La teoría de nudos en el siglo XX

por

María Teresa Lozano Imízcoz, Universidad de Zaragoza

1. Introdución

Las palabras nudos, enlaces y trenzas designan objetos cotidianos que el hombre ha utilizado desde los tiempos más antiguos. Su utilidad práctica no necesita explicación. Es bien conocido que los marinos han ideado distintas clases de nudos para sus necesidades, a los que han denominado con nombre propio. Pero también han servido como adorno ornamental e incluso somo sistema de numeración. En *La crónica de Perú* escrita por Pedro de Cieza de León (Sevilla 1553), se describe con asombro como los Incas utilizaban *quipus*, que eran largas cuerdas con nudos, que usaban para llevar sus cuentas y calcular en sus transacciones comerciales. Parece ser que incluso eran capaces de recordar acontecimientos pasados porque estaban escritos de alguna manera en los quipus.

Sin embargo, el significado y estudio de nudos, trenzas y enlaces como objetos matemáticos es relativamente reciente. Probablemente el primer científico que utilizó un concepto directamente relacionado con lo que hoy entendemos por enlace matemático, fué Gauss (1777-1855), al considerar espiras enlazadas y utilizar su número de enlace en la fórmula que describe el campo magnético inducido. Además de Gauss citemos entre los precusores de la Teoría de nudos a Listing, Tait y Kelvin. Recordemos brevemente en que contexto usaron estos conceptos. Cuando Kelvin conoció el trabajo de Helmholz, traducido por Tait, sobre vórtices enlazados en un fluido ideal (1859), creyó en la idea de una materia constituida por átomos vórtices, enlazados y anudados, viviendo en un medio fluido ideal llamado éter. Por esta razón las primeras tablas de nudos y enlaces estaban pensadas como una tabla de elementos químicos. Pero todos los estudios de nudos y enlaces anteriores al siglo XX pertenecen a la prehistoria de esta disciplina.

De hecho la *Teoría topológica* de nudos empieza a tener importancia a partir de los años 20 con las aportaciones del matemático Alexander. Debemos de citar también a Dehn (1910, 1914), Reidemester (1932), Seifert, Shubert y Fox como principales impulsores en esos primeros años. En 1970 nace la *Teoría combinatoria* de nudos donde destacan de manera especial Connway, Jones y Kauffman. A partir de los trabajos de Thurston y Ryley en 1986 surge una nueva rama conocida como *Teoría geométrica* de nudos. Estas tres ramas (topológica, combinatoria y geométrica) son activos campos de investigación en la actualidad con variadas aplicaciones a otros campos científicos.

2. Conceptos básicos

El concepto matemático de nudo es una abstracción de la siguiente imagen física: Se toma un trozo de cuerda, se anuda, y despues se identifican los extremos de tal manera que no podamos distinguir donde se ha realizado ese pegado. El resultado es una cuerda circular anudada. Es decir, si nos imaginamos que podemos caminar dentro de la cuerda, y partiendo de un punto concreto, elegimos un sentido de marcha, al cabo de cierto tiempo volveríamos a pasar por el mismo punto, independientemente de que el anudamiento realizado sea más o menos complicado. Matemáticamente, no tiene importancia que la cuerda sea más o menos gruesa ni más o menos larga. Lo importante es que es una linea cerrada. Es decir, para un topólogo, es una circunferencia en el espacio. Recordar que un topólogo está interesado en las propiedades de los objetos que permanecen por deformaciones que no impliquen cambios drásticos como son cortar o pegar. Para un topólogo la propiedad que identifica una circunferencia es la de ser una curva cerrada, en el sentido anterior. Podemos definir un **nudo** (matemáticamente) como una aplicación

$$k : S^1 \longrightarrow \mathbb{R}^3\, \acute{o}\, S^3, \qquad K = k(S^1)$$

continua e inyectiva que es un homeomorfismo en la imagen, es decir como una manera de encajar una circunferencia en el espacio. Toda modificación que se realice sin cortar ni volver a pegar la cuerda que lo representa producirá un nudo equivalente. Esta relación de **equivalencia** se traduce matemáticamente en la existencia de una isotopía entre el nudo inicial K y el nudo final K', es decir una homotopía

$$\begin{array}{rcl} H : S^3 \times [0,1] & \longrightarrow & S^3 \times [0,1] \\ (p,t) & \rightarrow & (h_t(p),t) \end{array}$$

donde cada h_t es homeomorfismo, $h_0 = 1_{S^3}$ y $h_1(K) = K'$.

Dejando caer una cuerda anudada sobre la mesa, se obtiene de una manera natural una representación bidimensional del nudo. Entonces los nudos se representan mediante proyecciones en un plano. Nos referiremos solo a nudos que admiten alguna proyección regular, que es aquella que solo tiene un número finito de puntos dobles (cruces) como puntos singulares. Se distingue el tramo superior en un cruce marcándolo con trazo continuo, a diferencia del tramo inferior que se dibuja cortado. Una proyección regular de un nudo se denomina **diagrama**. La figura 1 muestra diagramas de algunos nudos.

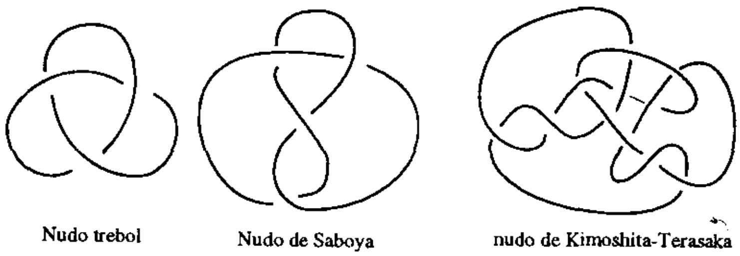

Figura 1

La disciplina llamada Teoría de Nudos estudia también enlaces. Responde a la realidad física de varias cuerdas cerradas, que pueden estar anudadas y a la vez enlazadas unas con otras. Un **enlace** L de n componentes es un encaje de n de circunferencias disjuntas en el espacio.

$$l : \sqcup_{i=1}^{n} S^1 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \text{ ó } S^3, \qquad L = l(\sqcup_{i=1}^{n} S^1)$$

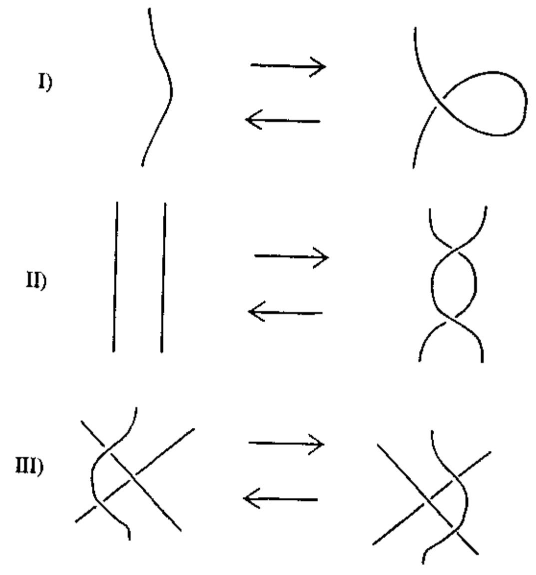

Figura 2

Un nudo es entonces un enlace con una sola componente. Dos enlaces son equivalentes si existe una isotopía entre ellos. Esta relación de equivalencia se traslada a sus digramas mediante el siguiente resultado de Reidemester:

Dos diagramas representan enlaces equivalentes si y solo si se puede pasar de uno a otro por un número finito de transformaciones de tipo I, II y III, representadas en la figura 2.

En la figura 3 se muestran dos diagramas equivalentes de los dos enlaces más conocidos, el de Whitehead y el de Borromeo.

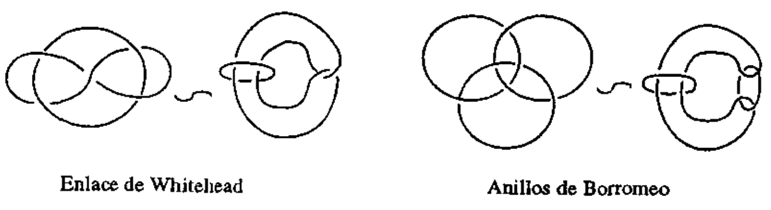

Figura 3

3. Clasificación e invariantes

El principal problema que se plantea en Teoría de Nudos es la clasificación de nudos y enlaces. Un nudo que admite un diagrama sin cruces es el nudo trivial. Queremos, en particular, saber si un diagrama concreto corresponde o no al nudo trivial. Esto puede ser a veces muy complicado de averiguar utilizando las transformaciones de Reidemester. La búsqueda de métodos matemáticos que permita diferenciar unos enlaces de otros y distinguir los que están realmente anudados de los que no lo están, es tema principal de esta rama de la topología. Para avanzar en este problema de clasificación, se buscan lo que denominamos **invariantes** de nudos y enlaces. Son objetos calculables de un enlace, que tienen el mismo valor para todos los posibles enlaces representantes de la misma clase de equivalencia. Los invariantes pueden ser de distinta naturaleza. Por ejemplo, el *número de componentes de un enlace* es un invariante numérico. Este es un invariante muy débil, de hecho vale 1 para todos los nudos.

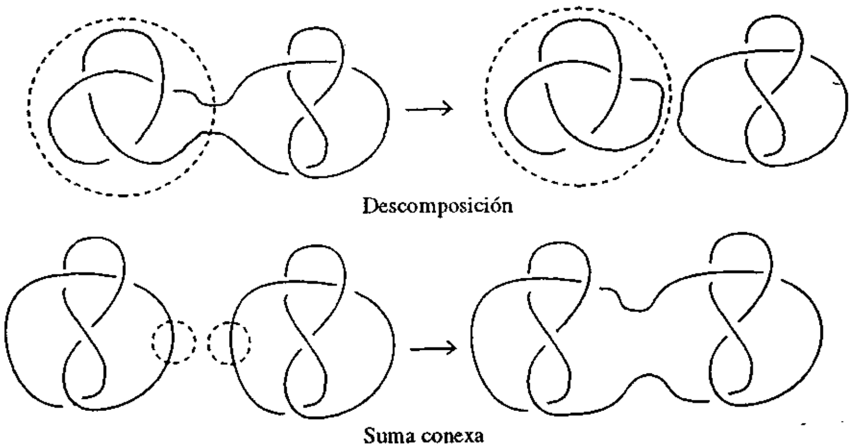

Figura 4

Por otra parte, es natural investigar si existe un procedimiento para descomponer un nudo en nudos más simples, y estudiar entonces estas nuevos nudos. En la figura 4 se descompone un nudo mediante una esfera que corta transversalmente al nudo en exactamente dos puntos. Los arcos del nudo que quedan a ambos lados de la esfera se unen por un arco próximo a la esfera para producir sendos nudos. Un nudo para el que no existe una descomposición de ese tipo en dos nudos no triviales se dice que es un nudo primo. Cualquier nudo no primo se obtiene por una operación inversa a la descomposición, llamada *suma conexa*, a partir de un conjunto finito de nudos primos. Esta operación dota al conjunto de los nudos de una estructura de semigrupo. Existe elemento neutro, que es el nudo trivial. La operación es asociativa. Pero no existe elemento inverso. Es decir, que no existe manera de deshacer un nudo, mediante suma conexa de otros nudos. La demostración de este hecho no es trivial.

3.1. Invariantes numéricos

Número de componentes de un enlace

Citado anteriormente.

El mínimo número de cruces de un nudo o enlace

Si designamos con $c(D)$ el número de cruces de un diagrama D, definimos el número de cruces $c(K)$ de un nudo K, como el mínimo valor de $c(D)$ para todos los posibles diagramas D del nudo K. Es claro que el único nudo con $c(K) = 0$ es el nudo trivial. De hecho el nudo trivial es el único nudo que admite diagramas con 1 ó 2 cruces. La siguiente tabla contiene el número de nudos primos distintos, $n(c)$, que hay con un determinado número, c, mínimo de cruces.

$n(1) = 0$	$n(6) = 3$	$n(11) = 552$
$n(2) = 0$	$n(7) = 7$	$n(12) = 2.176$
$n(3) = 1$	$n(8) = 21$	$n(13) = 9.988$
$n(4) = 1$	$n(9) = 49$	
$n(5) = 2$	$n(10) = 156$	

En esta tabla no se ha distinguido entre un nudo y su imagen en el espejo. Donde la imagen en el espejo se obtiene cambiando en cada cruce de un diagrama del nudo los pasos superiores por pasos inferiores y viceversa, los pasos inferiores por pasos superiores. A veces un nudo es equivalente a su imagen en el espejo (nudos anfiqueirales), pero no es siempre ese el caso. El único nudo de 4 cruces, también llamado *ocho ó nudo de Saboya*, es un nudo anfiqueiral como se demuestra en la figura 5. El nudo de tres cruces, conocido como nudo *trébol*, no es anfiqueiral como veremos más adelante.

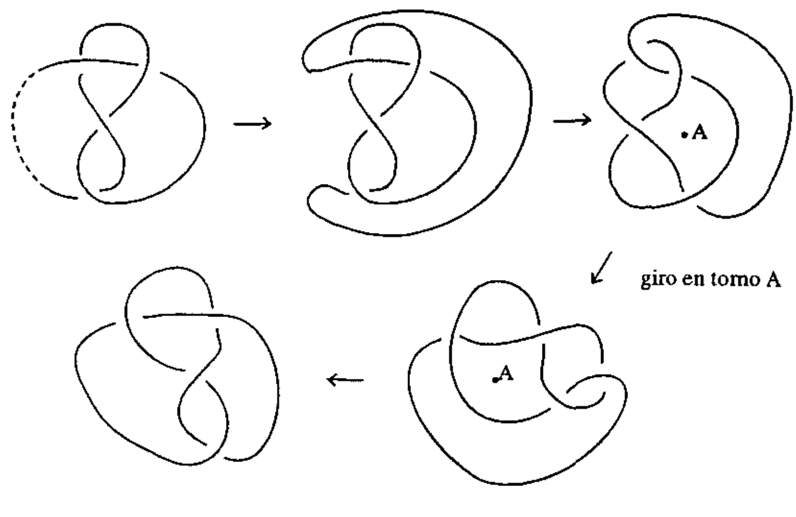

Figura 5

El número gordiano de un nudo

Es el mínimo número de cruces que hay que cambiar en un nudo para obtener el nudo trivial. La figura 6 demuestra que este número es 1 para el nudo trébol y el nudo de Saboya. Este invariante no es fácil de calcular en general. Si cambiando en un diagrama de un nudo K, s cruces obtenemos una proyección del nudo trivial, solo podemos asegurar que su número gordiano es menor o igual que s.

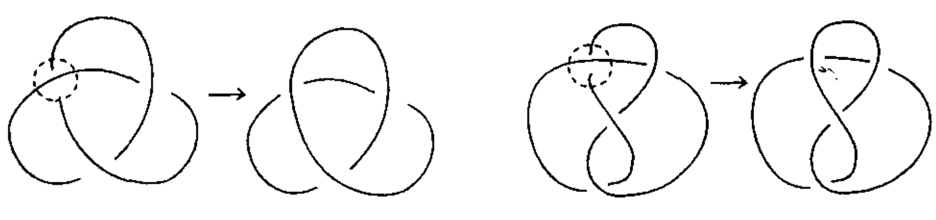

Figura 6

El género de un nudo

Seifert probó que cada nudo o enlace es el borde de alguna superficie orientable compacta encajada en el espacio, estas superficies se denominan superficies de Seifert del nudo o enlace. El nudo trivial es el único nudo que bordea un disco encajado en el espacio. Se define como género de un nudo K y se denota por $g(K)$, al mínimo género de todas sus superficies de Seifert. Este invariante es aditivo para la suma conexa y su valor es 1 solamente para el nudo trivial. De estas dos propiedades del género de un nudo se deduce que la suma conexa es una operación que no admite inverso.

3.2. Invariantes topológico-algebraicos

Otro tipo de invariantes se obtiene de la topología del complemento: Hasta este momento hemos considerado los nudos y enlaces en el espacio euclideo tridimensional, $\mathbb{R}^3$ (una variedad abierta) o en S^3 indistintamente. Por razones técnicas es más útil pensar que los nudos y enlaces están en la esfera S^3, que es una variedad compacta, compactificación de $\mathbb{R}^3$ con un punto en el infinito. Cada nudo o enlace, L, determina totalmente su *complemento* en la esfera S^3. Esta es una variedad abierta de dimensión 3 $C(L) = S^3 - L$. El *exterior* del enlace $E(L) = S^3 - N(L)$, resultado de quitar en S^3 un entorno abierto $N(L)$ del enlace, es una variedad de dimensión 3 compacta. Todo invariante del complemento o del exterior es un invariante del enlace. Es de destacar que ningun invariante del complemento o del exterior, que no considere orientación, puede distinguir entre un nudo y su imagen en el espejo. El primer invariante del complemento (o exterior) es su grupo fundamental, que se denomina **grupo del enlace**, $G(L) = \pi_1(C(L))$. Existen algoritmos que producen una presentación del grupo a partir de un diagrama. El grupo del enlace es un invariante topológico-algebraico. Decir si dos diagramas corresponden al mismo enlace usando su grupo es una tarea casi imposible, puesto que es muy díficil averiguar si dos presentaciones distintas corresponden al mismo grupo. Sin embargo, usando representaciones puede, en muchos casos, demostrarse que se trata de grupos distintos y por tanto de enlaces distintos. Del cálculo y uso de este tipo de invariantes es de lo que trata la Topología Algebraica. En teoria de Nudos, usamos Topología Algebraica sencilla para resolver problemas topológicos, como reconocimiento y clasificación.

3.3. Invariantes polinómicos

Polinomio de Alexander

En 1928, el matemático Alexander, probablemente estudiando la topología del complemento de un nudo, K, encontró un polinomio de Laurent en una variable t (con potencias positivas y negativas), que resultó ser un invariante del nudo. Sin embargo en su trabajo solo utiliza álgebra lineal, determinantes, y jugadas de Reidemester. Es conocido como polinomio de Alexander y denotado por $\Delta_K(t)$.

Este polinomio tiene un claro significado geométrico relacionado con la homología del espacio recubridor cíclico infinito del exterior:

Sea

$$p : \overline{X} \longrightarrow E(K)$$

el espacio recubridor cíclico infinito del exterior del nudo K. El polinomio de Alexander $\Delta_K(t)$ es el polinomio mínimo de una presentación del primer grupo de homología, $H_1(\overline{X})$, de $\overline{X}$ como $Z[t, t^{-1}]$-módulo, donde t genera el grupo de transformaciones recubridoras.

Poco despues Fox desarrollo el *cálculo diferencial libre*, técnica que sirve para calcularlo directamente de la presentación del grupo del nudo. El descubrimiento de este polinomio fué un importante avance en Teoría de Nudos, puesto que es un invariante calculable y bastante potente. El polinomio de Alexander del nudo trivial es 1, pero también hay nudos no triviales, como el conocido nudo de Kinoshita-Terasaka de la figura 1 que tienen polinomio de Alexander 1. Luego no es un invariante completo.

Polinomio de Conway

Al principio de los años 60, el uso del ordenador como un eficiente instrumento de cálculo, indujo a los investigadores a buscar nuevos algoritmos para calcular los invariantes conocidos. Este es lo que hizo J.H. Conway, definiendo un nuevo polinomio de Laurent, $\nabla_L(z)$, para un enlace orientado, que está determinado por una simple definición recursiva basada en tres axiomas:

1) Si O designa el nudo trivial, entonces $\nabla_O(z) = 1$.

2) Denotemos por D_+, D_-, D_0 tres diagramas que coinciden fuera de una bola, y en cuyo interior difieren como indica la figura 7. Los enlaces representados por los diagramas los designamos por L_+, L_-, L_0 respectivamente. Entonces sus polinomios están relacionados por la siguiente ecuación:

$$\nabla_{L_+}(z) - \nabla_{L_-}(z) = \nabla_{L_0}(z).$$

3) $\nabla_L(z) = \nabla_{L'}(z)$ si los enlaces L y L' son equivalentes.

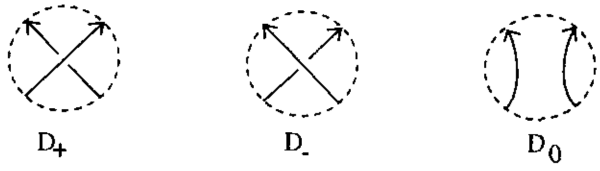

Figura 7

Si partimos de un nudo K, lo orientamos y calculamos su polinomio de Conway utilizando estos tres axiomas, el resultado es independiente de la orientación elegida. Esto significa que el polinomio de Conway de un nudo es un invariante del nudo. En realidad este polinomio de Conway está relacionado con el de Alexander por un cambio de variable.

$$\Delta_K(t) = \nabla_L(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}})$$

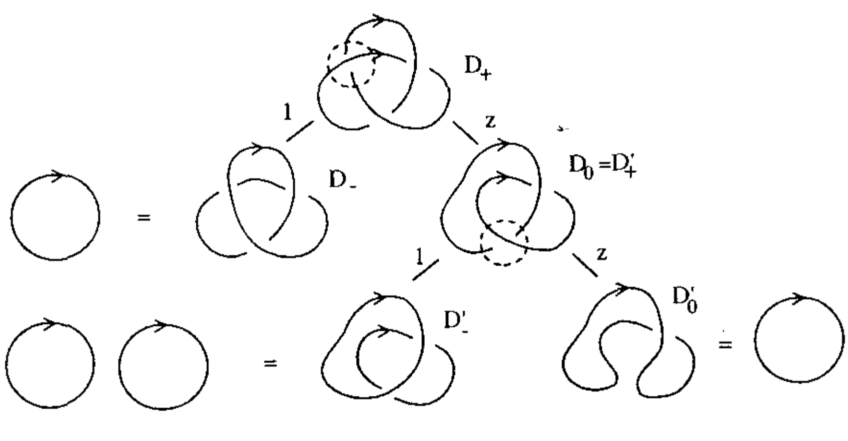

Figura 8

La figura 8 muestra, como ejemplo, un árbol que permite calcular el polinomio de Conway del trébol.

$$\begin{aligned}\nabla_K(z) &= 1\nabla_O(z) + z\nabla_{OO}(z) + z^2\nabla_O(z) = (1+z^2)\nabla_O(z) + z.0 \\ &= (1+z^2)\end{aligned}$$

Polinomio de Jones

Este pudo haber sido el principio de lo que hoy conocemos como Teoría Combinatoria de Nudos, si algún investigador hubiera tenido la idea de cambiar ligeramente el segundo axioma introduciendo nuevas variables. Pero esto sucede mucho más tarde, tras el descubrimiento de un nuevo polinomio por V. Jones en 1984. El hecho tuvo una gran difusión en el mundo científico y comenzaron a encontrarse nuevos invariantes combinatorios de nudos y enlaces, asi como aplicaciones desconocidas hasta entonces de la Teoria de Nudos a otras ciencias. El trabajo de V. Jones abrió nuevas lineas de investigación en diversos campos, y le hizo merecedor de la madalla Fields, el máximo galardón que se concede a jóvenes investigadores matemáticos, en el Congreso Internacional de Matemáticas celebrado en Kyoto en 1990.

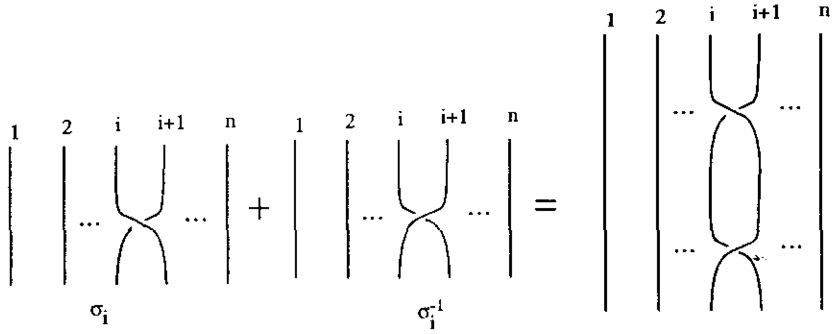

Figura 9

V. Jones trabajaba en mecánica estadística, y estudió ciertas funciones traza de C^*-álgebras. Observó que podía encontrar representaciones del grupo de trenzas en C^*-álgebras. Una n-trenza es un conjunto de n arcos disjuntos que unen n puntos en un plano $z = a$ con sus proyecciones en otro plano paralelo $z = b$, de tal manera que ningun arco presenta máximos o mínimos. Las trenzas se pueden componer como indica la figura 9, donde tambien se muestran diagramas de las trenzas elementales σ_i y σ_i^{-1}, $i = 1, ..., n-1$. Se observa que el conjunto de n-trenzas forma un grupo, llamado tambien grupo de Artin, B_n, generado por las trenzas elementales. Una trenza produce un nudo o enlace si se añaden arcos que unen los puntos extremos en el plano $z = a$ con los del plano $z = b$ sin introducir nuevos cruces en su diagrama. Por otra parte todo nudo o enlace se puede poner como una trenza, aunque no de manera única. Existe un conjunto de jugadas, llamadas jugadas de Markov, que permiten pasar de una trenza a otra que represente el mismo enlace. Pues bien V. Jones probó que la asignación de cierto polinomio a cada trenza, era invariante por jugadas de Markov, con lo que se obtiene un invariante de enlaces. Inmediatamente se demostró que cumplía una propiedad que puede utilizarse como axioma (2) para su definición. El axioma (1) es de normalización. Así el polinomio de Jones de nudo o enlace orientado, $V_L(t)$, cumple los siguientes axiomas:

1) $V_O(t) = 1$
2)

$$\frac{1}{t}V_{L_+}(t) - tV_{L_-}(t) = \left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right) V_{L_0}(t).$$

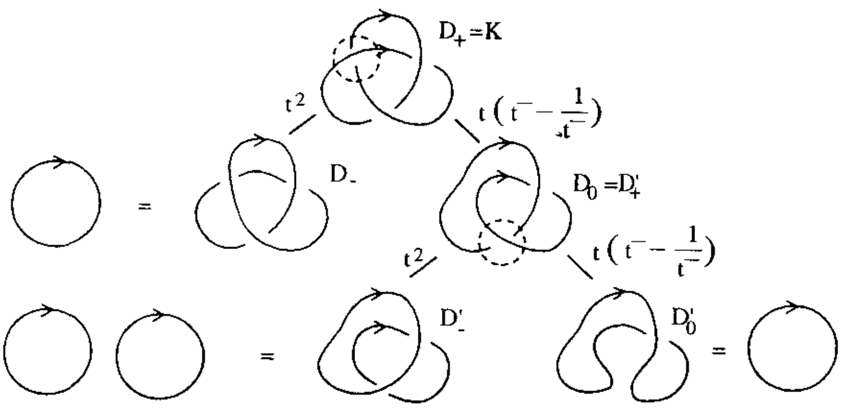

Figura 10

De estos axiomas se puede deducir que el polinomio no cambia por jugadas de Reidemester. Luego puede ser tratado y calculado de forma análoga al polinomio de Conway o de Alexander. En un principio se pensó que podía estar también relacionados con ellos por un cambio de variable. Pero es fácil comprobar, por la simetría del axioma 2, que el polinomio de Jones de la imagen en un espejo de un nudo es el polinomio de Jones del nudo inicial cambiando t por t^{-1}. Esto implica que un nudo anfiqueiral tiene un polinomio de Jones invariante por la transformacón $t \to t^{-1}$, digamos simétrico. Y reciprocamente que si un nudo tiene un polinomio de Jones no simétrico, el nudo no es anfiqueiral y además el polinomio de Jones distingue este nudo de su imagen en el espejo. Este es el caso del nudo trébol, K, cuyo polinomio de Jones se cálcula a partir del árbol de la figura 10, análogo al de la figura 8.

$$
\begin{aligned}
V_K(t) &= t^2 V_O(t) + t^3\left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right) V_{OO}(t) + t^2\left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right)^2 V_O(t) \\
&= t + t^3 - t^4.
\end{aligned}
$$

El polinomio de Jones del nudo K^*, imagen en el espejo de K, es

$$V_{K^*}(t) = t^{-1} + t^{-3} - t^{-4}.$$

Este es el primer invariante conocido que distingue el trébol a derecha del trébol a izquierda. Tampoco el polinomio de Jones es un invariante completo. Pronto se comprobó que algunos nudos con el mismo polinomio de Alexander, tienen también el mismo polinomio de Jones. Luego el nuevo polinomio no es tampoco un invariante completo. Pero cabe preguntarse: ¿ es el polinomio de Jones un invariante más fuerte que el polinomio de Alexander?. La respuesta se obtiene observando que existen parejas de nudos con distinto polinomio de Alexander, luego nudos distintos, que sin embargo tienen el mismo polinomio de Jones. Entonces se concluye que los polinomios de Alexander y de Jones, son invariantes distintos.

Polinomio HOMFLY

Varios especialistas en Teoría de nudos descubrieron independientemente, pero casi al mismo tiempo, que ambos polinomios son caso especial de un invariante combinatorio más general definido para enlaces orientados ó nudos no orientados, por dos axiomas análogos, pero introduciendo dos variables, v, z, en lugar de una. Se le llamó polinomio HOMFLY, palabra formada por las iniciales de los matemáticos que lo definieron, y de designa por $P_K(v, z)$. Los axiomas de definición son los siguientes:

1) $P_O(v, z) = 1$
2)

$$\frac{1}{v}P_{L_+}(v, z) - v\, P_{L_-}(v, z) = z\, P_{L_0}(v, z).$$

Su relación con los polinomios anteriores esta dada por:

$$
\begin{aligned}
V_K(t) &= P_K(t, \sqrt{t} - \tfrac{1}{\sqrt{t}}) \\
\nabla_K(t) &= P_K(1, \sqrt{t} - \tfrac{1}{\sqrt{t}})
\end{aligned}
$$

También está probado que $P_K(v, z)$ no es un invariante completo del nudos, de hecho está probado que siempre que se defina un polinomio por axiomas del tipo combinatorio utilizado en los polinomios descritos, siempre existira una pareja de enlaces distintos con el mismo polinomio.

Estos invariantes abrieron una nueva rama en la Teoría de nudos, la Teoría combinatoria de nudos, donde hoy investigan gran número de matemáticos y donde los avances se producen a gran velocidad. Buscan nuevos invariantes combinatorios, sus relaciones, problemas que resuelven, etc. Si hay que destacar a alguien, es justo decir que las ideas más originales, y los avances más novedosos en esta nueva rama de las Matemáticas son debidas a Louis Kauffman que ha escrito varios libros y numerosos artículos sobre estos temas. Realmente Louis Kauffman trabajaba ya en Teotía de nudos desde el punto de vista combinatorio desde los años 70, pero este enfoque no despertaba todavía mucho interés. Sus recientes incursiones con teoria de nudos a distintas ramas de la física han sido fructíferas para las dos vertientes: la teoría de nudos y las teorías físicas.

4. Avances recientes en problemas clásicos de teoría de nudos

Usando los nuevos polinomios de nudos se ha conseguido probar conjeturas establecidas por Tait en el siglo pasado referentes a nudos alternantes. Citaremos algunas como ejemplo. Un diagrama de un enlace es alternante si cuando se recorre cada componente del enlace K_i a partir de cualquier punto fijo $P_i \in K_i$ y en uno de los dos posibles sentidos, se atraviesan los cruces alternativamente por encima y por debajo. Un enlace es alternante si tiene un diagrama alternante. Muchos nudos y enlaces de las tablas son alternantes. El nudo trébol y el de Saboya de la figura 1 son alternantes, mientras que el diagrama del nudo de Kinoshita-Terasaka de la figura 1 no lo es. Siempre se sospechó que un diagrama alternante reducido (sin cruces obviamente superfluos) correspondía a un enlace no trivial. Pero la prueba rigurosa de este hecho solo se ha conseguido utilizando la relación existente entre el grado total (máximo grado menos mínimo grado) del polinomio de Jones y el número de cruces del diagrama. Concretamente se ha probado que *un diagrama alternante reducido de un enlace realiza el mínimo número de cruces del enlace, luego dos diagramas alternantes reducidos del mismo enlace, tienen el mismo número de cruces.*

Otro viejo problema de Tait probado con los mismos métodos es que *un nudo alternante cuyo número mínimo de cruces es impar, nunca puede ser anfiqueiral.*

Un interesante problema abierto es buscar el significado geométrico ó topológico de las variables de estos invariantes polinómicos, e incluso de los mismos polinomios, a semejanza de la estructura topológica que dió origen al polinomio de Alexander. Un intento de este tipo lo ha realizado Witten usando lazos de Wilson, en una interpretación no muy bien entendida por los topólogos.

5. Aplicaciones de la Teoría de nudos

5.1. Los nudos construyen todas las variedades de dimensión 3

Una variedad de dimensión tres es un espacio topológico en el que cada punto tiene un entorno que es homeomorfo a un bola de dimensión 3. Las variedades tridimensionales más conocidas son: $\mathbb{R}^3$, y la esfera de dimensión tres, S^3, pero hay muchas más. El espacio en que vivimos es una variedad de dimensión tres, M^3. Como solo podemos conocer una pequeña porción de esta variedad, y localmente todas las variedades de dimensión tres son iguales, no podemos asegurar como es globalmente la variedad de habitamos. De hecho el estudio y clasificación de las variedades tridimensionales es actualmente un activo campo de investigación. Existen varias maneras de construir todas las 3-variedades. Algunas de ellas utilizan nudos y enlaces en S^3.

Cirugía de Dehn en un nudo en S^3

El proceso de cirugía de Dehn en un nudo K de S^3 consiste en identificar el borde del exterior del nudo $E(K) = S^3 - N(K)$ con el borde de un toro sólido $D^2 \times S^1$ de acuerdo con una fracción que se denomina el coeficiente de la cirugía. Es decir, se trata de quitar en S^3 un toro sólido y volverlo a pegar de otra manera. La cirugía en un enlace es hacer simultaneamente cirugía en cada una de sus componentes. Un resultado probado independientemente por Lickorish y Wallace asegura que *toda variedad cerrada se obtiene por cirugía en un enlace.*

Espacios recubridores ramificados sobre enlaces en S^3

Un espacio recubridor de S^3 ramificado sobre un enlace L es una aplicación

$$p : M^3 \longrightarrow S^3$$

tal que fuera del enlace es un espacio recubridor, y en el entorno del enlace se comporta localmente como el cociente por la acción de un grupo cíclico que tiene los puntos del enlace como puntos fijos. Es decir

$$p|_{M^3 - p^{-1}(L)} : M^3 - p^{-1}(L) \longrightarrow S^3 - L$$

es espacio recubridor, y para cada $y \in p^{-1}(L)$ existe un entorno $D^2 \times I$ tal que para algun n, $p(z,t) = (z^n, t)$, donde $(z,t) \in D^2 \times I$. Alexander estableció que *cada variedad de dimensión tres cerrada se obtiene como espacio recubridor de* S^3 *ramificado sobre un enlace.*

En estas construcciones tiene especial interés las estructuras Riemannianas que existen en S^3 con los enlaces y nudos como curvas singulares. El interés radica en que estas estructuras geométricas se trasladan a todas las variedades de dimensión tres via el método de construcción utilizado, y en ocasiones sirve para encontrar interesantes invariantes de las variedades. De las estructuras Riemannianas que existen en S^3 con los enlaces y nudos como curvas singulares se ocupa la Teoría geométrica de nudos, nueva rama de la Teoría de nudos, también de gran actualidad, y en franco desarrollo.

Citemos que Reshentikhin y Turaev utilizaron grupos cuánticos para construir ciertos invariantes de variedades tridimensionales obtenidas por cirugía en enlaces de S^3, a partir del polinomio de Jones. Estos invariantes han interesado también a los físicos.

5.2. Nudos en física

Witten, también medalla Fiels en 1990, ha vertido estas ideas a la Teoría cuántica de campos, definido un invariante de enlaces, (utilizando integrales formales tipo Feymman), y un invariante de 3-variedades asociado que está relacionado con el de Reshentikhin y Turaev. Con esto trata de dar un significado físico y geométrico al polinomio de Jones. [Knots and physics. Kauffman 1991]

Otra situación donde aparecen las trenzas de modo natural es en modelos de vértices de la mecánica estadística, que permite recuperar de las funciones de partición, el polinomio de Jones. Además se puede obtener un método general para construir nuevos invariantes combinatorios.

También interesa la teoría de nudos en mecánica de fluidos. Ya hemos recordado que Kelvin, creyó en la idea de una materia construida por átomos vórtices anlazados y anudados viviendo en un medio fluido llamado ether. En la actualidad también se trabaja en modelos con tubos vórtices anudados y enlazados y se define un nuevo invariante de fluidos denominado helicidad, relacionado con el número de enlace del enlace en cuestión.

5.3. Nudos en Biología

Recordemos como es la estructura básica de las moléculas de ADN, descubierta por F.H.C. Crick y J. D. Watson (lo que les hizo acreedores del Premio Nobel 1962). Esencialmente una molécula de ADN consta de dos tiras paralelas, como los bordes de una cinta, que forman una doble hélice en torno a un eje. Se ha establecido en biología molecular que las dobles hélices de ADN se anudan y se enlazan durante los procesos biológicos de recombinación y replicación. Esto se ha conseguido gracias al avance de la tecnología que ha mejorado la calidad y precisión de los datos biológicos y ha hecho posible observar los fenómenos bioógicos a escalas muy pequeñas.

Algunos equipos de investigación formados por biólogos y topólogos trabajan en la obtención de conexiones entre la estructura y función de de las moléculas de ADN y las propiedades topológicas de los nudos y enlaces que forman. En los estudios de laboratorio se trata de entender el papel de las distintas soluciones biológicas o enzimas en los procesos de réplica, transcripción y recombinación. Los enzimas llamados topoisomerasas alteran topológicamente el ADN por el procedimiento de cortar y pegar la doble hélice en el mismo sitio, pero alterando el nmero de enlace de las dos tiras. Es decir, cambia el rizo de la molécula. El resultado es un topoisómero del producto inicial. Otros enzimas (recombinasas) alteran el ADN cortando y pegando en extremos diferentes. Para identificar estas acciones los biólogos experimentan con moléculas circularesde ADN, es decir con nudos. Una reciente técnica experimental cubre el ADN con una substancia que engrosa y tensa la molécula de forma que puede ser observada por microscopio electrónico. Curiosamente las fotografias obtenidas por este procedimiento muestran nudos análogos a los diagramas dibujados en una tabla de nudos de un libro especializado. Esto permite clasificar las moléculas de ADN antes y despues de un proceso experimental, y por tanto determinar parte del mecanismo enzimático

6. Bibliografía básica comentada

Terminamos esta visión general citando solo algunos libros sobre nudos y enlaces que pueden servir para conocer distintas vertientes del tema.

The Ashley book of knots escrito por C. Ashley en 1944 y publicado por Doubleday and Company (Garden City, New York).

No es un libro de matemáticas, pero es un magnífico libro donde se dibujan y catalogan todo tipo de nudos. Trata de nudos marineros, ornamentales, prácticos, macramé,.... Se puede encontrar también anectotas históricas, trucos de magia y juegos donde intervienen nudos. Probablemente todos los matemáticos que trabajamos en el tema conocemos este libro, y de hecho utilizamos en muchos casos su nomenclatura.

Introduction to knot theory escrito por R.H. Crowell y R:H: Fox en 1963 y publicado por Ginn and Co. (New York).

Es uno de los libros clásicos sobre el tema. Tiene un alto contenido algebraico. En el se desarrolla el cálculo diferencial libre que permite obtener el polinomio de Alexander de un nudo a partir de una presentación de su grupo. Agotada la edición original, se reeditó en 1977 en Grad. Texts Math 57 de Springer Verlag (Berlin-Heidelberg-New York).

Knots and Links escrito por Dale Rolfsen y publicado en 1976 por Publish or Perish (Wilmington, U.S.A.).

Es la referencia básica y necesaria para encontrar todos los resultados conocidos en la fecha de publicación del libro. Como tiene bastante contenido topológico, su lectura ayuda a ejercitar la visión espacial y topológica. Contiene una tabla de nudos, utilizada por todos los especialistas.

Knots escrito por G. Burde and H. Zieschang, publicado en 1985 por Walter de Gruyter (Berlin-New York) en la serie Studies in Mathematics.

Es un libro que complementa al de Rolfsen. En él se da una cuidada y didáctica exposición de temas importantes de Teoría clásica de nudos. Contiene una completa bibliografía que incluye prácticamente todos los artículos publicados sobre nudos hasta 1985, clasificados por temas.

Knots and Physics escrito por L.H. Kauffman y publicado en 1991 por World Scientific (Singapore-New Yersey-London-Hong Kong).

Es básico en Teoría combinatoria de nudos. Contiene aplicaciones a la Física actual y en sus páginas se encuentran muchas ideas nuevas que ya están dando lugar a nuevos resultados de todo tipo.

Knot Theory and Its Applications escrito por K. Murasugi, publicado en 1996 por Birkhäuser (Boston-Basel-Berlin).

Es un libro introductorio, de agradable lectura que además de la Teoría clásica de nudos, contiene Teoría combinatoria de nudos y aplicaciones actuales.