

Ilusiones Geométricas

por

Josu Arroyo Olea, Universidad del País Vasco

“Puedo imaginar sin esfuerzo el primer largometraje cinematográfico enteramente generado por ordenador. Estamos en 1991. Bajo a trompicones por el pasillo de la sala cargando una bolsa tamaño hiper de palomitas sintéticas y una bebida sin alcohol elaborada con unos cuantos aditivos que hacen innecesarios los ingredientes habituales. Las luces de la sala se amortiguan hasta apagarse, se levanta el telón y la pantalla cobra vida con una adaptación del *El señor de los anillos*, de J. R. R. Tolkien. El hobbit Frodo pasea por un estrecho valle. En la lejanía, los agudos picachos de la sierra, festoneados de nieve, se hincan en el cielo. Plantas exóticas y árboles de especies desconocidas rielan en primer plano, heridos por el sol. La escena se muda en un mago que observa fijamente su bola de cristal. En el centro de la esfera cristalina se distingue una fortaleza, por entre cuyas almenas saltan y cabriolean las llamas.”

A. K. Dewdney escribió estas líneas hace ya muchos años en la sección *Juegos de ordenador* de la revista *Investigación y Ciencia*. Según narraba, lo hizo después de realizar una visita en San Rafael, California, a lo que en aquel momento era una incipiente, y desconocida para la mayoría, compañía de ordinigrafcos, Pixar, antes Lucasfilm Computer Graphics Laboratory. Eran los tiempos en los que el común de los mortales sólo podría aspirar a comprar, con un buen esfuerzo económico, un ordenador que a duras penas llegaría a velocidades de reloj de 12 MHZ, por no mencionar las limitaciones de los demás dispositivos que rodeaban al microprocesador.

Hoy en día, Pixar ya es mundialmente conocida por sus obras, las más recientes *Toy Story* y *Bichos*; platós de televisión son sustituidos por mundos virtuales generados por ordenador en tiempo real; niños salen del cine creyendo que los dinosaurios existen en la actualidad y no hay forma de convencerles de lo contrario, porque, como ellos mismos razonan, “como no van a existir si los he visto”; los ordenadores personales llegan ya a volar a velocidades de más de 1000MHZ, con diseños especiales que potencian en grado sumo sus posibilidades gráficas; y en definitiva, crear un pequeño Pixar en casa de uno no es hoy en día una quimera.

1. INTRODUCCIÓN

Proponemos en este texto una aproximación al mundo de la infografía, huyendo de la tentación de acudir a un planteamiento que metafóricamente podría tildar de *método teomera-demostración*. Queremos llegar a enunciar el *teorema* después de haber recorrido toda la *demostración*; pero eso sí, comenzando desde su punto más recóndito y centrándonos en la ideas sin entrar en demasiados detalles técnicos. Para ello, nos vamos a plantear un problema relacionado con la geometría, más concretamente con la visualización de superficies geométricas.

Hablar hoy en día de la *representación* gráfica de superficies en ordenador ha dejado de ser un tema oscuro y puede decirse que está al alcance de (casi) cualquiera. Para muestra, ahí están *monstruosos paquetes* informáticos como el MathematicaTM. Pues bien, alejándonos de esta forma de representar la geometría, aspiramos a poder hacer algo más: queremos, como punto de arranque, poder *ver* esas superficies; mejor dicho, por si el empleo del verbo induce a equívoco, queremos poder *fotografiarlas*.

2. UN ESPACIO 3D BAJO NUESTRO CONTROL.

Si nuestro objetivo inicial, que a modo de punto de partida nos hemos marcado, va a ser el de intentar *fotografiar* superficies, queda claro que vamos inspirarnos en lo que ocurre en la realidad cuando de *ver* o fotografiar se trata. En la realidad, simplificando, diríamos que inmersos en R^3 encontramos objetos luces y el observador. La física afirmarían entonces que la luz procedente de las diversas fuentes incide en los objetos, se propaga en mil y una direcciones para que algunos fotones lleguen al observador permitiendo así que éste pueda crear la imagen.

El primer y más importante paso en pos de la consecución de este objetivo inicial que nos hemos marcado va a ser el de recrear un universo, un espacio tridimensional, donde podamos ejercer el arte de la fotografía sobre superficies; es decir, la primera lección consistirá en actuar como aprendices de Dioses.

2.1. COMPONENTES DE NUESTRO ESPACIO [3D].

Denotemos por $E = R^3$ espacio afín euclideo que a partir de este momento pasará a estar bajo nuestro control en consonancia con el rol que hemos asumido.

En este espacio, según lo escrito líneas arriba, habremos de recrear leyes y comportamientos físicos que hagan posible dedicarnos a la *fotografía* de superficies. Así, habremos de definir en E la *cámara fotográfica*, o maquinaria que permita obtener imágenes, *la luz*, o maquinaria que permita *ver* en ese mundo y, por supuesto, necesitaremos establecer la forma en la que la *luz* consigue interaccionar con las superficies. Tanto la *cámara fotográfica* como la *luz* se definirán de una forma "natural" atendiendo a su "función" en el mundo real, mientras que para establecer las leyes que nos permitan hablar de la interacción de *la luz* con las superficies, definiremos estructuras adecuadas de las que las superficies formen parte. Podemos adelantar que el motor de la *cámara* será el ordenador y la pantalla de éste podrá considerarse como el papel fotográfico en que quedará revelada la imagen.

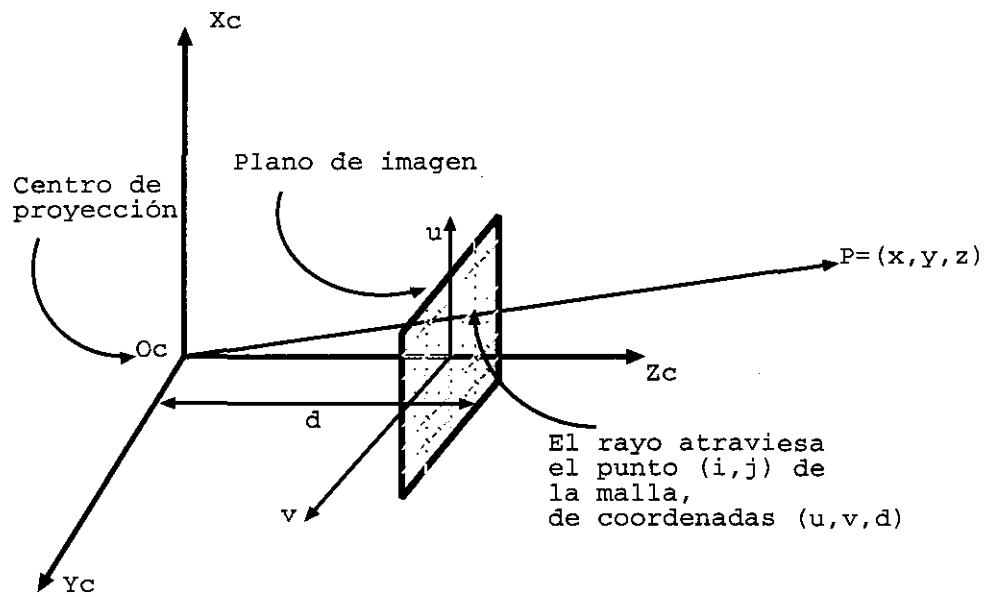
Definamos sin más dilación los actores de este nuestro E (una versión simplificada y sencilla) cuya gestión recae ya en nuestras manos:

- La cámara

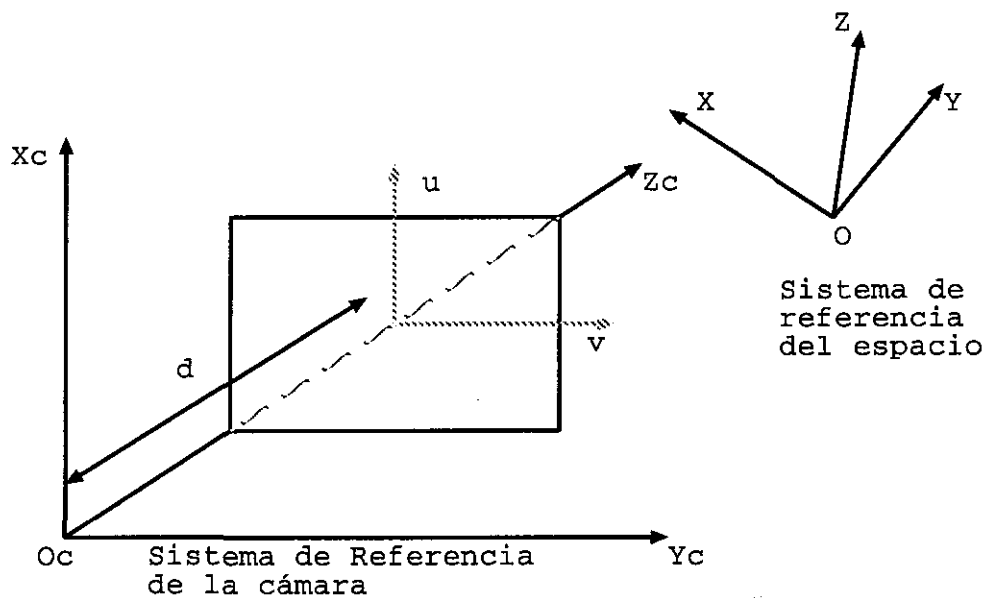
$$[Cam] = \{OC = (Cx, Cy, Cz), (Cdx, Cdy, Cdz), d, Lx, Ly, \dots\}$$

caracterizada en esta versión simplificada por:

- 1) un punto $OC = (Cx, Cy, Cz) \in E$, al que por la función que va a desempeñar podríamos denominar *punto del observador* o *centro de proyección*;
- 2) una dirección (Cdx, Cdy, Cdz) que, por la tarea a desempeñar, podría decir que es la dirección en la que mira la *cámara*;
- 3) un rectángulo de Lx unidades de largo y Ly unidades de alto con centro situado a d unidades de distancia del OC en la recta que partiendo de OC tiene vector director (Cdx, Cdy, Cdz) , normal al rectángulo,
- 4) y por fin unas leyes de funcionamiento que sean capaces de manejar unos datos que a su vez habremos de saber aportar para que obtengan unos resultados que nos resulten satisfactorios.



[Fig.1]: Idea de la cámara

[Fig.2]: Los distintos sistemas de referencia que funcionan en E .

- La luz

$$[Luz] = \{L = (L_x, L_y, L_z), CL = (L_r, L_g, L_b), \dots\}$$

que vendrá determinada por

- 1) un punto $L = (L_x, L_y, L_z) \in E$ cuya función será la de ejercer de *posición de la luz* (supondremos que la luz es un punto en E);
- 2) la 3-tupla $CL = (L_r, L_g, L_b) \in [0,1]^3$, *color* de la luz. Conviene explicar aquí que los colores en nuestro E van a venir descritos en función de 3 colores básicos, rojo, verde y azul, a modo de "base" de colores. El rojo se corresponderá con la tupla $(1,0,0)$, el verde se representará como $(0,1,0)$ y el azul por $(0,0,1)$. De este modo, es fácil ver que el amarillo será $(1,1,0)$, el blanco $(1,1,1)$, el negro $(0,0,0)$, el gris medio $(0.5,0.5,0.5)$ etc...

- Y junto a las clases $[Cam]$ y $[Luz]$ la clase que denotaremos por *objeto básico*,

$$[OB] = \left\{ \begin{array}{l} EF : \{S = S^2, T^2, \dots\} \\ ED : \left\{ \begin{array}{l} C, K_r, K_s, K_t, \dots \\ N : S \rightarrow S^2 \\ \dots \end{array} \right\} \end{array} \right\}$$

dividida en dos estructuras:

- 1) por una parte lo que podríamos llamar soporte físico o estructura física, que se corresponde con lo que es una superficie (con las manipulaciones, translaciones, rotaciones, dilataciones, etc... adecuadas dadas) ubicada en el espacio,
- 2) y por otro lado lo que podríamos llamar estructura descriptiva, compuesta por aplicaciones, funciones y constantes que nos "describirán" ese objeto básico. Su misión fundamental será la de intervenir en las leyes que gestionarán la interacción de elementos de la clase $[Luz]$ con elementos de la clase $[OB]$. Destacamos de inicio la presencia en esta estructura de la constante "color" (recordar que queremos poder *ver* superficies) del $[OB]$, $C = (C_r, C_g, C_b) \in [0,1]^3$, y de la *aplicación normal* $N : S \rightarrow S^2$ cuya función será la de devolver para cada $p \in S$ el vector $N(p) = \text{VECTOR NORMAL UNITARIO A } [OB] \text{ EN EL PUNTO } p \text{ DE LA SUPERFICIE } S$. Esta estructura descriptiva irá adquiriendo

protagonismo conforme las "leyes de la física" vayan estableciéndose en nuestro E .

3. LA MAQUINARIA

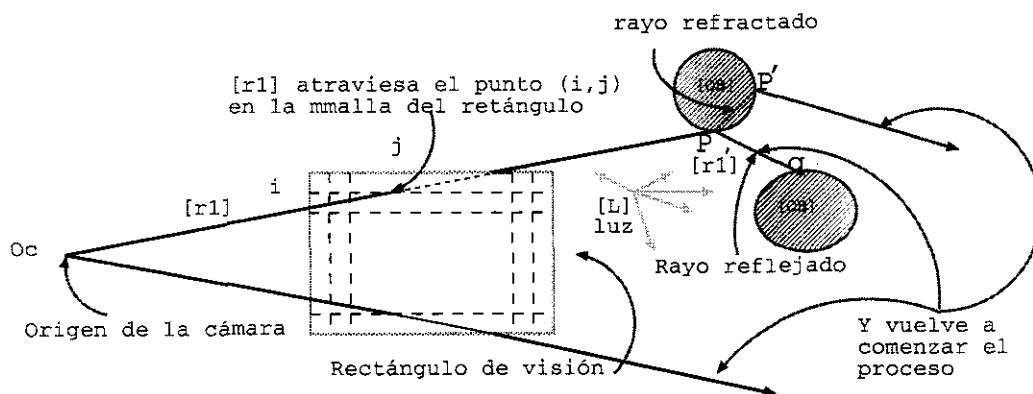
Supongamos que en E ubicamos ya un elemento de la clase $[Cam]$, uno o varios de la clase $[Luz]$ y uno o más de la clase $[OB]$, y que nos proponemos obtener una primera imagen de lo que en el interior de E se puede "ver"; dicho de otro modo, queremos obtener ya las primeras *fotografías* de nuestro espacio.

Supongamos que deseáramos, por ejemplo, una imagen de resolución 800x600 pixels. Para ellos dividiremos el *rectángulo de imagen* de $[Cam]$ en 799 partes en la horizontal y 599 en la vertical dando lugar a una malla de puntos, $\{M(i, j); i = 1...800, j = 1...600\}$. Para cada uno de esos puntos de la malla trazaremos una recta (rayo) que partiendo del *punto del observador* CO de $[Cam]$, pasará por ese punto de la malla y se adentrará en el E . Ese rayo partirá en busca de una información que vendrá codificada en forma de 3-tupla de $[0, 1]^3$; esto es, ese rayo busca un *color*. La maquinaria de $[Cam]$ se encargará de obtener ese color, que será precisamente el que aparecerá en el pixel (i, j) de la pantalla del ordenador. Una vez realizado este proceso para cada uno de los puntos de la malla habremos conseguido completar la imagen fotográfica.

Describamos sin más preámbulo la ingeniería que hará funcionar la caja negra que gobernará el arte de la fotografía en E .

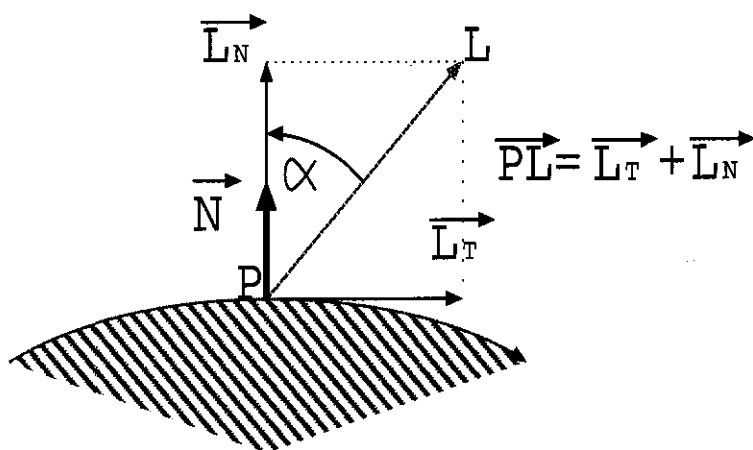
3.1. EL CEREBRO DE LA BESTIA

Sea $[r1]$ un rayo que parte del *punto del observador* $OC = (Cx, Cy, Cz)$ y pasa por el punto $M(i, j)$ de la malla del *plano de visión*. En su viaje quizá no llegue a tocar ninguno de los $[OB]$ (intersecar sus superficies) perdiéndose en el infinito. Si es así, diremos (por ahora) que ese rayo devuelve como información la tupla $(0, 0, 0)$ que, como ya hemos mencionado, se corresponde con el color negro. ste sería, en este caso, el color que aparecería en el pixel (i, j) de la pantalla del ordenador.



[Fig.3]: Funcionamiento de la cámara.

Supongamos ahora que ese rayo sí llega a colisionar con alguno de los $[OB]$. Nos quedaremos con la intersección más próxima al CO . Sea p ese punto de intersección (punto de la superficie S , soporte físico de $[OB]$). En este preciso instante daría comienzo la segunda fase, la de determinar la información en forma de 3-tupla (color) que ese rayo habrá de devolver, para de aquí hacérselo llegar al punto correspondiente de la pantalla del ordenador. Denotemos por $CV[p]$ esa información (color) que habrá de devolver el rayo $[r1]$.

[Fig.4]: Punto P iluminado por la luz situada en L .

3.1.1. LUZ DIFUSA

- Supongamos en primer lugar que el punto p está iluminado; esto es, trazamos una recta entre el punto p y el punto de posición de la luz, L , y comprobamos que esa recta no colisiona con ningún $[OB]$.
- Sabemos que el vector \vec{pL} puede descomponerse como suma de dos vectores, uno normal al $[OB]$ en p y el otro tangente a él; esto es, $\vec{pL} = \vec{L_N} + \vec{L_T}$.
- La física nos diría que la cantidad de luz que recibe p de la fuente de luz situada en L dependerá de $\|\vec{L_N}\|$ y de la distancia entre los puntos p y L , $d(p, L)$. Concretamente, la cantidad de luz que recibe el punto p será

$$\frac{\|\vec{L_N}\|}{d(p, L)^2}(L_r, L_g, L_b) = \frac{\cos \alpha}{d(p, L)}(L_r, L_g, L_b)$$

Recordemos que $(L_r, L_g, L_b) \in [0, 1]^3$ representa el color de la fuente de luz situada en el punto L .

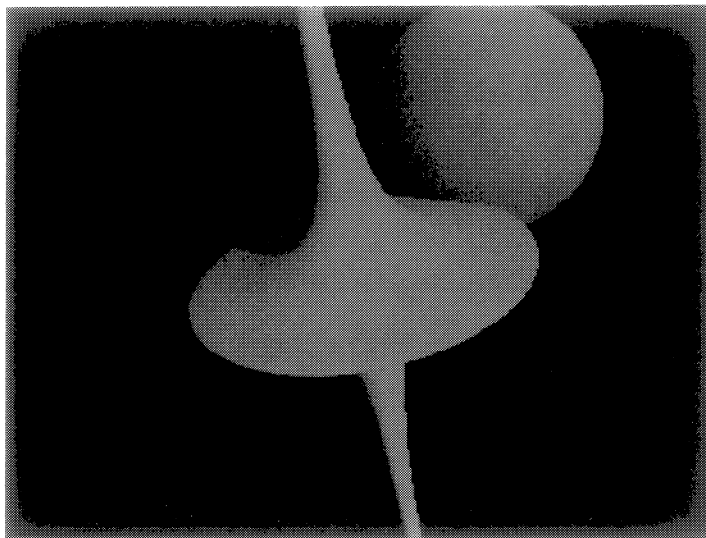
- Denotemos por $Difusa[p] = (C_r L_r, C_g L_g, C_b L_b) \frac{\cos \alpha}{d(p, L)}$. Si suponemos que el $[OB]$ en el que se sitúa p cumple la característica física de ser capaz de absorber toda la luz que le llega y sólo emitir la que determina su color, la información que el rayo $[r1]$ devolverá será

$$CV[p] = Difusa[p] = (C_r L_r, C_g L_g, C_b L_b) \frac{\cos \alpha}{d(p, L)}$$

Detengámonos un momento en este punto. El proceso hasta ahora descrito marca los primeros pasos en pos de la creación de lo que podría considerarse el cerebro, aún algo tosco, de una *máquina fotográfica* en E . Y como una imagen vale más que mil palabras, veamos que efectivamente somos capaces de obtener imágenes del universo E , poniendo así definitivamente fin al reino de tinieblas en el que estaba sumido hasta nuestra llegada .

Para esta primera prueba, ubiquemos en E dos $[OB]$ de superficies soporte esfera y pseudoesfera respectivamente; activamos un elemento de la clase $[Luz]$ (

colocamos una luz en el espacio); activamos un elemento de la clase $[Cam]$ en una posición adecuada “apuntando” hacia los $[OB]$ y ordenamos tomar la fotografía; esto es, ordenamos realizar el proceso descrito arriba para cada punto de la malla de puntos del rectángulo de visión $M(i, j)$. Obtenemos

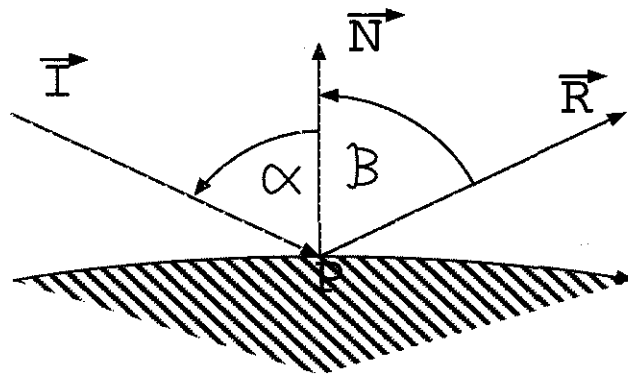


[Img.1]: Y se hizo la luz en E .

3.1.2. REFLEXIÓN

Por fin se hizo la luz en nuestro espacio E . Estamos ya en condiciones de *ver* en su interior. Sin embargo, esto es sólo el comienzo. Recordemos que nuestra ambiciosa idea de inicio era la de conseguir recrear el arte de la fotografía en E inspirándonos lo más posible en la realidad. Precisamente, sabemos que en la realidad, además del fenómeno de la luz difusa arriba tratado, se dan otro tipo de fenómenos en el comportamiento de la luz. Uno de ellos es la reflexión de la luz. Vamos a hacer que en nuestro mundo también sea posible.

- Activemos dentro de la estructura descriptiva de la clase $[OB]$ la constante $K_r \in [0, 1]$, denominada “coeficiente de reflexión”, cuya misión será la de determinar cuánto de la información, $VC[p]$, que el rayo inicial $[r1]$ ha de devolver acerca del punto p va a depender de la información procedente de imágenes reflejadas de otros objetos en el entorno de ese punto.



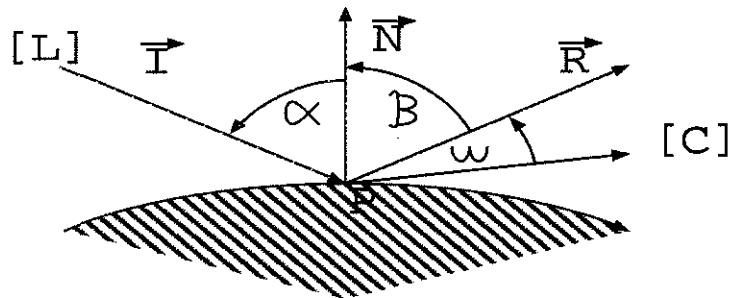
[Fig.5]: El punto p puede reflejar la luz incidente I .

- Volvamos a consultar la física. Por una parte tenemos que cuando un rayo incide sobre una superficie, el incidente \vec{I} y el reflejado \vec{R} forman un mismo ángulo respecto a \vec{N} , la normal a la superficie en dicho punto; es decir, $\alpha = \beta$. Además los rayos incidente, reflejado y normal, \vec{I} , \vec{R} y \vec{N} serán coplanarios con lo que podremos calcular fácilmente \vec{R} en función de \vec{I} y de \vec{N} . Concretamente (\vec{I} y \vec{R} unitarios)

$$\vec{R} = \vec{I} + 2 \cos \alpha \vec{N} = I + 2 \langle -\vec{I}, \vec{N} \rangle$$

- De este modo \vec{R} será la dirección de un nuevo rayo $[r1']$ [fig 3] que tiene por origen al punto p y al igual que el inicial $[r1]$, se adentrará en nuestro espacio E con la intención de devolver información (color) que en este caso habrá de ser empleada a su vez como ingrediente en la información, $VC[p]$, que el rayo inicial $[r1]$ devolverá. Más concretamente, siguiendo la nomenclatura ya empleada, $[r1']$ devolverá como información $VC_P[q]$, color del punto q visto desde p , para calcular $VC[p]$, que, recuerde, es el color que se verá en pantalla correspondiente al punto p .
- Pero la reflexión no sólo repercute en lo arriba escrito. Sabemos que en la realidad en ese tipo de superficies puede llegar a reflejarse, sin pasar por el filtro de la superficie, la propia luz que llega directa de las fuentes de luz $[L]$. Es lo que se conoce por *reflejo especular* y es fácilmente observable en superficies suficientemente pulidas cuando son observadas bajo un cierto ángulo acorde con el ángulo de incidencia de la luz.

- Para controlar este fenómeno en nuestro mundo, activamos en la estructura descriptiva de la clase $[OB]$ las constantes $K_s \in [0, 1]$, *coeficiente specular*, y $P_s \in (0, +\infty)$, *potencial specular*. La primera controlará cuánto del color $VC[p]$ va a quedar saturado por el color de la propia luz $[L]$. $K_s = 0$ indicaría que el objeto básico no dispondría de esta característica, mientras que $K_s = 1$ significaría que $VC[p]$ sería exactamente el color de la luz que se refleja completamente superpuesto sobre cualquier otro que pueda tener la tentación de contribuir en el $VC[p]$. La segunda constante, P_s , tendrá por misión controlar que el reflejo sea más o menos concentrado en el punto.



[Fig.6]: Reflejo especular en el punto p producido por la luz $[L]$.

- Parece claro que la cantidad de reflejo de la luz que va a llegar al observador (CO de $[Cam]$) va a depender del ángulo ω . De hecho, la luz que llega al punto p de la fuente $[L]$ producirá un reflejo (color) en p que será (recordar el apartado de la luz difusa, 3.1.1)

$$CLS[p] = \frac{\|\vec{L}_N\|}{d(p, L)^2} \cdot K_s \cdot (\cos \omega)^{P_s} \cdot (L_r, L_g, L_b)$$

- A modo orientativo, comentar que en el caso de los metales se sabe que $P_s \geq 50$.

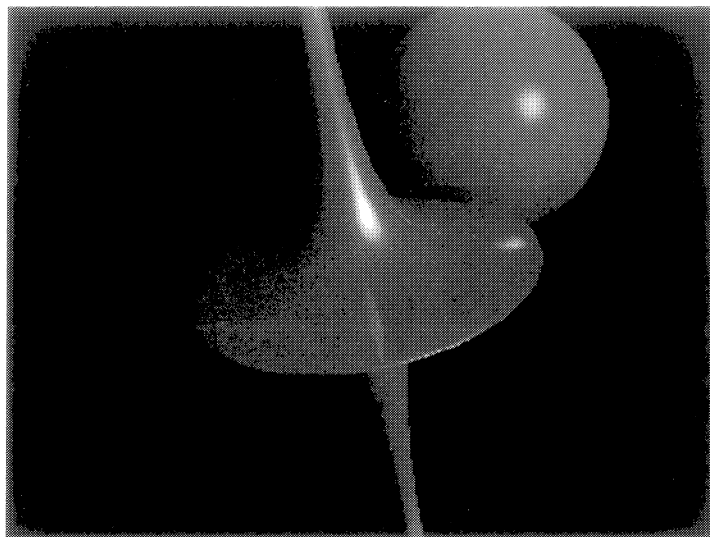
En resumen, recordando que nuestro objetivo es determinar un color $VC[p]$, en este momento nos encontramos con que tenemos a nuestra disposición

$$\begin{array}{l} Difusa[p] \\ K_r VC_P[q] \\ CLS[p] \end{array}$$

con lo que estamos en condiciones de mejorar sustancialmente ese “cerebro” de la cámara fotográfica que comenzamos a crear en el apartado anterior. Esta primera evolución funcionará bajo la siguiente ley:

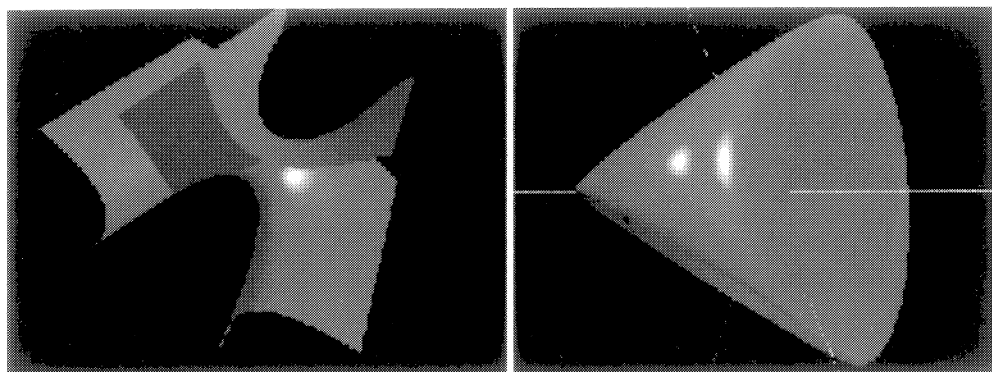
$$VC[p] = CLS[p] + K_r \cdot VCp[q] + (1 - K_r) \cdot Difusa[p]$$

Para ilustrar el funcionamiento de esta evolucionada maquinaria, activemos las constantes que gestionan la cualidad de reflexión en la estructura descriptiva de los [OB] antes presentados y volvamos a fotografiarlos, empleando ahora la cámara ya mejorada con la nueva ley que gestiona la maquinaria. Obtendríamos:

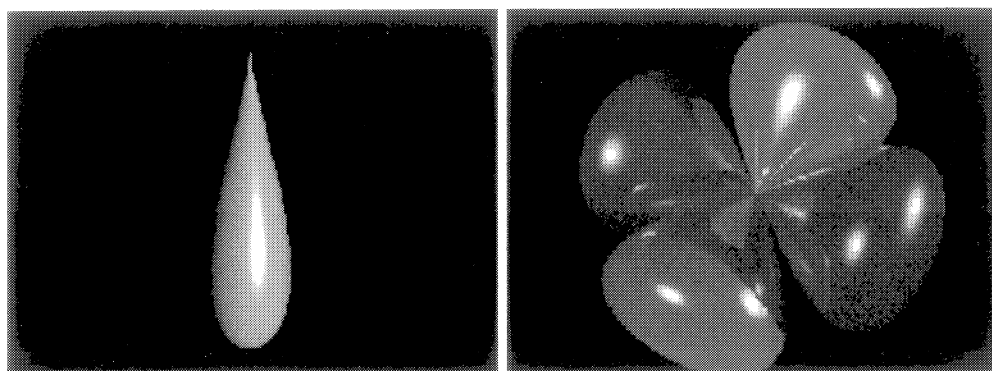


[Img.2]: Pseudoesfera refleja luz y objetos; esfera sólo luz.

Es notoria la mejoría en la calidad de imagen. Otras superficies fotografiadas con la misma cámara serían



[Img.3]: Trazos de una Monkey Saddle y de la superficie de Steiner.



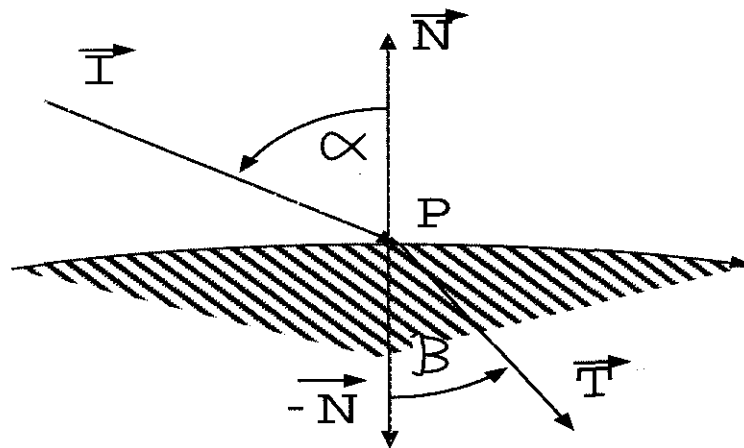
[Img.4]: Una cuártica en forma de lágrima y un par de lemniscatas.

Sin embargo esta técnica, aunque suene repetitivo, aún sólo ha dado sus primeros pasos. En un inicio hemos hablado de “fotografiar” superficies, y lo hemos logrado considerándolas como soporte físico de los llamados *objetos básicos*. y así conseguir que las superficies, de algún modo, reaccionen a la luz. Sin embargo, no nos detendremos aquí, sino que vamos a dar un salto cualitativo en este tratamiento. Vía la estructura descriptiva del [OB], que cada vez está adquiriendo mayor protagonismo, permitiremos que la luz pase a través del [OB]; esto es, que atraviese la superficie.

3.1.3. REFRACCIÓN

Completamos aquí las opciones que se presentan en la relación objetos-luz. Hasta ahora la luz no atravesaba objetos, o mejor dicho no dejábamos que atravesara superficies. Ahora, sin embargo, romperemos tabúes y lo permitiremos.

- Activemos un par de nuevas constantes en la estructura descriptiva de la clase $[OB]$, $K_t \in [0, 1]$ y $R_{it} \in R$. La primera, *coeficiente de refracción*, informará qué proporción de lo que llega al objeto es refractado por éste. Variará de $K_t = 0$, no refracta, hasta $K_t = 1$ refracta todo lo que le llega. La segunda constante dará una medida de la desviación en la refracción.



[Fig.5]: Rayo incidente I puede refractarse en P .

- La física diría que, como consecuencia del cambio del medio físico, \vec{I} sufre un cambio de dirección representado por \vec{T} , cambio que verifica la relación $\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} = \text{ÍNDICE DE REFRACCIÓN DEL PRIMER MEDIO FÍSICO RESPECTO AL SEGUNDO MEDIO FÍSICO}$. Esto es precisamente lo que controlará la constante R_{it} . Así $R_{it} = \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)}$. Casos reales de esa constante serían por ejemplo el cambio de medio de la luz de aire a agua con $R_{it} = 1.33$ y el paso de aire a diamante con $R_{it} = 1.75$.
- Sabemos también que los vectores (unitarios) \vec{I} , \vec{N} y \vec{T} serán coplanarios, con lo que a modo y manera del caso de la reflexión, podremos calcular

inmediatamente \vec{T} en función de \vec{I} y \vec{N} . En este caso la expresión será algo más compleja,

$$\vec{T} = \left(R_{it} \cos(\alpha) - \sqrt{1 + R_{it}^2 (\cos^2(\alpha) - 1)} \right) \vec{N} + R_{it} \vec{I}$$

- \vec{T} se convierte entonces en la dirección de un nuevo rayo que partiendo del punto p avanzará en el espacio hasta perderse en el infinito o encontrarse con otro punto p' . En este caso podremos calcular $VC_p[p']$, color del punto p' visto desde p , y emplear ese dato, junto con la constante K_t en el cálculo definitivo de $VC[p]$,

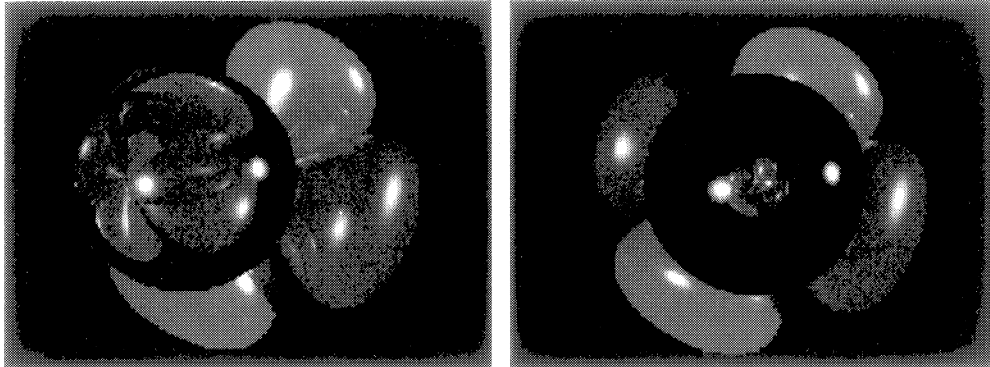
Tomemos los frutos de este proceso evolutivo e implementemos ya sin más dilación estas nuevas posibilidades dentro del cerebro que gestiona la maquinaria fotográfica en nuestro espacio. Así, la (nueva) ley que gobierne la *visión* nos dirá que "lo que uno va a ver de p " dependerá de:

- 1) el brillo de la luz en p ;
- 2) la cantidad de luz que se refleje en p ;
- 3) la cantidad de luz que se refracte en p ;
- 4) y, por último, de las características del $[OB]$ al que p pertenece.

Exactamente:

$$VC[p] = CLS[p] + K_r \cdot VC_p[q] + K_t \cdot VC_p[p'] + (1 - K_t - K_r) \cdot Difusa[p]$$

Conviene aclarar que, por simplicidad, hemos escrito todas las fórmulas para el caso de una única fuente de luz presente. De haber más de una se realizaría el cálculo para cada una de ellas para a continuación sumar todos los valores recibidos y obtener de ese modo el dato buscado. Para ilustrar las palabras, fotografiemos de nuevo, ya con la nueva maquinaria, a nuestras modelos lemniscatas, esta vez en la compañía de un $[OB]$ de superficie soporte esfera, en el que, en la estructura descriptiva, hemos activado las constantes de refracción.



[Img.5]: Esferas refractando lemniscatas para distintos valores de R_{it} .

4. NUEVOS OBJETIVOS

Puede decirse que la evolución del núcleo de la maquinaria, que paso a paso se ha ido conformando, ha tocado ya a su fin. A tenor de las imágenes obtenidas, no sería arriesgado afirmar que satisface nuestras expectativas iniciales. Pero, realmente, lo visto hasta ahora es sólo el comienzo, y aunque a partir de este momento ya no entraremos en detalles, merece la pena mencionar al menos algunas de las múltiples posibilidades de expansión que nos ofrece lo que hasta ahora hemos elaborado.

El paso inmediato y lógico, una vez concluida la creación de la maquinaria elemental, sería el de fijar nuestra atención en las clases $[Cam]$, $[Luz]$ y $[OB]$. Mencionar lo que se puede hacer con y sobre ellas daría para muchas páginas. Por ello, en esta ocasión sólo hablaremos de los $[OB]$.

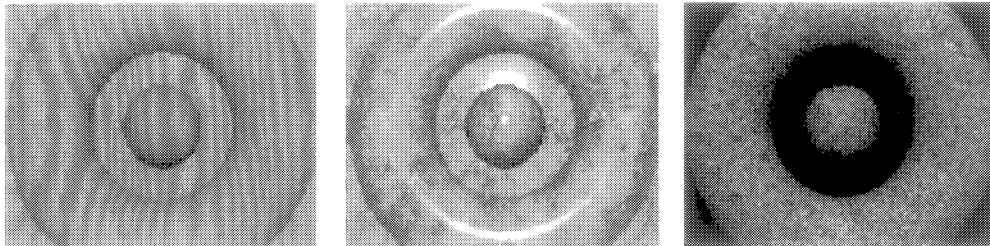
La clase $[OB]$, recordamos, está dividida en dos estructuras: por una parte la que denominábamos estructura física o soporte (superficie) y por otro lado la estructura descriptiva. Hasta este momento, la estructura descriptiva constaba de una aplicación definida sobre la superficie y unas cuantas constantes, C , K_r , K_s , P_s , K_t y R_{it} . Hemos sido testigos de una evolución en el cerebro de la maquinaria que ha ido de la mano de una ampliación en la estructura descriptiva de la clase $[OB]$. Precisamente ahí, en la estructura descriptiva, se encuentra un auténtico filón que todavía sólo hemos vislumbrado superficialmente.

4.1. ESTRUCTURA DESCRIPTIVA A LA N-ÉSIMA POTENCIA

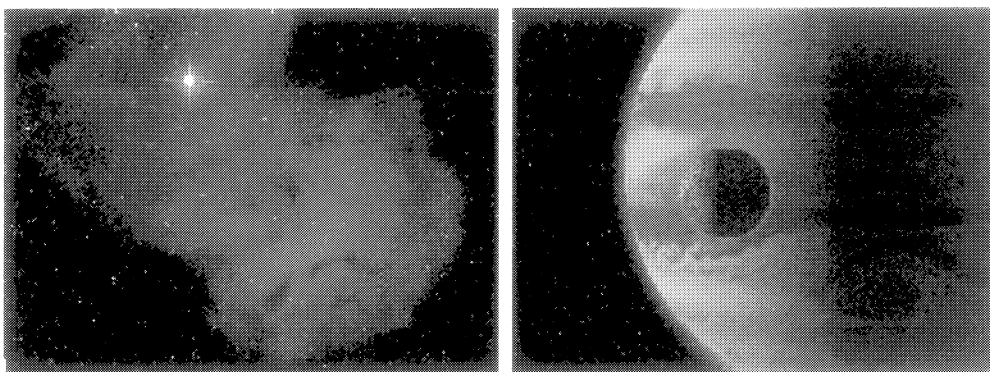
Repasando el fundamento del algoritmo del cálculo del color, uno observa que muchos de los datos empleados son constantes a lo ancho de la superficie sobre cuyos puntos estamos trabajando y no dependen del punto concreto. Ese es el caso del color, que desde un principio hemos considerado constante, o de los coeficientes K_r, K_g, K_t etc... Realmente en ningún momento hay necesidad de ello. Desde el momento en que el cerebro de la maquinaria tiene carácter absolutamente puntual, ni siquiera local, sobre la superficie, uno podría pensar en sustituir esas constantes por aplicaciones y funciones definidas sobre la superficie soporte del $[OB]$. Podríamos por ejemplo considerar la aplicación color $CS : S^2 \rightarrow [0, 1]^3$ tal que a cada punto de la superficie S le asigne $CS[p] = (p_r, p_g, p_b) \in [0, 1]^3$, aplicación que atendiendo a lo arriba comentado no necesitaría ser ni siquiera continua. De manera similar podríamos convertir a $K_r, K_g, K_t : S \rightarrow [0, 1]$ en funciones que asignaran a cada punto de la superficie un determinado coeficiente en $[0, 1]$. Estas posibilidades relanzan a cotas espectaculares las posibilidades de nuestra maquinaria.

4.1.1. APLICACIÓN COLOR

Continuando con lo arriba escrito, desde el momento en que el análisis es puntual y los datos que damos para un punto de la superficie no obligan a que los de otro punto sigan una determinada pautas por muy cercano al anterior que esté, tenemos las manos libres para complicar, por ejemplo la aplicación color, según nuestros gustos, o necesidades. Así, podríamos tener definida una aplicación color en todo el espacio E de tal modo que el color asignado a un punto dependiera de su posición en el espacio. También podríamos definir aplicaciones color muy específicas, que tuvieran en cuenta todo tipo de detalles como la posición del rectángulo de visión, las dimensiones de la superficie, etc... Y por supuesto, podríamos emplear parametrizaciones de las superficies para asignar a cada punto de la superficie, junto a sus coordenadas locales, una tupla de $[0, 1]^3$; un color.



[Img.6]: 3 alternativas para Aplicaciones Color definidas en todo el espacio.

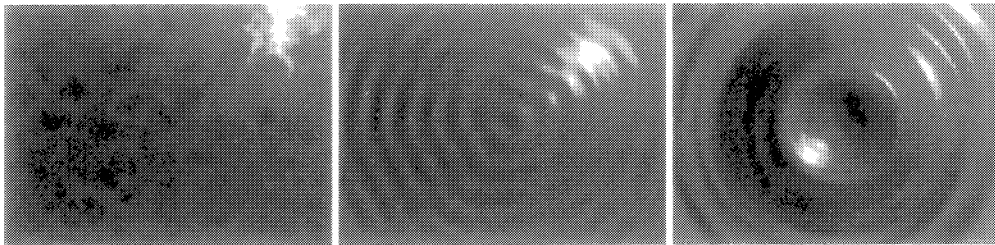


[Img.7]: Aplicaciones Color ajustadas a superficies concretas: (a) Nebulosa y (b) Mercurio suplantando a Io, orbitando en torno a Júpiter.

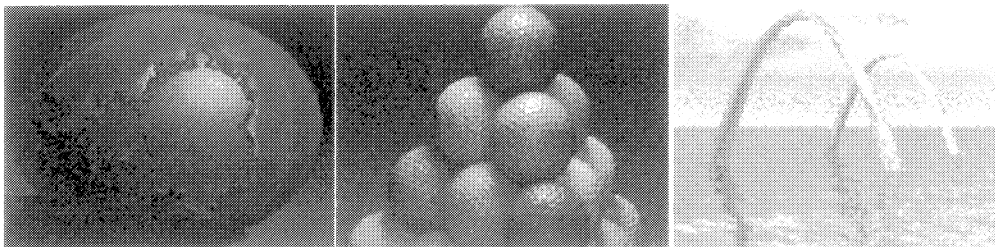
4.1.2. APLICACIÓN NORMAL

Recordamos que en la definición de la clase $[OB]$ escribíamos que la aplicación normal $N : S \rightarrow S^2$ tenía por misión devolver para cada $p \in S$ el vector $N(p) = \text{VECTOR UNITARIO NORMAL A } [OB] \text{ EN EL PUNTO } p \text{ DE LA SUPERFICIE } S$. Deliberadamente hemos escrito “normal a $[OB]$ ” en lugar de “normal a S ”. Realmente la función de la aplicación normal es la de devolver un vector unitario cuando el motor de la maquinaria lo requiera para el cálculo del $VC[p]$. El cerebro de la maquina no pregunta si el vector es normal a la superficie; simplemente necesita un vector para operar con él. Esto, lejos de significar una vía de agua en el núcleo, nos va a permitir dotar de mayores posibilidades a nuestra maquinaria. Dicho de otro modo, la aplicación normal contará con plena auto-

nomía y no tendrá que estar bajo las órdenes de la superficie soporte del [OB] ¿ Consecuencia ? La luz engaña a la vista.



[Img.8]: Misma superficie soporte (plano) para 3 Aplicaciones Normal distintas.

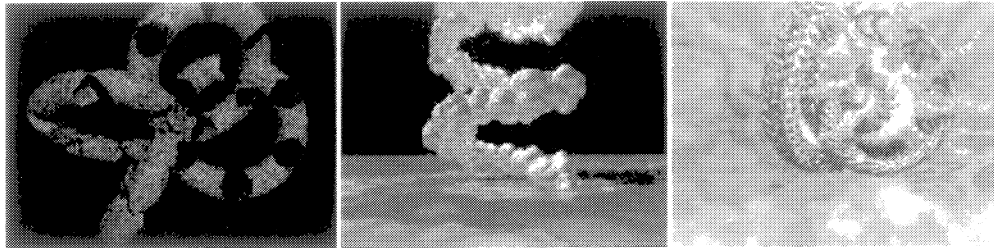


[Img.9]: Espejismo en el elipsoide; todas las bolas son lisas; un mar “plano”.

4.2 GEOMETRÍA SÓLIDA CONSTRUCTIVA

Para terminar con los [OB] unas pocas líneas sobre lo que se conoce por *Geometría Sólida Constructiva, GSC*. La *GSC* consiste en crear objetos complejos combinando objetos básicos vía 3 operaciones primarias: unión, intersección y diferencia. Estas operaciones se aplican sobre las superficies de los [OB]. A su vez los objetos así obtenidos podrían recombinarse entre ellos y con otros [OB] para conseguir objetos aún más complejos. Podríamos decir que los [OB] serían los átomos que gracias a la *GSC* dan lugar a moléculas más y más complejas. Mucho habría que hablar, comenzando por aclarar ciertos conceptos sobre el funcionamiento de las operaciones de intersección y diferencia, pero no es momento de entrar en detalles puesto que el estudio de la *GSC* queda lejos del objetivo de estas líneas.

Empleando esta técnica podríamos conseguir desde la simple conglomeración geométrica,



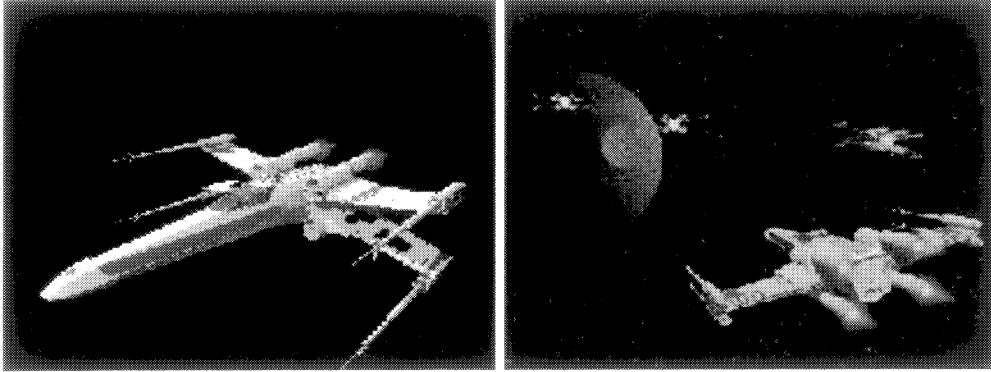
[Img.10]: (a) Uniones, intersección y diferencias aplicadas sobre toros; (b) Esferas y más esferas; (c) ¿ Cuántos toros aparecen en la imagen ?

pasando por la recreación del arte arquitectónico,



[Img.11]: (a) Imaginar un templo; (b) Recrear el Partenon; (c) Visitar un palacio.

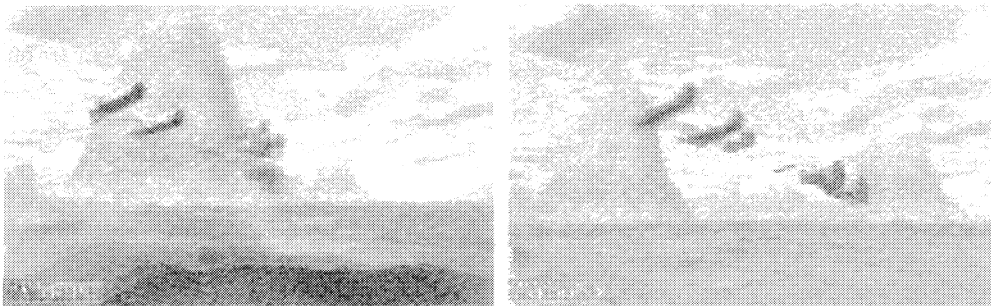
hasta llegar, como no podía ser de otra forma, a la ciencia ficción.



[Img.12]: Combinando objetos básicos se define un objeto complejo. Una vez definido uno, clonamos.

5. MAS ALLÁ DEL LÍMITE

Llegamos al final. Analizando la construcción de nuestro espacio E , recordemos que en el fondo no es más que un espacio afín en el que cada elemento está perfectamente ubicado y localizado por sus componentes, con lo que no parece nada complicado, por ejemplo, hacer que un $[OB]$ se traslade de un punto a otro punto del espacio siguiendo una trayectoria y permitir que la cámara siga esa trayectoria tomando una "fotografía" a cada pequeño cambio. Todas esas imágenes en secuencia perderían su interés por separado para que fuese su conjunto el que recupera, elevado a la n -ésima potencia, todo el interés. Habríamos dejado de tener fotografías para conseguir fotogramas; esto es, habríamos conseguido una secuencia de una animación. Y de ahí en adelante...





[Img.13]: Secuencia de una animación realizada empleando las técnicas aquí descritas.

6. REFERENCIAS

- 1) Alan Watt. *3D Computer Graphics*. Addison-Wesley.
- 2) Georg Glaeser. *Fast Algorithms for 3D-Graphics*. 1994. Springer-Verlag.
- 3) Foley J. D. and Van Dam A. (1982). *Fundamentals of interactive Computer Graphics*. Reading MA: Addison-Wesley.
- 4) Foley J. D. and Van Dam A, Feiner S. K. and Hughes J. F. (1989). *Computer Graphics- Principles and Practice*. Reading MA: Addison-Wesley.
- 5) Recomendado: <http://www.povray.org/>.

7. REFERENCIAS IMÁGENES

[Img.7]: (a) Imagen obtenida empleando código fuente desarrollado por Chris Colefax

<http://www.geocities.com/SiliconValley/Lakes/1434/>.

[Img.11]: Imágenes presentadas por (b) Andrew Krukov, nr@aha.ru, y (c) Nathan O'Brien, no13@ozemail.com.au, en un reciente concurso internacional de raytracing.

[Img.12]: Imagen obtenida empleando código fuente desarrollado por Dylan M Beattie

<http://www.ecs.soton.ac.uk/~dmb197/starwars/starwars.html>.

[Img.13]: Animación creada por Howard Earl Day, PovRayGuy@aol.com, empleando técnicas aquí descritas, presentada en una reciente competición infográfica internacional.