

Curvas Fractales

por

Julián Aguirre

1 Introducción

En 1623, Galileo escribía:

“La filosofía está escrita en ese gran libro que es el Universo, siempre abierto ante nuestros ojos, pero imposible de leer salvo que uno aprenda a comprender el idioma en que está escrito. Ese idioma es el de las matemáticas, y sus caracteres son triángulos, círculos y otras figuras geométricas, sin las que es humanamente imposible entender una sola palabra; sin ellas, vagamos por un laberinto oscuro.”

Se exponen aquí algunas de las premisas básicas de la ciencia occidental moderna. Por una parte, para entender o simular la naturaleza es preciso dominar su idioma. Por otra, ese lenguaje es el de las matemáticas, y en su ámbito, la geometría —más concretamente la geometría euclídea— es el dialecto específico para describir y manipular las formas naturales.

Pero Galileo se equivoca en cuanto al dialecto en que se expresa la naturaleza. La incapacidad de la geometría euclídea para describir el mundo que nos rodea no se ha puesto de manifiesto hasta hace muy poco. Y, sin embargo, resulta obvio, como dice Mandelbrot en *The Fractal Geometry of Nature* que

“... Las nubes no son esferas, las montañas no son conos, las costas no son circulares, la corteza de un árbol no es suave y la luz no viaja en línea recta.”

El propio Mandelbrot concibió un nuevo dialecto, la *geometría fractal*, apropiado para la descripción de las irregularidades de la naturaleza y sus caracteres, los *conjuntos fractales* o simplemente *fractales*. En los últimos años su estudio se ha convertido en una nueva rama de las matemáticas, íntimamente conectada con las ciencias naturales y de la computación. Las imágenes fractales generadas por ordenador han encontrado un hueco en el diseño gráfico y en el cine, e iniciado una relación de las matemáticas con el arte. Es una pena no poder ofrecerlas aquí, pero el lector interesado podrá deleitarse con su contemplación en los libros [7] y [8].

Los fractales son, sin lugar a dudas, una invención moderna, pero tienen antecedentes en algunas construcciones “patológicas” de fines del siglo XIX y principios del XX, fundamentalmente curvas con propiedades contrarias a toda intuición. Es precisamente sobre esas curvas y algunas de sus propiedades sobre lo que trata este trabajo.

2 La función de Riemann



Georg Friedrich Bernhard Riemann
17 septiembre 1826, Breselanz, Hanover
20 julio 1866, Selasca, Italia

En 1875, Riemann propuso la función

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(n^2 \pi x)}{n^2} = \text{sen} \pi x + \frac{\text{sen} 4 \pi x}{4} + \frac{\text{sen} 9 \pi x}{9} + \dots \quad (6.1)$$

como un ejemplo de función continua que no es derivable en ningún punto, algo que repugnaba a algunos de sus contemporáneos. Sin embargo hoy sabemos que

casi todas —en el sentido de categoría de Baire— las funciones continuas no tienen derivada en ningún punto.

Es difícil hacerse una idea de la gráfica de una función así. En la figura 6.1 se muestra la de la función de Riemann junto a la cotización de bolsa del Banco Bilbao Vizcaya en un período de 1 año. Es un ejemplo de cómo un objeto fractal (la gráfica de la función de Riemann) puede describir un fenómeno real mejor que la geometría euclídea.

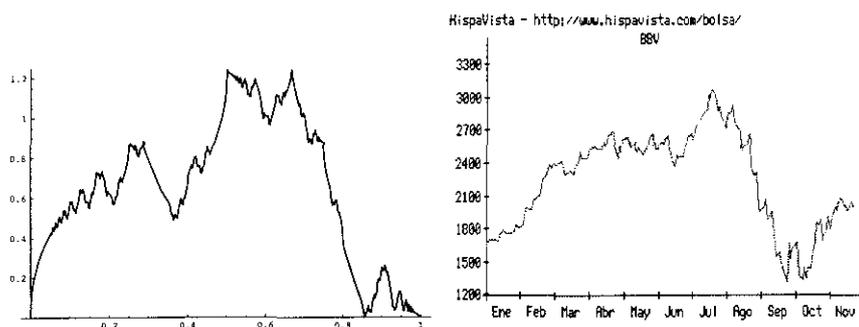


Figure 6.1: La función de Riemann y la cotización del BBV

La continuidad de f es evidente por ser una serie uniformemente convergente de funciones continuas, pero ni Riemann ni Weierstrass pudieron demostrar nada respecto de su derivabilidad. El primer logro se produce en 1916, cuando el matemático inglés G. H. Hardy demostró en un artículo publicado en *Transactions of the American Mathematical Society* que f no es derivable en los irracionales ni en los racionales de la forma

$$\frac{2n}{4m+1}, \quad \frac{2n+1}{4m+2}.$$

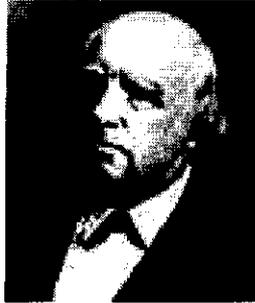
En 1970, casi un siglo después de que Riemann propusiera el ejemplo que hoy lleva su nombre, J. Gerver probó que existen infinitos puntos en los que f es derivable, concretamente los racionales de la forma

$$\frac{2n+1}{2m+1}, \quad \forall n, m \in \theta.$$

La historia termina con la publicación en 1998 de un trabajo de los españoles A. Córdoba y F. Chamizo (ver [2]), en el que estudian la familia de funciones

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(2\pi n^k x)}{n^k}, \quad k = 2, 3, \dots$$

3 La función de Weierstrass



Karl Theodor Wilhelm Weierstrass
31 octubre 1815, Ostenfelde, Bavaria
19 febrero 1897, Berlín

Weierstrass fue el primero en dar un ejemplo de una función continua en un intervalo, pero no derivable en ninguno de sus puntos. En 1872 definió la función

$$\sigma(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x). \quad (6.2)$$

Cuando $0 < a < 1$ la serie es uniformemente convergente, y por lo tanto σ es continua. Weierstrass demostró que no es derivable en ningún punto si

$$b \text{ es un entero impar y } ab > 1 + \frac{3\pi}{2}.$$

G. H. Hardy probó, en el mismo artículo citado anteriormente, que es suficiente tener

$$ab \geq 1.$$

La función de Weierstrass puede escribirse como

$$\sigma_{\omega, \alpha}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \omega^{-\alpha n} \cos(\omega^n x), \quad \omega > 1, \quad 0 < \alpha < 1.$$

El parámetro α mide la regularidad de la función $\sigma_{\omega, \alpha}$. De hecho $\sigma_{\omega, \alpha}$ es más que continua, es hölderiana de orden α : existe una constante $C > 0$ tal que

$$|\sigma_{\omega, \alpha}(x) - \sigma_{\omega, \alpha}(y)| \leq C |x - y|^\alpha$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}$. En la figura 6.2 está representada la función σ para $\omega = 2$ y dos valores distintos de α . El papel del parámetro ω es más difícil de apreciar.

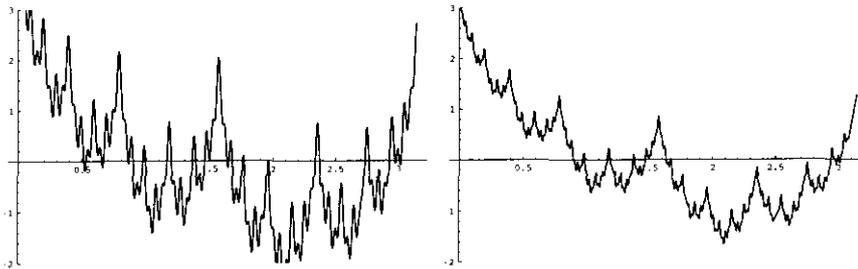


Figure 6.2: Las funciones $\sigma_{2,.25}$ y $\sigma_{2,.5}$

La función $\sigma_{\omega,\alpha}$ tiene una cierta propiedad de invarianza frente a un cambio de escala. Si la evaluamos en ωx , resulta

$$\sigma_{\omega,\alpha}(\omega x) = \omega^\alpha (\sigma_{\omega,\alpha}(x) - \cos x).$$

Es decir, al multiplicar la variable x por ω , la función queda multiplicada por ω^α , salvo un término adicional. B. Mandelbrot definió una nueva familia de funciones, derivadas de la de Weierstrass, de manera que no aparezca ese término adicional y sean realmente invariantes. La función de Mandelbrot es

$$\psi_{\omega,\alpha}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \omega^{-\alpha n} (1 - \cos(\omega^n x)).$$

Su regularidad es la misma que la de $\sigma_{\omega,\alpha}$, pero es invariante por un cambio de escala:

$$\psi_{\omega,\alpha}(\omega x) = \omega^\alpha \psi_{\omega,\alpha}(x). \quad (6.3)$$

Esta propiedad de la función ψ se traduce en una propiedad de su gráfica, conocida como *autoafinidad*. Si $\Gamma = \{ (x, \psi_{\omega,\alpha}(x)) : x > 0 \}$ es el grafo de $\psi_{\omega,\alpha}(x)$ y

$$A = \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega^\alpha \end{pmatrix},$$

entonces de (6.3) se sigue que

$$A \cdot \Gamma \subset \Gamma.$$

Es decir, el conjunto Γ contiene una copia afin de si mismo. Esta es una de las características de los conjuntos fractales: la *auto semejanza* (o en este caso *autoafinidad*).

4 La función de Takagi

En 1903, T. Takagi dio un ejemplo de función continua no derivable en ningún punto más sencillo que el de Weierstrass. Su construcción es muy semejante, pero



Teiji Takagi

21 abril 1875, Kazuya, Japón

20 febrero 1960, Tokyo

sustituye el coseno por la función *tienda de campaña*. En $[0, 1]$ se define como

$$T(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } 0 \leq x \leq 1/2, \\ 2 - 2x & \text{si } 1/2 < x \leq 1, \end{cases}$$

extendiéndose por periodicidad a todo \mathbb{R} . La función de Tagaki se define entonces como

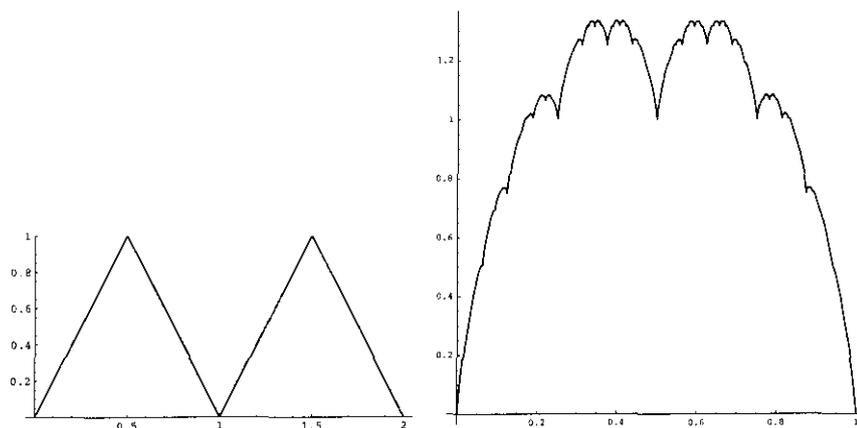
$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T(2^n x)}{2^n}.$$

Como T es acotada, la serie converge uniformemente y por lo tanto φ es continua. Una demostración de que no tiene derivada en ningún punto puede verse en el conocido libro de M. Spivak [9].

La gráfica de una suma parcial de la función de Tagaki

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{T(2^k x)}{2^k}$$

es lineal a trozos. La gráfica de S_{n+1} puede construirse a partir de la de S_n mediante un proceso conocido como *desplazamiento del punto medio*. Cada tramo de la gráfica de S_n es un segmento que se proyecta sobre el eje de abscisas en un intervalo de longitud $2^{-(n+1)}$. Tomamos el punto medio del segmento y lo desplazamos hacia arriba una altura 2^{-n} , obteniendo así dos nuevos segmentos, que están en la gráfica de S_{n+1} . Este procedimiento fue usado por Arquímedes para hallar el área comprendida entre un arco de parábola y su cuerda. Si el proceso se realiza en dos dimensiones y se usan desplazamientos aleatorios, se obtienen imágenes fractales

Figure 6.3: Las funciones T y φ

de paisajes artificiales. Así se realizaron, por ejemplo, algunas escenas de la película *Star Trek II*.

5 El conjunto de Cantor



Gerg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor
 3 marzo 1845, San Petesburgo
 6 enero 1918, Halle, Alemania

Además de idear la teoría de conjuntos, Cantor inventó —o tal vez debería decir descubrió— un conjunto que lleva su nombre y es la pesadilla de muchos estudiantes de topología. Para construirlo se parte del intervalo cerrado $C_0 = [0, 1]$, se divide en tres partes iguales y se elimina la de en medio, obteniendo un conjunto C_1 que es la unión de dos intervalos cerrados disjuntos de longitud $1/3$: $C_1 = [0, 1/3] \cup [2/3, 1]$. Con cada uno de los intervalos que forman C_2 se repite el mismo proceso, obteniéndose C_2 , que es la unión de 2^2 intervalos cerrados disjuntos

de longitud 3^{-2} . Iterando el proceso se construye una sucesión C_k de conjuntos cerrados formados por la unión de 2^k intervalos cerrados disjuntos de longitud 3^{-k} . La medida o longitud de C_k es por tanto $(2/3)^k$ y tiende a cero cuando k tiende a infinito.



Figure 6.4: Generación del conjunto de Cantor

El conjunto de Cantor es

$$C = \bigcap_{k \geq 0} C_k.$$

En principio parece un conjunto muy pequeño. De hecho su longitud es cero. Sin embargo tiene la cardinalidad del continuo, es decir, el mismo número de puntos que el intervalo $[0, 1]$. Esto resulta claro cuando uno se da cuenta de que C es el conjunto de puntos cuya expresión decimal en base 3 tiene sólo ceros y doses:

$$C = \left\{ \frac{d_1}{3} + \frac{d_2}{3^2} + \frac{d_3}{3^3} + \dots, \text{ donde } d_k = 0 \text{ ó } 2 \text{ para todo } k \right\}.$$

Sus propiedades topológicas más características son: es un conjunto perfecto, es decir, compacto y en el que todo punto es de acumulación; es totalmente desconexo.

Comparado con algunos de los ejemplos en otras secciones, el conjunto de Cantor no resulta muy atractivo. Su imagen no es más que un conjunto disperso de puntos, repartidos en el intervalo $[0, 1]$. ¿Qué lo convierte en un fractal? Dos propiedades características de todos ellos:

- 1) Es un conjunto autosemejante: es la unión de dos copias de sí mismo reducidas a un tercio de su tamaño original.
- 2) Su *dimensión fractal*, que será definida en la última sección, es fraccionaria:

$$\frac{\log 2}{\log 3} = 0,6309 \dots$$

A partir del conjunto de Cantor, se construye una función, la *escalera del diablo*, que si bien no es un fractal, sí tiene algunas propiedades curiosas.

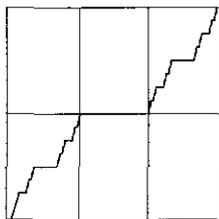


Figure 6.5: La escalera del diablo

Es una función continua de $[0, 1]$ con dos propiedades aparentemente contradictorias:

- 1) es estrictamente creciente;
- 2) tiene derivada nula en *casi todos los puntos*.

De aquí su nombre: nos lleva subiendo con continuidad desde cero hasta uno, pero siempre nos movemos en horizontal. Su gráfica es una curva rectificable de longitud 2. La región que limita con el eje de abscisas es autoafín: es la unión de 6 copias de sí misma, reducidas por un factor de $1/3$ en la dirección horizontal y $1/2$ en la vertical.

6 Curvas que llenan el plano

Una curva (continua) es una función continua γ de un intervalo de la recta real en el plano; más concretamente

$$\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2.$$

Su imagen o traza $\gamma([0, 1])$ es lo que normalmente entendemos por curva, y pensamos en ella como una línea dibujada sobre un papel. Los grafos de las funciones de Riemann y Weierstrass son curvas que no tienen tangente en ningún punto y que resultan imposibles de dibujar. Pero pueden construirse ejemplos todavía más contrarios a la intuición: curvas que llenan el plano, cuyo dibujo es una mancha oscura.

6.1 La curva de Peano

El matemático italiano Giuseppe Peano publicó en 1890, en *Mathematische Annalen*, el primer ejemplo de una curva continua que llena el plano. Dicha curva aparece como el límite de una sucesión de curvas cuya imagen es como la de la



Giuseppe Peano
27 agosto 1858, Cuneo, Piemonte
20 abril 1932, Turín

figura 6.6. Sus distintos segmentos se recorren en un orden determinado, y la curva pasa varias veces por sus extremos.

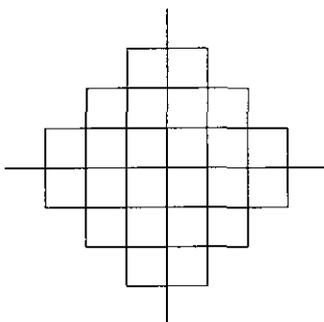
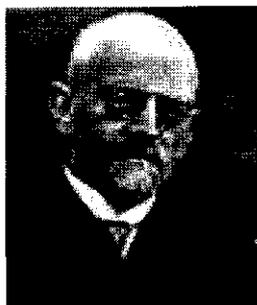


Figure 6.6: El tercer paso en la construcción de la curva de Peano

6.2 La curva de Hilbert

Cada una de las curvas que aproximan a la de Peano tiene autointersecciones. Un año más tarde que él, Hilbert publicó un nuevo ejemplo de curva que llena el plano (*Mathematische Annalen*, 1891), en la que cada una de las curvas que aproximan la curva final es simple, es decir, no se corta a sí misma.

Para su construcción se parte de un cuadrado dividido en cuatro cuadrados iguales, con sus centros unidos mediante una poligonal en forma de n (primer dibujo en la figura 6.7). A continuación se sacan cuatro fotocopias reducidas al 50%, se unen para formar el cuadrado original, pero girando las dos inferiores un ángulo de



Karl David Hilbert

23 enero 1862, Königsberg, Prusia (hoy Kaliningrado, Rusia)

14 febrero 1943, Göttingen

90° , una hacia la izquierda y otra hacia la derecha (segundo dibujo en la figura 6.7), y se unen otra vez los centros de los cuadrados. Se itera el proceso, y en el límite se obtiene una curva que pasa por todos los puntos del cuadrado.

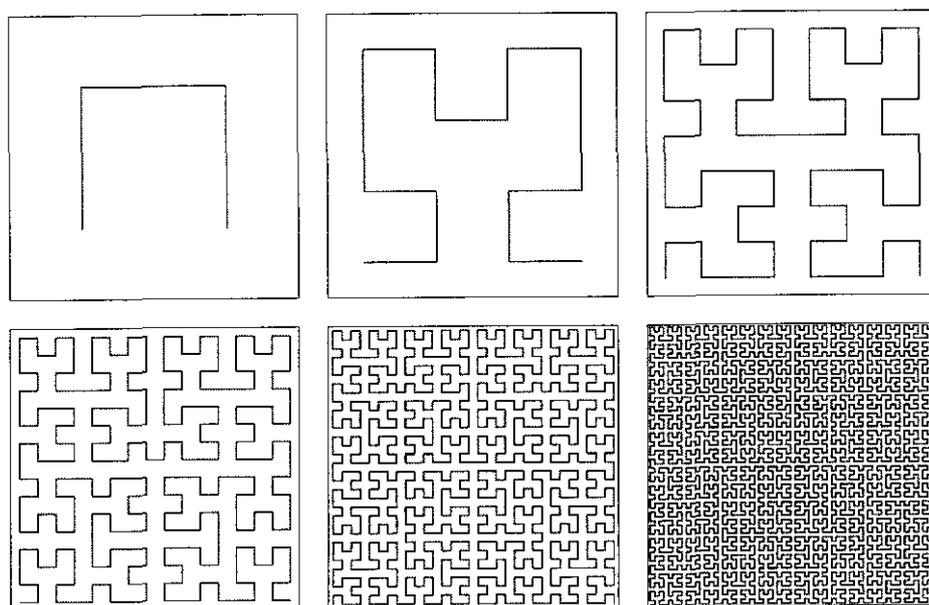


Figure 6.7: Generación de la curva de Hilbert

Por extraño que parezca, la curva de Hilbert tiene utilidad práctica en el tratamiento

de imágenes, en un proceso conocido como *dithering*.

La curva de Hilbert puede construirse también a partir de otras configuraciones iniciales. En la figura 6.8 se muestra un ejemplo en que la configuración inicial es una tienda de campaña.

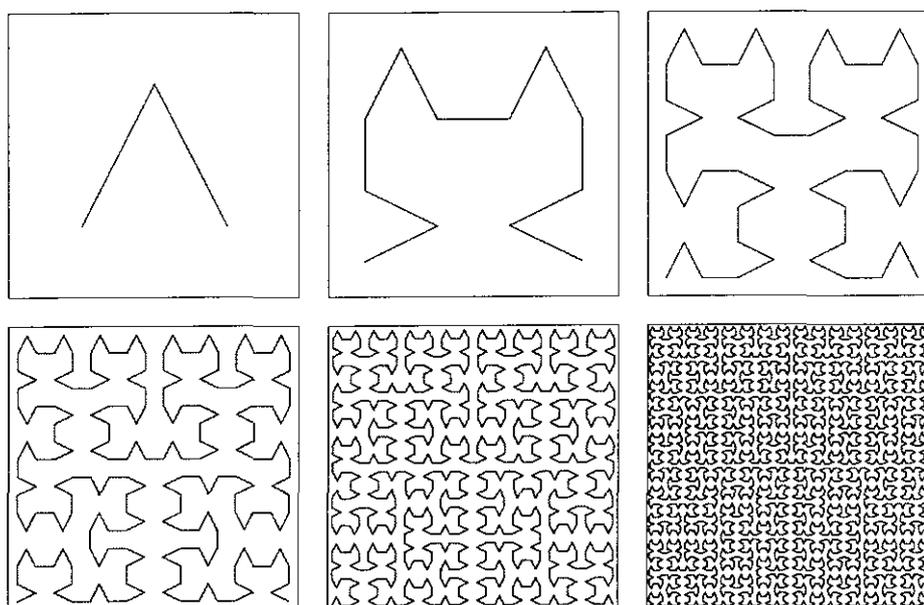


Figure 6.8: Curva de Hilbert con otra figura inicial

7 La curva de Koch

Koch definió la curva que lleva su nombre (*Arkiv för Matematik*, 1904 y *Acta Mathematica*, 1906) para dar otro ejemplo de curva continua que no tiene tangente en ninguno de sus puntos.

La curva se construye comenzando con un segmento rectilíneo, que sin pérdida de generalidad supondremos de longitud 1. En un primer paso, se divide en tres partes iguales y se sustituye la central por un triángulo equilátero sin la base. Se obtiene así una figura formada por cuatro segmentos de longitud $1/3$. En un segundo paso se repite el proceso anterior con cada uno de los cuatro segmentos, obteniéndose una figura con 16 segmentos de longitud $1/9$. Este proceso se itera, y en el límite se obtiene la curva de Koch.



Niels Fabian Helge von Koch
25 enero 1870, Estocolmo
11 marzo 1924, Estocolmo

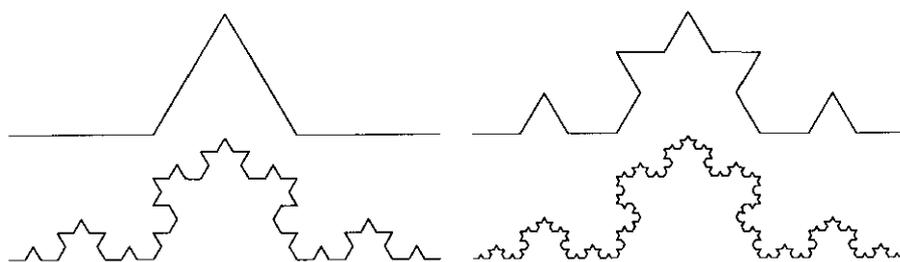


Figure 6.9: Generación de la curva de Koch

En el n -ésimo paso se obtiene una curva formada por 4^n segmentos de longitud 3^{-n} , por lo que su longitud total es $(4/3)^n$. Como $4/3 > 1$, la curva de Koch tiene longitud infinita, es decir, no es rectificable. La curva de Koch es un objeto autosemejante: es la unión de cuatro copias de sí misma reducidas a un tercio de su tamaño original. Pegando tres copias de la curva de Koch se obtiene *el copo de nieve* (figura 6.10).

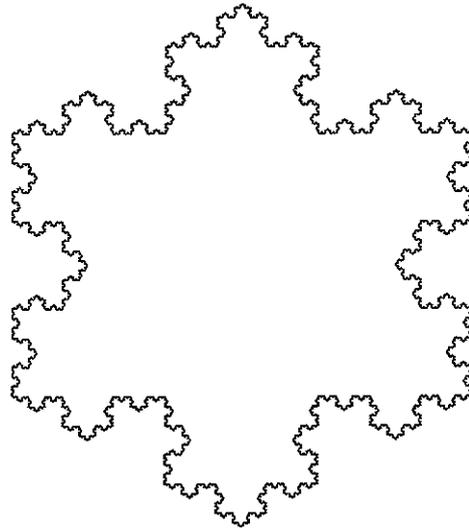


Figure 6.10: El copo de nieve de Koch

La construcción puede variarse de muchas maneras, obteniendo gran cantidad de figuras diversas. En particular, pueden introducirse elementos aleatorios, lo que produce con frecuencia imágenes inesperadas.

8 Autosemejanza

Una de las características de los objetos fractales es la *autosemejanza*. Cuando se consideran fractales naturales como un árbol, esto quiere decir que el aspecto es el mismo independientemente de la escala en que lo observemos: el tronco se divide en ramas, que a su vez se dividen en ramas más pequeñas, de las que salen hojas, que tienen nervaduras, que a su vez se subdividen, etcétera. Mirando una rama tenemos la misma impresión que mirando todo el árbol o una hoja.

Para hacer matemáticas necesitamos una definición mucho más precisa. Una semejanza en el plano es una composición de

- 1) una dilatación,
- 2) una traslación,
- 3) una rotación
- 4) y una reflexión

Es una transformación que conserva la forma y las proporciones, pero que puede variar el tamaño, la posición y la orientación. En coordenadas cartesianas se expresa como

$$S \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm s & 0 \\ 0 & \pm s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & \operatorname{sen} \theta \\ -\operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

donde $s > 0$ es el factor de dilatación, θ el ángulo de rotación y (a, b) el vector de traslación. Los signos \pm se toman dependiendo de si hay o no reflexiones.

Definición. Un conjunto $A \subset \mathbb{R}^2$ es autosemejante si existen semejanzas S_1, \dots, S_N , con factores de dilatación respectivos $s_i < 1$, $1 \leq i \leq N$, tales que

$$A = S_1(A) \cup \dots \cup S_N(A).$$

Es decir, si A es la unión de N copias reducidas de sí mismo.

Algunos ejemplos de conjuntos autosemejantes son:

- El conjunto de Cantor
- La curva de Koch
- El cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$

Los dos primeros son fractales, mientras que el segundo no lo es.

Un concepto más general que el de autoesmejanza es el de autoafinidad, en el que, en vez de semejanzas, se consideran transformaciones más generales con factores de dilatación distintos en cada dirección.

9 Dimensiones fraccionarias

Como acabamos de ver, la autoesmejanza no basta para caracterizar los objetos fractales. Otro ingrediente fundamental es la *dimensión fractal*. Tenemos una concepción intuitiva, que puede hacerse rigurosa desde un punto de vista matemático, de las dimensiones de los objetos: un punto no tiene dimensión, una línea tiene una, una superficie dos y un volumen tres. Pero ¿qué dimensión tiene la curva de Hilbert?

Por una parte es una curva, luego debiera ser unidimensional; por otra llena todo un cuadrado y se nos aparece como bidimensional. Más complicado lo tenemos con otros objetos fractales, como el conjunto de Cantor o la curva de Koch, a los que hay razones para asignar una dimensión fraccionaria.

Los matemáticos han ideado distintas maneras para asignar una dimensión a los fractales, no todas equivalentes. Las más utilizadas son la dimensión de Hausdorff, la de Minkowski y la fractal. Todas dan el mismo resultado cuando se aplican a conjuntos autosemejantes. La definición que propone Mandelbrot para considerar un conjunto como fractal es que su dimensión fractal sea estrictamente mayor que su dimensión natural.

A continuación presentamos la dimensión de Minkowski y la fractal, cuya definición es técnicamente más sencilla que la de Hausdorff.

9.1 Dimensión de Minkowski

Supongamos que tenemos un segmento rectilíneo de longitud ℓ y que con centro en cada uno de sus puntos trazamos una circunferencia de radio $\varepsilon > 0$ pequeño en comparación con ℓ . Obtendremos un óvalo parecido a una salchicha, y que podríamos a llamar la *salchicha de Minkowski* del segmento. Su área es

$$A(\varepsilon) = 2\ell\varepsilon + \pi\varepsilon^2.$$



Figure 6.11: Salchicha de Minkowski de un segmento

Si ε es pequeño, el segundo término es despreciable, y el área es aproximadamente proporcional a ε . Lo importante aquí es que el área de la salchicha es proporcional a ε elevado a la potencia 1, y que 1 es precisamente la dimensión del segmento. Podemos recuperar ese exponente mediante límites:

$$\text{Dimensión del segmento} = 1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\log A(\varepsilon)}{\log \varepsilon}.$$

Supongamos ahora que tenemos una curva continua $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$. Dado $\varepsilon > 0$, la salchicha de Minkowski es el conjunto

$$S(\gamma, \varepsilon) = \bigcup_{0 \leq t \leq 1} B(\gamma(t), \varepsilon)$$

donde $B(P, r)$ es la bola abierta de centro el punto $P \in \mathbb{R}^2$ y radio r .

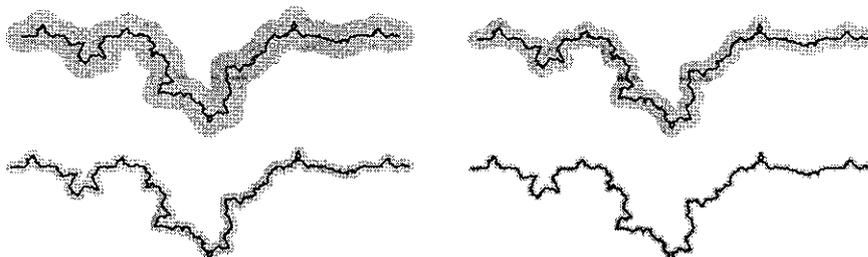


Figure 6.12: Salchichas de Minkowski para 4 valores decrecientes de ε

Si la curva es fractal, los círculos cubrirán un área más pequeña, debido a las irregularidades de la curva, y la salchicha de Minkowski tendrá un área proporcional no a ε , sino a una potencia ε^d con $d > 1$. El exponente de esa potencia es precisamente la dimensión de Minkowski de la curva.

Definición. Sea $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva continua. Su dimensión de Minkowski es

$$d(\gamma) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\log(\text{Area de } S(\gamma, \varepsilon))}{\log \varepsilon}.$$

La dimensión de Minkowski de la curva de Koch es

$$\frac{\log 4}{\log 3} = 1,1626\dots$$

La dimensión de Minkowski de la gráfica de la curva de Weierstrass no se conoce.

9.2 Dimensión fractal

La dimensión de Minkowski es una valiosa herramienta teórica, pero de escasa utilidad práctica para calcular la dimensión de fractales naturales. La dimensión fractal que definimos en este apartado es la base para la determinación experimental de la dimensión de objetos tales como nubes, líneas de costa, agrupaciones de bacterias, etcétera.

Para determinar la dimensión fractal de una curva preparamos una serie de cuadrículas R_k cada vez más finas, de forma que el lado de la k -ésima sea la mitad del lado de la anterior. Superponemos la cuadrícula sobre la curva y calculamos

$$N_{\square}(k) = \text{número de cuadrados de } R_k \text{ que cortan a la curva.}$$

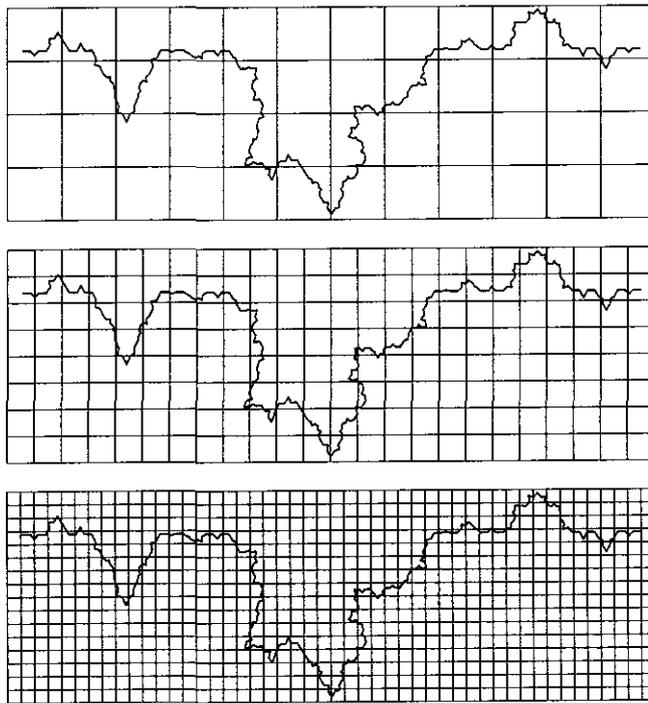


Figure 6.13: Cuadrículas superpuestas a una curva

Si la curva fuese un segmento rectilíneo, es claro que entonces $N_{\square}(k)$ sería proporcional a 2^k : al reducir a la mitad el lado de la cuadrícula, se duplica el número de cuadrados que lo cortan. Tenemos entonces

$$N_{\square}(k) \sim 2^k$$

Si la curva es como la de la figura 6.13, entonces el número de cuadrados que la cortan crecerá con k a un ritmo mayor, obteniéndose una ley del tipo

$$N_{\square}(k) \sim 2^{dk}, \quad d > 1.$$

Ese exponente d es la dimensión fractal.

Definición. Sea A un subconjunto compacto de \mathbb{R}^2 , y $N_{\square}(k)$ el número de cuadrados del retículo plano de lado 2^{-k} que tienen intersección no vacía con A . La dimensión fractal de A es

$$\delta(A) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log(N_{\square}(k))}{k}.$$

Para la determinación práctica de la dimensión de un fractal natural, es obvio que no se puede llegar al límite, pues a partir de un cierto k estaríamos en una escala menor que la más pequeña de las partículas elementales. Lo que se hace es elegir un rango de k 's adecuado al objeto que se examina, hallar experimentalmente $N_{\square}(k)$ en ese rango, y hacer una regresión lineal de los valores de k y $\log N_{\square}(k)$. La pendiente de la recta de regresión es una estimación de la dimensión fractal.

Bibliografía

- [1] Barnsley, M., *Fractals Everywhere*, Academic Press, San Diego, 1988
- [2] Córdoba A. y Chamizo F., *Fractales de Riemann, números y figuras*, La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, **1**, 37–47, 1998
- [3] Gleick, R. L., *Chaos*, Viking, New York, 1987
- [4] Mandelbrot, B. B., *Les objets fractals: forme, hasard et dimension*, Flammarion, Paris, 1975
- [5] Mandelbrot, B. B., *The Fractal Geometry of Nature*, W. H. Freeman, New York, 1977
- [6] H-O. Peitgen, H. Jürgens y D. Saupe, *Chaos and Fractals, New Frontiers of Science*, Springer-Verlag, New-York, 1992
- [7] Peitgen, H.-O. y Ritcher, P. (editores), *The Science of Fractal Images*, Springer-Verlag, New York, 1988
- [8] Peitgen, H.-O. y Ritcher, P., *The Beauty of Fractals*, Springer-Verlag, New York, 1986
- [9] M. Spivak, *Calculus*, Editorial Reverté, Barcelona, 1970