en sí mismas, como universos bidimensionales, y no como límites de sólidos. Ello le llevó a dar relevancia a las ecuaciones paramétricas y a las magnitudes que determinan, en función de estos parámetros, la forma de medir sobre la superficie. Esta geometría intríseca culminó el proceso de gestación de la noción matemática de curvatura a partir de las ideas que se captan por los sentidos. El mencionado trabajo de Gauss contiene además resultados muy importantes sobre las geodésicas.

5.1 Forma extrínseca de la curvatura

Gauss comienza reconociendo la importancia del método de las indicatrices, pues afirma: "Las investigaciones en las que uno se ocupa de las direcciones de las diversas rectas en el espacio alcanzan la mayoría de las veces un grado muy alto de claridad y de simplicidad cuando se recurre al empleo de una superficie esférica de radio 1 alrededor de un centro arbitrario, y cuyos puntos se acuerda que representen las direcciones de las rectas paralelas a los radios terminados en dichos puntos". En efecto, utiliza este método para introducir la curvatura a través de la indicatriz de la recta normal a la superficie: "Dada una porción de superficie alabeada, comprendida en un perímetro determinado, diremos que tiene por curvatura total o entera el área de la figura que le corresponde sobre la superficie esférica auxiliar... Conviene distinguir, de esta curvatura entera, la curvatura de algún modo específica, que llamaremos la medida de la curvatura y significa el cociente que se obtiene dividiendo la curvatura entera del elemento de superficie adyacente a este punto por el área de este elemento mismo".

Así establecída la definición, Gauss pasa a efectuar los cálculos que le permitan encontrar una fórmula adecuada para el nuevo concepto de curvatura. Según la definición, la curvatura será la razón

$$K = \frac{dX\delta Y - dY\delta X}{dx\delta y - dy\delta x}.$$

En el denominador aparece el área de un elemento infinitesimal de superficie que tiene forma triangular, siendo d y δ los símbolos que representan los incrementos infinitesimales en cada uno de los lados. En el numerador se repite el mismo esquema infinitesimal para la esfera auxiliar. En ambos casos las áreas se consíderan proyectadas sobre un mismo plano, pero ello, advierte Gauss, no altera las relaciones de tamaño entre ellas. Para calcular la anterior expresión diferencial hay que considerar la ecuación de la superficie, que Gauss toma primero, como sus antecesores, en la forma $z = f(x, y)$. Con la notación de Monge utilizada antes, distinta de la usada por Gauss, lo que éste prueba es que se verifica en general

$$K = \frac{rt - s^2}{(1 + p^2 + q^2)^2}$$

y que con un sistema coordenado conveniente la fórmula se reduce a $K = rt$, de modo que el príncipe de los matemáticos sentencia: "Estas conclusiones encierran poco más o menos todo lo que el ilustre Euler ha sido el primero en enseñar sobre la curvatura de las superficies".

Pero, según Gauss, hay dos métodos para el estudio de las superficies. En el primero uno se sirve de una ecuación $W = 0$, donde W es función de las indeterminadas x, y, z. En el segundo las coordenadas se expresan en forma de funciones de dos variables, los parámetros de la superficie. Como la ecuación usada antes no es sino un caso particular de ambos métodos, Gauss se dispone a extender la fórmula de la curvatura al caso en que la ecuación de la superficie es de la forma $W = 0$, lo que logra con habilidad en el uso del cálculo diferencial. No reproducimos la fórmula porque es un poco larga. Más lo es todavía la que luego obtiene, poniendo en juego mayores destrezas de cálculo, para el caso en que la superficie viene dada en ecuaciones paramétricas.

5.2 Forma intrínseca de la curvatura

La primera de las fórmula dada por Gauss para K encierra cinco elementos, la segunda nueve y la tercera quince. Pero no se trata de una complicación arbitraria, sino que el autor advierte que es muy importante llegar a esta última fórmula tan compleja, pues con su ayuda se obtiene "otra que se cuenta entre los teoremas más fecundos en la teoría de las superficies curvas".

Para obtener la fórmula de quince elementos Gauss había introducido las que ahora llamamos las fórmas cuadráticas fundamentales, la primera con coeficientes E, F, G y la segunda con coeficientes T, U, V; de modo que los quince elementos de la fórmula dependían de estos coeficientes y algunas de sus derivadas. Pero el paso adelante genial que da Gauss es hacia una nueva fórmula, que es tan fecunda porque "no encierra más que las cantidades E, F, G y sus cocientes diferenciales de primero y de segundo orden".

Gauss concluye: "Si se nota que se tiene siempre

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

se ve enseguida que $\sqrt{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}$ es la expresión general de un elemento lineal sobre una superficie alabeada [y que,] para encontrar la medida de la curvatura, no se necesitan las fórmulas finitas que dan las coordenadas x, y, z en función de las indeterminadas u, v, sino que es suficiente tener la expresión general de la magnitud de cada elemento lineal".

La última fórmula de K le conduce también -"espontáneamente", dice- a un "teorema notable", el que ahora conocemos como *teorema egregio de Gauss*:

Gauss, Investigaciones XII.- *Si una superficie curva es aplicada sobre otra superficie curva cualquiera, la medida de la curvatura en cada punto permanece invariable.*

Seguidamente Gauss menciona el caso particular de las superficies desarrollables, que son aplicables sobre el plano, por lo que su curvatura debe ser nula, lo que conduce a la condición $rt - s^2 = 0$ de Monge. Pero el alemán no menciona al francés, sino que afirma que se trata de "una ecuación característica conocida hace tiempo, pero que en nuestra opinión no se demuestra de ordinario con todo el rigor deseable".

Finalmente, reproducimos casi íntegro el texto del párrafo con el que Gauss termina esta parte de la obra, que se completa con su trabajo sobre las geodésicas.

Gauss, Investigaciones XIII.- *Las consideraciones que acabamos de exponer se vinculan a un modo particular de observar las superficies, que nos parece digno en grado máximo de llamar la atención de los geómetras. En efecto, si se considera una superficie no como el límite de un sólido, sino más bien como un sólido flexible e inextensible, del que una dimensión se supone desaparecida, las propiedades de la superficie dependerán en parte de la forma particular que pueda tomar después de una flexión arbitraria, y serán, en parte, absolutas e invariables, cualquiera que sea esta forma. Con este último tipo de propiedades, cuyo estudio abre a la geometría un campo nuevo y muy vasto, se relacionan la medida de la curvatura y la curvatura entera, en el sentido que damos a estas expresiones; ...*

Bibliografía

[A] Apolonio, *Conics, books V to VII* (Trans. G. J. Toomer), Springer-Verlag, 1990.

[D] R. Descartes, *Discurso del método: dióptrica, meteoros y geometría* (Trad. G. Quintás), Alfaguara, 1981.

[E] L. Euler, *Introduction to analysis of the infinite. Book II* (Trans, J. D. Blanton), Springer-Verlag, 1990.

[G] J.F. Gauss, *Recherches générales sur les surfaces courbes* (Trad. E. Roger) 2è éd., Prudhomme, 1870.

[H] Marquis de L'Hospital, *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*, ACL, 1988 (Versión española de R. Cambray en 1998, Mathema, México).

[M] G. Monge, *Aplications de l'analyse a la géométrie*, 4è. éd., Bernard, 1809.

[RPB] J. Rey Pastor & J. Babini, *Historia de la matemática*, Gedisa, 2000.

[S] D. Struik, *Geometría diferencial clásica*, 3ª ed., Aguilar, 1966.