

# Geometría inversiva

por

Luis Ugarte Vilumbrales

En la geometría inversiva la idea de reflexión en una recta se extiende a una circunferencia definiendo una reflexión o inversión respecto de ella. La Sección 1 introduce este concepto y muestra sus propiedades más importantes. La transformación por inversión es especialmente útil por su capacidad simplificadora de algunas figuras geométricas planas; en la Sección 2 utilizamos la inversión en el estudio de algunos problemas clásicos de la geometría euclídea plana, entre los que se encuentra el teorema de construcción de Mohr-Mascheroni, que asegura que toda construcción geométrica realizada con regla y compás puede realizarse utilizando exclusivamente el compás. Finalmente, la Sección 3 se dedica a la introducción del *grupo inversivo*, que nos permite dar una definición rigurosa de *geometría inversiva*.

## 1 Inversión respecto de una circunferencia

Aunque parece probable que algunas ideas sobre la inversión apareciesen ya en la obra perdida de Apolonio (aprox. 262-200 A.C.) *Lugares geométricos planos*, lo que sí es claro es que la noción de puntos inversamente relacionados era bien conocida en el siglo XVI. Sin embargo, la utilización de la inversión en el estudio de problemas geométricos en el plano euclídeo, como los que tratamos en la Sección 2,

no tiene su aparición hasta el siglo XIX. La definición de inversión respecto de una circunferencia es muy sencilla:

**Definición 1.** Fijemos en el plano una circunferencia  $\Sigma(O, r)$  de centro  $O$  y radio  $r$ . Para cada punto  $P$  distinto de  $O$ , el punto *inverso* de  $P$  respecto de  $\Sigma$  es el punto  $P'$  de la recta  $OP$  que cumple que  $\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = r^2$ .

De aquí en adelante, la expresión  $\overline{AB}$  significa distancia *con signo* entre los puntos  $A$  y  $B$  (suponemos que hemos fijado en la recta que pasa por  $A$  y  $B$  un sentido que consideramos positivo), mientras que la expresión  $AB$  se reserva para la distancia absoluta entre  $A$  y  $B$ . Así, la expresión  $\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = r^2$  en la definición anterior nos dice que  $P'$  siempre está al mismo lado que  $P$  respecto de  $O$ .

Nos referiremos a  $\Sigma(O, r)$  como la *circunferencia de inversión* y diremos que el punto  $O$  es el *centro de inversión*.

Propiedades que se obtienen de manera inmediata: si el punto  $P$  es exterior a la circunferencia  $\Sigma$ , es decir,  $OP > r$ , entonces  $OP' < r$ , o sea, el inverso de  $P$  es interior a  $\Sigma$ ; si el punto  $P$  es interior a  $\Sigma$  entonces su inverso es exterior a  $\Sigma$ ; por último, los puntos de la circunferencia  $\Sigma$  quedan fijos en la inversión.

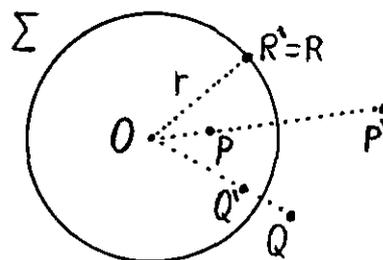


Figura 1

Por otro lado, si  $E^2$  denota el plano euclídeo e  $\mathcal{I}$  la aplicación inversión respecto de  $\Sigma(O, r)$ , observamos que  $\mathcal{I}: E^2 - \{O\} \rightarrow E^2 - \{O\}$  es biyectiva. Además, es claro que el inverso del inverso de  $P$  es el propio  $P$ , es decir,  $\mathcal{I} \circ \mathcal{I} = id$  o, dicho de otro modo, la inversión es una transformación involutiva.

Cuando el punto  $P$  se acerca al centro de inversión  $O$ , su inverso  $P'$  se aleja infinitamente de  $O$ , por lo que si queremos extender la aplicación  $\mathcal{I}$  a todo el plano euclídeo  $E^2$  necesitaremos ampliar el plano con un punto ideal. (Esta idea es precisamente la de compactificar el plano añadiéndole un punto, lo que lo identifica con la esfera. De hecho, esta identificación se puede obtener mediante la conocida aplicación estereográfica, la cual se puede definir a su vez mediante una inversión en el espacio  $E^3$  como veremos más adelante.) Así, añadiendo un punto ideal  $\infty$  al plano  $E^2$  y extendiendo la aplicación inversión  $\mathcal{I}$  a todo  $E^2 \cup \{\infty\}$  por  $\mathcal{I}(O) = \infty$  e  $\mathcal{I}(\infty) = O$ , obtenemos que la inversión  $\mathcal{I}$  define una transformación involutiva de

$E^2 \cup \{\infty\}$  en sí mismo. El plano  $E^2 \cup \{\infty\}$  se suele denominar *plano inversivo* y el punto ideal  $\infty$  se considera como *perteneciente a toda recta del plano*. Es útil tener esta idea en mente para entender mejor las propiedades que vemos a continuación.

Podemos invertir punto a punto cualquier curva  $\mathcal{C}$  respecto de  $\Sigma(O, r)$ , y denotaremos por  $\mathcal{C}'$  la curva inversa. Ya sabemos que  $\Sigma' = \Sigma$ . A continuación obtenemos las inversas de las curvas más simples: rectas y circunferencias.

**Proposición 2.** *La inversa de una recta  $l$  que pasa por el centro de inversión es la propia  $l$ , es decir,  $l' = l$ .*

La demostración es inmediata, pero cabe observar que la recta  $l$  queda fija en conjunto, y no punto a punto como sucedía con  $\Sigma$ .

**Proposición 3.** *La inversa de una recta  $l$  que no pasa por el centro de inversión  $O$  es una circunferencia  $l'$  que pasa por  $O$ .*

*Demostración:* Sea  $A$  el pie de la perpendicular a  $l$  trazada desde el punto  $O$ , y tomemos un punto cualquiera  $P$  de  $l$  (ver Figura 2). Los inversos  $A'$  y  $P'$  de los puntos  $A$  y  $P$  verifican, por la propia definición de inverso, que  $\overline{OA} \cdot \overline{OA'} = r^2 = \overline{OP} \cdot \overline{OP'}$ . Esto implica que  $OP'/OA' = OA/OP$  y, por tanto, los triángulos  $OP'A'$  y  $OAP$  son semejantes. En particular, el ángulo  $OP'A' = OAP = \pi/2$ , por lo que cuando  $P$  recorre la recta  $l$  el punto  $P'$  recorrerá una curva  $l'$  tal que desde cualquier punto de ella se ve el segmento  $OA'$  bajo un ángulo recto. Ahora bien, es claro que la única curva  $l'$  con esta propiedad es la circunferencia de diámetro  $OA'$ . ■

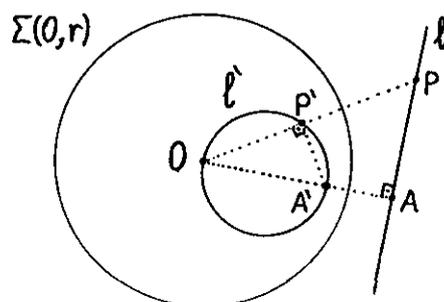


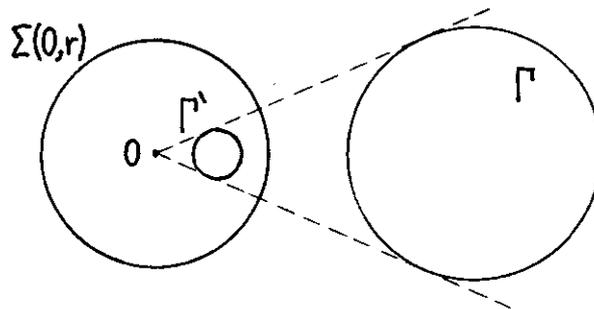
Figura 2

De forma análoga al resultado anterior se prueba la siguiente:

**Proposición 4.** *La inversa de una circunferencia  $\Gamma$  que pasa por el centro de inversión  $O$  es una recta  $\Gamma'$  que no pasa por  $O$ .*

Recordemos que dado un punto fijo  $O$  del plano y un número real  $k > 0$ , la transformación del plano  $E^2$  que lleva cada punto  $P$  a un punto  $Q$  tal que  $\overline{OQ} = k \cdot \overline{OP}$  se denomina *homotecia de centro  $O$  y razón  $k$* . Es fácil comprobar que la composición de dos inversiones respecto de dos circunferencias concéntricas es una homotecia. Enunciamos el siguiente resultado sin demostración<sup>1</sup>.

Figura 3



**Proposición 5.** *La inversa de una circunferencia  $\Gamma$  que no pasa por el centro de inversión  $O$  es una circunferencia  $\Gamma'$  que tampoco pasa por  $O$ . Más aún,  $\Gamma'$  es la imagen de  $\Gamma$  vía una homotecia de centro  $O$ .*

La imagen de una circunferencia por una homotecia  $\mathcal{H}$  es otra circunferencia cuyo centro es la imagen por  $\mathcal{H}$  del centro de la primera. Sin embargo, en las condiciones de la Proposición 5, el centro de la circunferencia  $\Gamma$  no se invierte en el centro de  $\Gamma'$ . Este hecho, que en principio podría parecer “problemático”, representa en realidad una gran ventaja de la inversión como transformación simplificadora ya que permite invertir dos circunferencias cualesquiera que no se corten en dos circunferencias concéntricas (en la Sección 2.2 demostraremos esta propiedad y la utilizaremos en el estudio de las cadenas de Steiner).

Una recta en el plano inversivo  $E^2 \cup \{\infty\}$  puede pensarse como una circunferencia que pasa por el punto ideal  $\infty$ . Así, es muy habitual encontrar en la bibliografía que por ‘circunferencia’ se entienda tanto una recta como una circunferencia en el sentido usual. Las proposiciones anteriores se resumen en:

<sup>1</sup>Por falta de espacio algunos resultados de esta sección se dejan sin demostrar. Una prueba completa de ellos se puede encontrar en el libro de Howard Eves, *Estudio de las Geometrías*, Tomo 1, Ed. UTEHA, 1969.

**Teorema 6.** *La inversión respecto de una circunferencia es una transformación que lleva 'circunferencias' a 'circunferencias'.*

Otra importante propiedad de la inversión es que conserva los ángulos entre curvas, es decir, la inversión es una transformación *conforme*. Sean  $C_1$  y  $C_2$  dos curvas (que suponemos suficientemente regulares) que se cortan en un punto  $P$  distinto del centro de inversión  $O$ . Sea  $\alpha$  el ángulo formado por las tangentes a  $C_1$  y  $C_2$  en el punto  $P$ . Entonces las tangentes a las curvas inversas  $C'_1$  y  $C'_2$  en el punto  $P'$  también forman un ángulo  $\alpha$ .

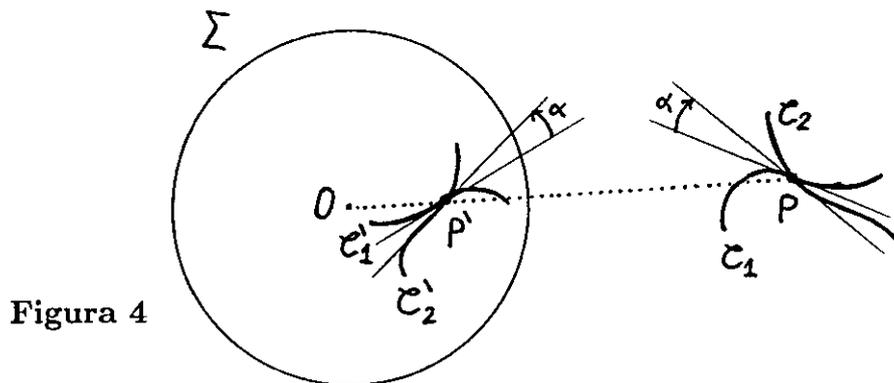


Figura 4

**Teorema 7.** *La inversión es una transformación conforme, es decir, conserva la magnitud de los ángulos, aunque invierte su sentido.*

En particular, la inversión conserva tangencia ( $\alpha = 0$ ) y ortogonalidad ( $\alpha = \pi/2$ ) de 'circunferencias'.

Existe una estrecha relación entre puntos inversos y ortogonalidad de circunferencias, como se pone de manifiesto en la siguiente:

**Proposición 8.** *Si  $P$  y  $P'$  son puntos inversos respecto de la circunferencia  $\Sigma$ , entonces cualquier circunferencia que pase por  $P$  y  $P'$  cortará a  $\Sigma$  ortogonalmente.*

Sin embargo, la inversión no es una isometría, es decir, no conserva la distancia entre puntos. En concreto, se tiene:

**Teorema 9.** Sean  $P, P'$  y  $Q, Q'$  dos pares de puntos inversos respecto de  $\Sigma(O, r)$ . Entonces,  $P'Q' = PQ \cdot (r^2/OP \cdot OQ)$ .

El concepto de inversión respecto de una circunferencia es generalizable a cualquier dimensión  $n \geq 3$  de la siguiente manera: tomemos una esfera  $(n - 1)$ -dimensional  $\Sigma^{n-1}(O, r)$ , de centro un punto  $O$  del espacio euclídeo  $n$ -dimensional  $E^n$  y radio  $r > 0$ , y definamos el inverso de un punto  $P \neq O$  como el punto  $P'$  de la recta  $OP$  que cumple que  $\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = r^2$ . La transformación así definida posee las mismas propiedades que las que hemos visto para la inversión en el plano, pero trasladándolas a la dimensión correspondiente.

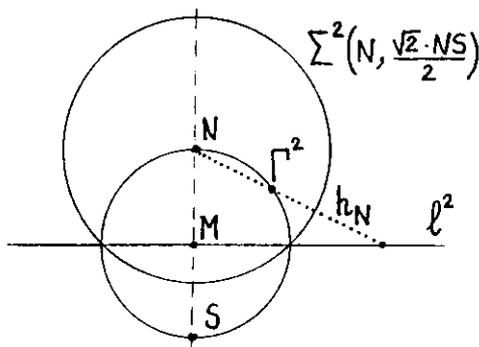
Así, el Teorema 6 en el espacio ( $n = 3$ ) nos dice que las esferas y los planos se invierten, respecto de la esfera  $\Sigma^2(O, r)$ , en esferas o planos según pasen o no por el centro de inversión  $O$ . Pero podemos también invertir curvas y superficies cualesquiera, lo que nos permite generar nuevas curvas y superficies<sup>2</sup>.

En este contexto, la conocida proyección estereográfica no es más que la transformación de una esfera en un plano por una inversión adecuada: Sean  $N$  y  $S$  dos puntos distintos del espacio euclídeo y sea  $M$  el punto medio del segmento  $NS$ . Consideremos la esfera de inversión  $\Sigma^2(N, (\sqrt{2}/2) \cdot NS)$ , de centro el punto  $N$  y radio  $(\sqrt{2}/2) \cdot NS$ . Entonces, la esfera  $\Gamma^2$  de diámetro el segmento  $NS$  se invierte en el plano  $l^2 \cup \{\infty\}$  que pasa por  $M$  y es perpendicular a  $NS$  (ver Figura 5). La aplicación  $h_N: \Gamma^2 \rightarrow l^2 \cup \{\infty\}$  obtenida de esta forma es precisamente la proyección estereográfica usual que proyecta desde el polo norte  $N$  los puntos de la esfera  $\Gamma^2$  en el plano  $l^2 \cup \{\infty\}$ . (Observar que la proyección  $h_S: \Gamma^2 \rightarrow l^2 \cup \{\infty\}$  desde el polo sur  $S$  de  $\Gamma^2$  se obtiene al considerar  $\Sigma^2(S, (\sqrt{2}/2) \cdot NS)$  como esfera de inversión.) La proyección estereográfica permite entonces obtener una representación sobre el plano de cualquier figura situada sobre la esfera, lo que proporciona un método para construir mapas geográficos. El Teorema 7 garantiza la conservación de los ángulos en los mapas construidos de esta forma.

---

<sup>2</sup>En el reciente libro de Alfred Gray, *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica*, CRC Press, 1998, se estudia, desde el punto de vista de la geometría diferencial, la imagen de curvas y superficies bajo una inversión. El programa Mathematica es utilizado para visualizar las nuevas curvas y superficies obtenidas de esta manera.

Figura 5



Finalmente, cabe observar que la inversión en el plano puede a su vez ser obtenida a partir de las proyecciones estereográficas  $h_N$  y  $h_S$ . En efecto, identificando el plano euclídeo  $E^2$  con  $l^2$  es fácil probar que la aplicación compuesta  $h_N \circ h_S^{-1}: E^2 \cup \{\infty\} \rightarrow E^2 \cup \{\infty\}$  es precisamente la aplicación inversión respecto de la circunferencia  $\Sigma(M, NS/2)$ .

## 2 Algunas aplicaciones de la inversión

En esta sección estudiamos, haciendo uso de la inversión, el problema de Apolonio, algunas propiedades de las cadenas de Steiner, los mecanismos articulados de Peaucellier y Hart para trazar una recta, y demostramos el teorema de Mohr-Mascheroni que nos dice que toda construcción realizada con regla y compás puede realizarse igualmente utilizando sólo el compás.

### 2.1 El problema de Apolonio

Apolonio marcó, junto con Euclides y Arquímedes, el apogeo de la geometría griega. Se ganó el título de “*El mayor geómetra*” entre sus contemporáneos por su extraordinaria obra *Secciones cónicas*, la cual contiene unas 400 proposiciones recogidas en 8 libros que sustituyeron a todos los trabajos anteriores sobre el tema. De entre otros seis tratados que también se le atribuyen a Apolonio, el titulado *Tangencias* plantea el problema de la construcción de una circunferencia tangente a tres circunferencias dadas  $\Sigma_1, \Sigma_2$  y  $\Sigma_3$ , donde cada una de las  $\Sigma_i$  puede asumir independientemente cualquiera de las formas degeneradas de recta o punto. Este problema, que ha atraído la atención de muchos matemáticos, se conoce como el *problema de Apolonio*. De entre las 10 posibilidades para la terna  $(\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3)$ , la más interesante es sin duda aquella en la que cada  $\Sigma_i$  es una circunferencia. El número de soluciones de este problema depende de cómo estén situadas las circunferencias  $\Sigma_1, \Sigma_2$  y  $\Sigma_3$  en el plano, dándose situaciones en las que no existe ninguna circunferencia tangente a las tres dadas. Una situación de este tipo es fácil de imaginar: basta tomar una de las circunferencias  $\Sigma_i$  dentro de otra.

El problema de Apolonio fue considerado durante siglos como muy difícil, hasta que Jacob Steiner (1796-1863) encontró una solución muy simple basada en la inversión. Sean  $\Sigma_1, \Sigma_2$  y  $\Sigma_3$  tres circunferencias colocadas como en la Figura 6, y queremos encontrar una circunferencia  $\Sigma$  tangente a las  $\Sigma_i$  a la vez. Este problema se reduce fácilmente al problema degenerado de Apolonio de encontrar una circunferencia  $\tilde{\Sigma}$  que pase por un punto dado y sea tangente a dos circunferencias dadas. En efecto, llamando  $O_i$  al centro de  $\Sigma_i$  y  $r_i$  a su radio, si la circunferencia  $\Sigma(O, r)$  de la Figura 6 es tangente a las tres circunferencias dadas  $\Sigma_1, \Sigma_2$  y  $\Sigma_3$ , entonces la circunferencia  $\tilde{\Sigma}(O, r + r_1)$  pasa por el punto  $O_1$  y es tangente a  $\tilde{\Sigma}_2(O_2, r_2 - r_1)$  y  $\tilde{\Sigma}_3(O_3, r_3 - r_1)$ .

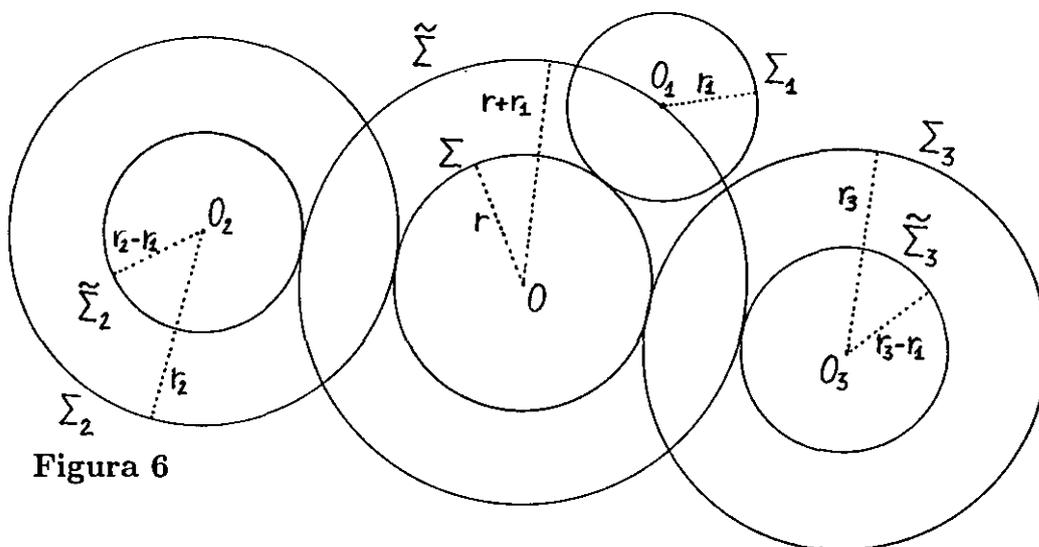
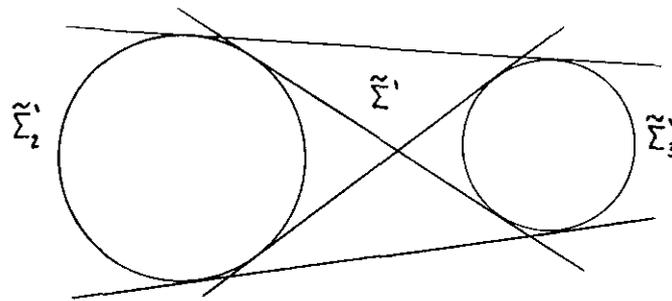


Figura 6

Por lo tanto, para resolver el problema de Apolonio sólo queda demostrar que dado un punto  $O_1$  y dos circunferencias  $\tilde{\Sigma}_2$  y  $\tilde{\Sigma}_3$  como en la Figura 6, existe una circunferencia  $\tilde{\Sigma}$  tangente a  $\tilde{\Sigma}_2$  y  $\tilde{\Sigma}_3$  pasando por  $O_1$ . Pero invirtiendo  $\tilde{\Sigma}, \tilde{\Sigma}_1$  y  $\tilde{\Sigma}_2$  con  $O_1$  como centro de inversión (no importa el radio de inversión) y haciendo uso de las Proposiciones 4, 5 y el Teorema 7 obtenemos la Figura 7, con lo que el problema se traduce en encontrar la recta  $\tilde{\Sigma}'$  correspondiente que es tangente a las circunferencias  $\tilde{\Sigma}'_2$  y  $\tilde{\Sigma}'_3$ . Luego, una de las 4 tangentes comunes a  $\tilde{\Sigma}'_2$  y  $\tilde{\Sigma}'_3$  nos proporcionará la circunferencia  $\Sigma$  buscada en la Figura 6, y así este problema de Apolonio queda resuelto.

Figura 7



Pero, ¿cuántas soluciones distintas podemos encontrar? Uno puede ver que existen 8 soluciones en la situación de la Figura 6: la circunferencia  $\Sigma$  buscada puede ser exteriormente tangente a las tres circunferencias dadas, puede rodear a las tres, puede rodear dos de ellas y no la tercera (3 soluciones) o puede rodear una y no las otras dos (3 soluciones). El problema que hemos resuelto corresponde al primer caso, pero se puede proceder de manera similar para obtener las restantes soluciones.

Una situación con sólo 4 soluciones surge cuando se toman tres circunferencias concurrentes en un punto.

## 2.2 Cadenas de Steiner

Como otra muestra de la utilidad de la inversión en la resolución de algunos problemas clásicos de la geometría plana, vamos a considerar el siguiente problema: dadas dos circunferencias  $\Sigma_1$  y  $\Sigma_2$  que no se cortan, consideremos circunferencias  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots$  de manera que cada  $\Gamma_i$  sea tangente a  $\Sigma_1, \Sigma_2$  y  $\Gamma_{i-1}$ , para  $i \geq 2$ . Si existe un número natural  $N$  tal que  $\Gamma_N$  es tangente a  $\Sigma_1, \Sigma_2, \Gamma_{N-1}$  y  $\Gamma_1$  entonces se dice que  $\{\Gamma_i\}_{i=1}^N$  es una *cadena de Steiner* para  $\Sigma_1$  y  $\Sigma_2$ . Es claro que la existencia de tales cadenas depende de cómo estén colocadas  $\Sigma_1$  y  $\Sigma_2$  en el plano. Las Figuras 8 y 9 muestran dos ejemplos de cadenas de Steiner.

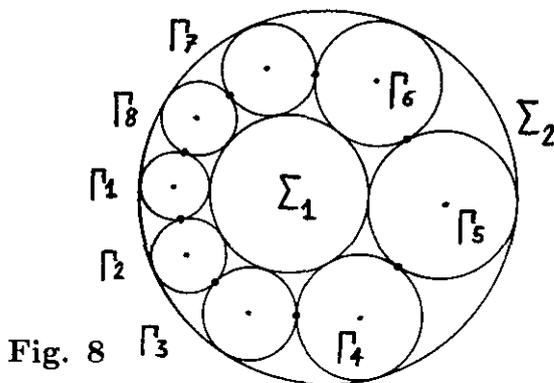


Fig. 8

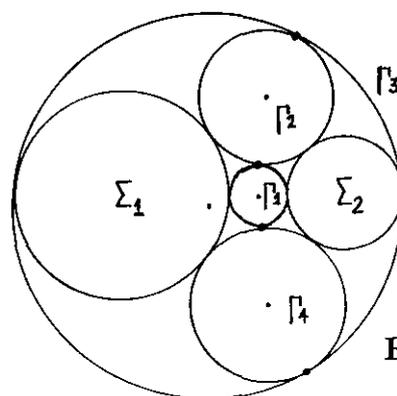


Fig. 9

Jacob Steiner estudió estas configuraciones usando el poder simplificador de la

inversión, y dio respuesta a cuestiones como las siguientes:

**Cuestión 1.** Supongamos que  $\Sigma_1$  y  $\Sigma_2$  admiten una cadena de Steiner  $\{\Gamma_i\}_{i=1}^N$ . ¿Es única dicha cadena? En el caso de no ser única, ¿cuántas cadenas de Steiner existen, y cuántas circunferencias tiene cada cadena?

**Cuestión 2.** Sea  $\{\Gamma_i\}_{i=1}^N$  una cadena de Steiner para  $\Sigma_1$  y  $\Sigma_2$ . ¿Sobre qué curva están los puntos de contacto de las circunferencias  $\Gamma_i$ ? ¿Y sus centros?

Para responder a la primera cuestión vamos a demostrar primero que “*dos circunferencias  $\Sigma_1$  y  $\Sigma_2$  que no se cortan siempre se pueden invertir en dos circunferencias  $\Sigma'_1$  y  $\Sigma'_2$  que sean concéntricas.*” Para ello, tomemos  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$  dos circunferencias ortogonales a  $\Sigma_1$  y  $\Sigma_2$  a la vez, las cuales se cortarán en dos puntos  $A$  y  $B$  (Figura 10). Si elegimos por ejemplo el punto  $A$  como centro de inversión entonces, debido a que la ortogonalidad se conserva en la inversión, obtenemos que  $\Omega'_1, \Omega'_2 \perp \Sigma'_1, \Sigma'_2$ . Ahora bien, como las circunferencias  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$  pasan por  $A$ , las Propositiones 4 y 5 nos dicen que  $\Omega'_1$  y  $\Omega'_2$  son dos rectas distintas ortogonales a las circunferencias  $\Sigma'_1$  y  $\Sigma'_2$  a la vez. Pero una recta ortogonal a una circunferencia es un diámetro de ella y, por tanto,  $\Sigma'_1$  y  $\Sigma'_2$  deben ser concéntricas. Además, como indica la Figura 11, el punto  $B' = \Omega'_1 \cap \Omega'_2$  inverso de  $B$  es el centro de  $\Sigma'_1$  y  $\Sigma'_2$ .

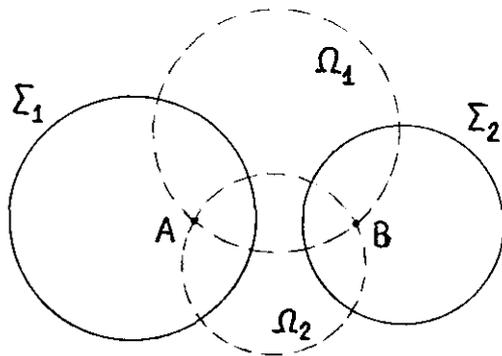


Fig. 10

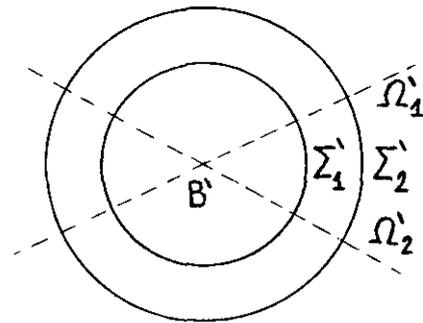


Fig. 11

Haciendo uso de la propiedad que acabamos de demostrar, la Cuestión 1 tiene una respuesta inmediata. En efecto, al invertir  $\Sigma_1$  y  $\Sigma_2$  en dos circunferencias concéntricas  $\Sigma'_1$  y  $\Sigma'_2$ , la cadena  $\{\Gamma_i\}_{i=1}^N$  se invierte en una cadena de Steiner  $\{\Gamma'_i\}_{i=1}^N$  para  $\Sigma'_1$  y  $\Sigma'_2$ , donde obviamente todas las  $\Gamma'_i$  tienen el mismo radio (Figura 12).

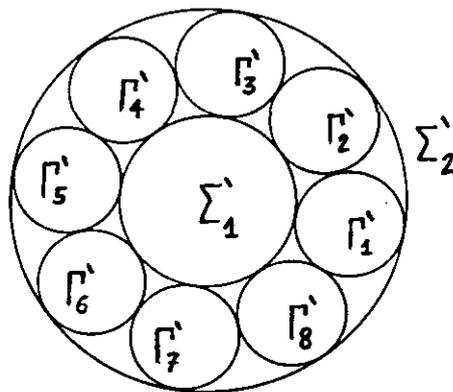


Figura 12

Podemos ahora girar un cierto ángulo  $\alpha$  la cadena  $\{\Gamma'_i\}_{i=1}^N$  para obtener una nueva cadena de Steiner  $\{\Gamma'_{\alpha,i}\}_{i=1}^N$  para  $\Sigma'_1$  y  $\Sigma'_2$ , la cual corresponderá a una nueva cadena de Steiner  $\{\Gamma_{\alpha,i}\}_{i=1}^N$  para las circunferencias iniciales  $\Sigma_1$  y  $\Sigma_2$ . Es claro que esto puede hacerse para infinitos valores de  $\alpha$ , con lo que hemos demostrado:

**Proposición 10.** *Si dos circunferencias  $\Sigma_1$  y  $\Sigma_2$  que no se cortan admiten una cadena de Steiner entonces admiten un número infinito de ellas, y todas las cadenas poseen el mismo número de circunferencias. Más aún, cualquier circunferencia tangente a  $\Sigma_1$  y  $\Sigma_2$  (que rodee a las dos a la vez o que no rodee*

a ninguna) es miembro de una cadena de Steiner.

En cuanto a la Cuestión 2, es claro que los puntos de contacto de las  $\Gamma_i$  están sobre una circunferencia o sobre una recta, es decir, sobre la curva inversa de la circunferencia que contiene los puntos de contacto de las  $\Gamma'_i$  en la cadena de Steiner para las circunferencias concéntricas  $\Sigma'_1$  y  $\Sigma'_2$ .

Los centros de las  $\Gamma_i$  están sin embargo sobre curvas más interesantes, a saber, sobre cónicas. En concreto:

**Proposición 11.** Sean  $\Sigma_1$  y  $\Sigma_2$  dos circunferencias que no se cortan y admiten cadenas de Steiner. Si una de las circunferencias está en el interior de la otra entonces los centros de las circunferencias de las cadenas de Steiner están sobre una elipse. En otro caso, los centros están sobre una hipérbola.

*Demostración:* Recordemos primero que una elipse es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de modo que la *suma* de sus distancias a dos puntos fijos del plano (llamados *focos*) sea constante. Una hipérbola se define de manera similar, pero reemplazando la palabra *suma* por *diferencia*.

Así, si  $\Sigma_1(O_1, r_1)$  y  $\Sigma_2(O_2, r_2)$  están colocadas como en la Figura 8, y si  $P$  y  $r$  denotan el centro y el radio de una circunferencia  $\Gamma$  que es miembro de una cadena de Steiner, entonces  $PO_1 = r_1 + r$  y  $PO_2 = r_2 - r$ . Por tanto,

$$PO_1 + PO_2 = (r_1 + r) + (r_2 - r) = r_1 + r_2.$$

Luego, los centros  $P$  de las circunferencias de la cadena están sobre una elipse de focos  $O_1$  y  $O_2$ . (Notar que si  $O_1 \equiv O_2$ , es decir,  $\Sigma_1$  y  $\Sigma_2$  son concéntricas, entonces  $P$  está sobre una circunferencia.)

Consideremos ahora  $\Sigma_1(O_1, r_1)$  y  $\Sigma_2(O_2, r_2)$  como en la Figura 9, y sean  $P$  y  $r$  el centro y el radio de una circunferencia  $\Gamma$  tangente exterior a  $\Sigma_1$  y  $\Sigma_2$  (es decir,  $\Gamma = \Gamma_1, \Gamma_2$  ó  $\Gamma_4$  en la Figura 9). En este caso se tiene que

$$PO_1 - PO_2 = (r_1 + r) - (r_2 + r) = r_1 - r_2,$$

con lo que los centros  $P$  de tales circunferencias de Steiner están sobre una hipérbola de focos  $O_1$  y  $O_2$ . Por último, es claro que  $PO_1 - PO_2 = -(r_1 - r_2)$  para los centros  $P$  de las circunferencias de Steiner  $\Gamma$  que rodean a  $\Sigma_1$  y  $\Sigma_2$  (es decir,  $\Gamma = \Gamma_3$  en la Figura 9), con lo que los centros de tales circunferencias de Steiner están sobre

la misma hipérbola, pero recorren su otra rama. (Notar que si  $r_1 = r_2$  entonces los centros están sobre una recta.) ■

Terminamos este apartado observando que las cadenas de Steiner de las Figuras 8 y 9 sólo necesitan una vuelta para cerrarse correctamente. Pueden sin embargo imaginarse situaciones en las que una cadena necesite varias vueltas para que esto suceda. Por ejemplo, podría ocurrir que en la primera vuelta obtuviésemos 4 circunferencias y media, con lo que en la segunda vuelta obtendríamos una cadena de Steiner de 9 circunferencias. Ahora bien, si el número de circunferencias en una vuelta es irracional entonces la cadena no se cierra nunca.

## 2.3 Mecanismos articulados para trazar una recta:

**el mecanismo inversor de Peaucellier y**

**el contraparalelogramo de Hart**

Durante el siglo XIX se prestó gran atención al problema de producir movimiento rectilíneo por medio de mecanismos articulados. La máquina de vapor de James Watt (1736-1819) disponía de un mecanismo, conocido como *paralelogramo de Watt*, cuya finalidad era conseguir que el extremo del pistón siguiese un movimiento que se aproximara lo suficientemente al rectilíneo como para que la máquina funcionase. Sin embargo, este mecanismo no conseguía un movimiento estrictamente rectilíneo, por lo que el propio P.L. Chebishev (1821-1894) estudió diversas modificaciones del paralelogramo de Watt, pero no encontró ningún mecanismo articulado que produjera exactamente una línea recta. Muchos matemáticos empezaron a dudar de la existencia de un tal mecanismo, incluso Chebishev trató de demostrar la imposibilidad del mismo.

En 1864 el oficial de la armada francesa A. Peaucellier (1832-1913) halló una solución, que fue anunciada en París en 1867. Sin embargo, no se prestó prácticamente ninguna atención a este descubrimiento hasta que un estudiante de Chebishev llamado Lipkin reinventó el mecanismo en 1871 de forma independiente. Fue entonces cuando el mérito de Peaucellier quedó finalmente reconocido.

### El mecanismo inversor de Peaucellier

Este mecanismo se basa en el hecho de que la curva inversa de una circunferencia que pasa por el centro de inversión es una recta. Más aún, el mecanismo permite obtener una inversión de todo el plano.

Comencemos en primer lugar con el mecanismo formado por las 6 varillas  $OA, OB, AP, AP', BP$  y  $BP'$  de la Figura 13, donde las longitudes de las varillas cumplen que  $OA = OB, AP = AP' = BP = BP'$  y la varilla  $OA$  es más larga que  $AP$ . Este mecanismo está articulado en  $O, A, B, P$  y  $P'$ . Fijamos  $O$  al plano y movemos el mecanismo. Entonces los puntos  $P$  y  $P'$  describirán curvas inversas respecto de la circunferencia de centro  $O$  y radio  $r = \sqrt{OA^2 - AP^2}$ .

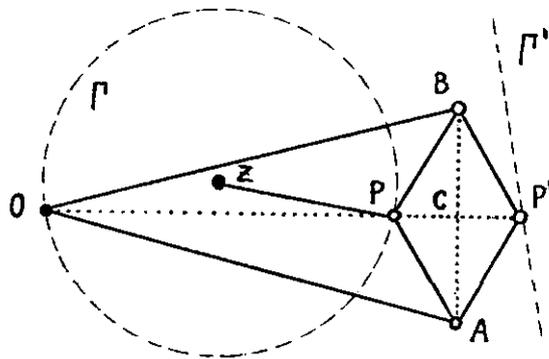


Figura 13

La demostración es inmediata. Tomando el punto auxiliar  $C = PP' \cap AB$  y utilizando el teorema de Pitágoras obtenemos

$$\begin{aligned} OP \cdot OP' &= (OC - PC) \cdot (OC + PC) = OC^2 - PC^2 \\ &= (OC^2 + CA^2) - (PC^2 + CA^2) = OA^2 - AP^2 = r^2. \end{aligned}$$

Como los puntos  $P$  y  $P'$  están siempre al mismo lado respecto de  $O$ , concluimos que  $\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = r^2$ .

Ahora, para obtener movimiento rectilíneo debemos obligar al punto  $P$  a recorrer una circunferencia  $\Gamma$  que pase por  $O$ , con lo que  $P'$  se desplazará a lo largo de la recta  $\Gamma'$ , tal y como indica la Proposición 4. Para conseguirlo basta añadir una séptima varilla  $ZP$ , siendo su longitud igual a la distancia  $OZ$ . Fijando  $Z$  al plano, al mover el mecanismo el punto  $P'$  describirá una recta<sup>3</sup>.

<sup>3</sup>Se puede contemplar el mecanismo inversor de Peaucellier en movimiento en

### El contraparalelogramo de Hart

Harry Hart (1848-1920) descubrió en 1874 un sistema articulado que también producía una inversión del plano, pero sólo necesitaba 5 varillas para producir movimiento rectilíneo. Este mecanismo, conocido como el contraparalelogramo de Hart, es el sistema articulado para trazar una recta con menor número de varillas que se conoce, y aún no se ha demostrado si puede existir o no un tal sistema con número de varillas  $\leq 4$ .

Las cuatro varillas  $AB$ ,  $CD$ ,  $AD$  y  $BC$  de la Figura 14 están articuladas en  $A, B, C, D$  y sus longitudes verifican:  $AB = CD$ ,  $AD = BC$  y  $AB > BC$ . Puesto que los triángulos  $ACB$  y  $CAD$  son congruentes tenemos que las “diagonales”  $AC$  y  $BD$  son paralelas. Tomemos una recta  $OPP'$  paralela a las diagonales  $AC$  y  $BD$ , y marquemos los puntos  $O, P$  y  $P'$ , uno sobre cada una de las varillas tal y como se indica en la Figura 14. Fijando  $O$  al plano, cuando movemos el mecanismo los puntos  $O, P$  y  $P'$  están siempre alineados en una recta paralela a las diagonales. Para verlo, observemos que en la posición inicial de la articulación se tiene que  $OP \parallel BD$  y, por tanto, fijándonos en el triángulo  $ADB$ , obtenemos que  $OA/OD = AP/PB$ . Pero esta relación sólo depende de las longitudes de los segmentos y no de la posición de la articulación, lo que implica que  $OP \parallel BD$  en cualquier posición del sistema articulado. De manera análoga, pero observando ahora el triángulo  $ADC$ , obtenemos que también  $OP' \parallel AC$  en cualquier posición del mecanismo articulado. Como las diagonales  $AC$  y  $BD$  son siempre paralelas, concluimos que  $OP \parallel OP'$ , es decir,  $O, P, P'$  están siempre alineados.

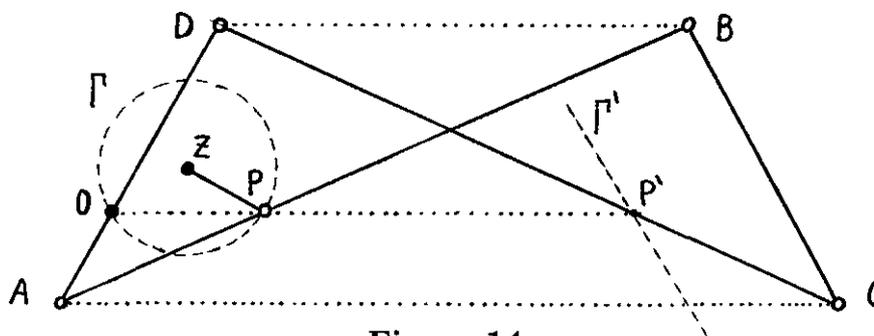


Figura 14

Veamos a continuación que los puntos  $P$  y  $P'$  describen curvas inversas respecto de una circunferencia de centro  $O$ . Para ello, puesto que los triángulos  $AOP$  y  $ADB$ , y los triángulos  $DOP'$  y  $DAC$  son semejantes obtenemos que  $OP/OA = BD/AD$  y  $OP'/OD = AC/AD$ . Por lo tanto,

$$OP \cdot OP' = \frac{OA \cdot OD}{AD^2} \cdot AC \cdot BD.$$

En el segundo miembro de esta igualdad las longitudes  $OA$ ,  $OD$  y  $AD$  son fijas en la articulación de la Figura 14, pero las longitudes  $AC$  y  $BD$  de las diagonales dependen de su posición. Sin embargo, puesto que el cuadrilátero  $ADBC$  es inscribible en una circunferencia, el teorema de Tolomeo (que probamos más abajo) implica que el producto  $AC \cdot BD = AB^2 - BC^2$  es una constante positiva independiente de la posición del mecanismo articulado. Por lo tanto,  $P$  y  $P'$  son puntos inversos respecto de una circunferencia  $\Sigma(O, r)$ , siendo  $r = \frac{1}{AD} \sqrt{OA \cdot OD \cdot (AB^2 - BC^2)}$ . Finalmente, para producir movimiento rectilíneo sólo tenemos que añadir la quinta varilla  $ZP$  de la Figura 14, que obligará al punto  $P$  a recorrer una circunferencia  $\Gamma$  que pasa por el centro de inversión  $O$ .

Por último, sólo queda demostrar el teorema de Tolomeo que dice que “en un cuadrilátero convexo  $ABCD$  inscrito en una circunferencia  $\Gamma$ , el producto de las diagonales es igual a la suma de los productos de los dos pares de lados opuestos, es decir,  $AC \cdot BD = BC \cdot AD + AB \cdot CD$ .” Una vez más una inversión adecuada nos proporciona una sencilla demostración de este resultado. En efecto, invirtamos la circunferencia  $\Gamma$  respecto de la circunferencia de inversión  $\Sigma(A, 1)$  de centro  $A$  y radio 1. Los puntos  $B'$ ,  $C'$  y  $D'$  inversos de los vértices  $B$ ,  $C$  y  $D$  están sobre la recta  $\Gamma'$ , por lo que  $B'D' = B'C' + C'D'$  (ver Figura 15). Ahora bien, del Teorema 9 se sigue que

$$BD/(AB \cdot AD) = BC/(AB \cdot AC) + CD/(AC \cdot AD),$$

y multiplicando por  $AB \cdot AC \cdot AD$  concluimos que  $AC \cdot BD = BC \cdot AD + AB \cdot CD$ .

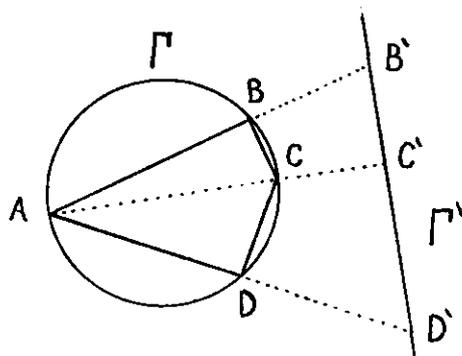


Figura 15

## 2.4 Construcciones geométricas utilizando un compás: demostración de Adler del teorema de construcción de Mohr-Mascheroni

En este apartado demostraremos, utilizando la transformación por inversión, el siguiente resultado: “*toda construcción geométrica realizada con regla y compás puede realizarse utilizando exclusivamente el compás*”. Es decir, podemos prescindir del uso de la regla en tales construcciones.

Lorenzo Mascheroni (1750-1800), poeta y geómetra italiano, profesor de la Universidad de Pavia, publicó este descubrimiento en 1797 en su obra *Geometria del compasso*. Sin embargo, muchos años después de esta publicación, el geómetra danés Johannes Hjelmslev (1873-1950) enseguida se dio cuenta de la importancia de un antiguo libro, titulado *Euclides Danicus* y escrito por Georg Mohr (1640-1697), que un alumno suyo había obtenido en una librería de libros de segunda mano de Copenhague. En este libro se daba una demostración distinta del descubrimiento de Mascheroni y lo más sorprendente del hecho es que *Euclides Danicus* fue publicado en 1672, es decir, 125 años antes de la obra de Mascheroni.

Es evidente que uno no puede trazar una recta utilizando exclusivamente un compás, por lo que en el resultado de Mohr-Mascheroni por “recta” vamos a entender “dos puntos cualesquiera y distintos de ella”, los cuales la determinan unívocamente. Por otro lado, no vamos a entrar en el interesante tema de las construcciones que no se pueden realizar usando la regla y el compás, como son los tres famosos problemas griegos de la duplicación del cubo, la trisección de un ángulo y la cuadratura del círculo. (El tratamiento de estos problemas requiere métodos algebraicos y analíticos.)

La demostración del resultado de Mohr-Mascheroni que vamos a ver a continuación está basada en la inversión y fue publicada en 1890 por August Adler (1863-1923).

En primer lugar, veamos cómo se pueden invertir puntos, rectas y circunferencias utilizando sólo un compás:

(1) *El inverso de un punto*: Sea  $\Sigma(O, r)$  la circunferencia de inversión y  $P$  un punto dado. Vamos a distinguir dos situaciones:

(1.1) El punto  $P$  está situado a una distancia mayor que  $r/2$  del centro de inversión, es decir,  $OP > r/2$ . En este caso la circunferencia  $\Sigma(P, OP)$  cortará a la de inversión  $\Sigma(O, r)$  en dos puntos distintos  $A$  y  $B$ . Entonces,  $\Sigma(A, OA) \cap \Sigma(B, OB) = \{O, P'\}$ , siendo  $P'$  el punto inverso de  $P$  que buscábamos (ver Figura 16).

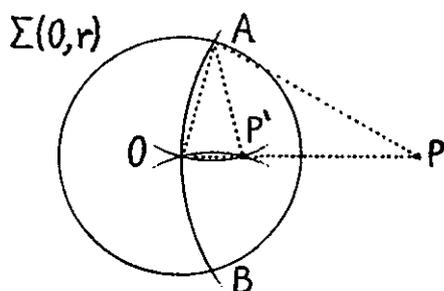


Figura 16

La demostración de que en efecto el punto  $P'$  así construido es el inverso de  $P$  respecto de  $\Sigma(O, r)$  es inmediata si observamos que los triángulos isósceles  $OPA$  y  $OAP'$  son semejantes, lo cual implica que  $OP/OA = OA/OP'$ , es decir,  $OP \cdot OP' = (OA)^2 = r^2$ . Como además el punto  $P'$  así construido está al mismo lado que  $P$  respecto de  $O$ , concluimos que  $\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = r^2$ .

(1.2) Si  $OP \leq r/2$  entonces la circunferencia  $\Sigma(P, OP)$  no corta a  $\Sigma(O, r)$  en dos puntos y no podemos aplicar el método (1.1). En este caso debemos alejarnos de  $P$  hasta obtener un punto auxiliar  $P_1$  que verifique  $OP_1 > r/2$ , aplicar el procedimiento (1.1) a  $P_1$  para encontrar  $P'_1$  y después volver a alejarnos de  $P'_1$  hasta obtener el punto  $P'$  buscado.

Es decir, debemos obtener un punto  $P_1$  tal que el segmento  $\overline{OP_1} = n \cdot \overline{OP}$ , donde  $n$  es un número natural suficientemente grande para que se cumpla que  $OP_1 > r/2$  (por ejemplo,  $n = 3$  en la Figura 17). El punto buscado  $P'$  inverso de  $P$  será aquel tal que el segmento  $\overline{OP'} = n \cdot \overline{OP'_1}$ . Basta echar un vistazo a la Figura 17 para darse cuenta de que esta construcción puede realizarse trazando varios arcos de circunferencia, con lo que en la obtención de  $P'$  hemos utilizado exclusivamente el compás.

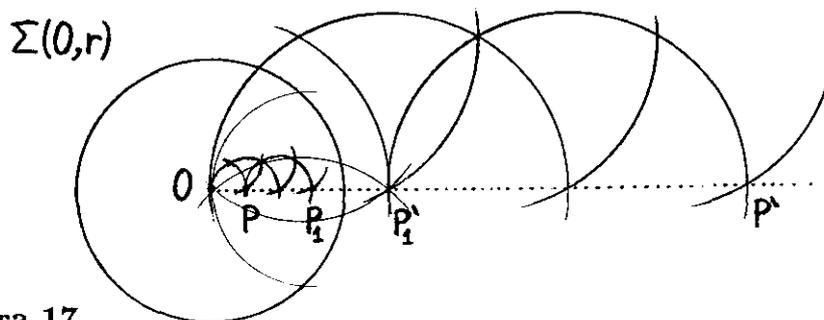


Figura 17

La justificación de este método es sencilla ya que sustituyendo  $\overline{OP_1} = n \cdot \overline{OP}$  y  $\overline{OP_1} = \overline{OP}/n$  en la expresión  $\overline{OP_1} \cdot \overline{OP_1} = r^2$ , la cual se cumple por (1.1), obtenemos que  $\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = r^2$ , es decir,  $P'$  es en efecto el inverso del punto  $P$  respecto de  $\Sigma(O, r)$ .

(2) *La circunferencia  $l'$  inversa de una recta dada  $l$  que no pasa por el centro de inversión:* Sean  $A, B$  dos puntos de una recta  $l$  que no pasa por el centro de la circunferencia de inversión  $\Sigma(O, r)$ . Por la Proposición 3 sabemos que  $l'$  es una circunferencia que pasa por  $O$ , así que para trazar  $l'$  nos basta con encontrar su centro. Para ello, sea  $O_1$  el simétrico del punto  $O$  respecto de la recta  $l$ , el cual se obtiene trazando los arcos de circunferencia  $\Sigma(A, OA)$  y  $\Sigma(B, OB)$  (ver Figura 18). Sea  $O'_1$  el punto inverso de  $O_1$  respecto de  $\Sigma(O, r)$ , el cual fue obtenido en el apartado (1) utilizando exclusivamente un compás. Entonces  $l' = \Sigma(O'_1, OO'_1)$  es la circunferencia inversa de la recta  $l = AB$ .

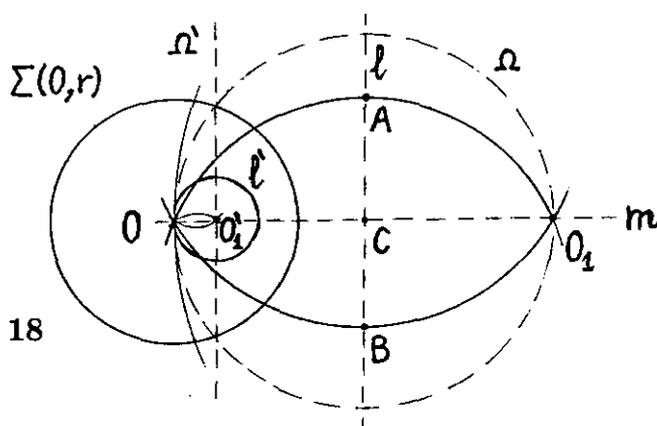


Figura 18

Veamos que la circunferencia  $l'$  así construida es en efecto la curva inversa de  $l$ : Tomemos la circunferencia auxiliar  $\Omega = \Sigma(C, OC)$  de centro el punto  $C$  de intersección de las rectas  $l$  y  $m = OO_1$ . Como  $m, \Omega \perp l$  entonces  $m', \Omega' \perp l'$  ya que la ortogonalidad se conserva en la inversión. Ahora bien,  $m' \equiv m$  y  $\Omega'$  es una recta que pasa por  $O'_1$  y es ortogonal a la circunferencia  $l'$ . Por tanto,  $m'$  y  $\Omega'$  son diámetros de  $l'$  que se cortan en el punto  $O'_1$  inverso de  $O_1 = m \cap \Omega$ , por lo que  $O'_1$  es necesariamente el centro de  $l'$ .

(3) *La circunferencia  $\Gamma'$  inversa de una circunferencia  $\Gamma$  que no pasa por el centro  $O$  de la circunferencia de inversión  $\Sigma(O, r)$ :* Para trazar  $\Gamma'$  usando sólo el compás procedemos de la siguiente manera. Usando (1) obtenemos el punto  $O_1$

inverso de  $O$  respecto de la circunferencia  $\Gamma$  y, usando de nuevo (1), obtenemos el punto  $O'_1$  inverso de  $O_1$  respecto de  $\Sigma(O, r)$ . Entonces  $O'_1$  es el centro de la circunferencia  $\Gamma'$  buscada. Para trazar  $\Gamma'$  basta tomar ahora un punto cualquiera  $A$  de la circunferencia  $\Gamma$ , obtener su inverso  $A'$  utilizando (1), y así  $\Gamma'$  es la circunferencia de centro  $O'_1$  y radio  $O'_1A'$  (ver Figura 19).

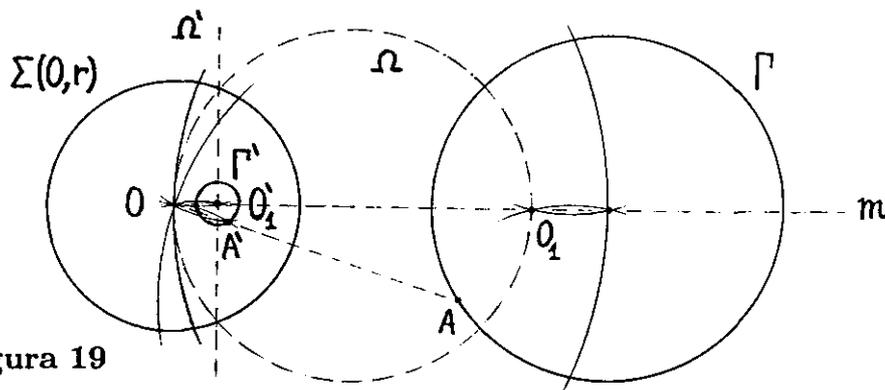


Figura 19

Para justificar esta construcción es claro que basta con demostrar que  $O'_1$  es en efecto el centro de  $\Gamma'$ . Observamos primero que como  $O$  y  $O_1$  son un par de puntos inversos respecto de  $\Gamma$  entonces, según la Proposición 8, cualquier circunferencia que pasa por  $O$  y  $O_1$  es ortogonal a  $\Gamma$ . Sea  $\Omega$  la circunferencia que tiene por diámetro el segmento  $OO_1$  y denotemos por  $m$  la recta  $OO_1$ . Como  $\Omega, m \perp \Gamma$ , invertimos  $\Omega, m$  y  $\Gamma$  respecto de  $\Sigma(O, r)$  y obtenemos que las rectas  $\Omega'$  y  $m' \equiv m$  son ortogonales a  $\Gamma'$ . Por tanto,  $\Omega'$  y  $m$  son diámetros de  $\Gamma'$ . Además  $\Omega \cap m = \{O, O_1\}$ , con lo que los diámetros  $\Omega'$  y  $m$  se cortan en el punto  $O'_1$ , es decir,  $O'_1$  es en efecto el centro de  $\Gamma'$ .

Estamos ya en condiciones de demostrar el teorema de Mohr-Mascheroni, es decir, *cualquier construcción geométrica  $\mathcal{F}$  realizada con el compás y la regla puede realizarse utilizando sólo el compás.*

*Demostración:* Puesto que en una construcción  $\mathcal{F}$  de este tipo todo punto se obtiene mediante intersección de dos circunferencias, de una recta y una circunferencia o de dos rectas y, por muy complicada que pueda ser  $\mathcal{F}$ , ésta se consigue realizando un número finito de estos procedimientos, basta demostrar que dados cuatro puntos distintos  $A, B, C, D$  se pueden resolver los siguientes tres problemas básicos utilizando exclusivamente un compás:

*Problema 1.* Hallar los puntos de intersección de las circunferencias  $\Sigma(A, AB)$  y  $\Sigma(C, CD)$ .

*Problema 2.* Hallar los puntos de intersección de la recta  $AB$  y la circunferencia  $\Sigma(C, CD)$ .

*Problema 3.* Hallar el punto de intersección de las rectas  $AB$  y  $CD$ .

Ahora bien, la solución del Problema 1 es evidente usando un compás, por lo que resolveremos los Problemas 2 y 3 mediante una inversión adecuada. Así, para resolver el Problema 2 trazamos una circunferencia  $\Sigma(O, r)$  de manera que su centro  $O$  no esté ni en la recta  $l = AB$  ni en la circunferencia  $\Gamma = \Sigma(C, CD)$  (ver Figura 20). Invertimos  $l$  y  $\Gamma$  respecto de  $\Sigma(O, r)$ , lo que por (2) y (3) se puede realizar utilizando el compás únicamente, y obtenemos dos circunferencias  $l'$  y  $\Gamma'$ . Los puntos de corte  $X', Y'$  de estas dos circunferencias son los inversos de los puntos buscados  $\{X, Y\} = l \cap \Gamma$ . Invertimos entonces  $X'$  e  $Y'$  para obtener  $X$  e  $Y$ , lo que nuevamente se puede realizar usando sólo el compás tal y como hemos visto en (1).

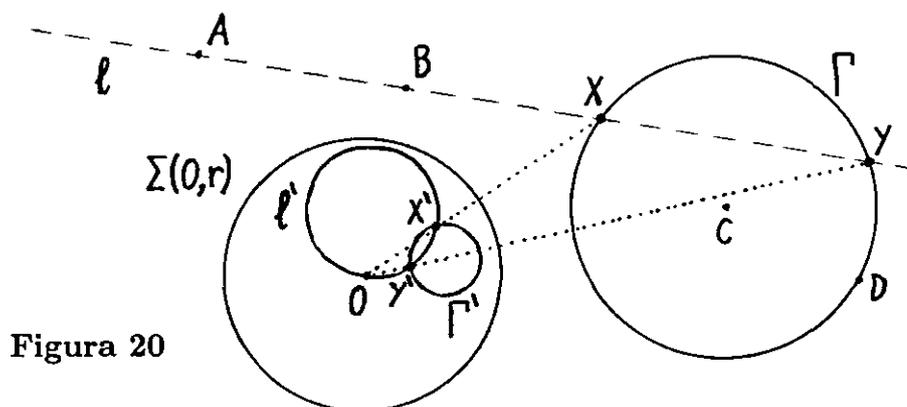


Figura 20

Finalmente, el Problema 3 se resuelve de manera similar. Tomamos una circunferencia de inversión  $\Sigma(O, r)$  cuyo centro  $O$  no esté ni en la recta  $l = AB$  ni en la recta  $m = CD$ . Invertimos  $l$  y  $m$  respecto de  $\Sigma(O, r)$  para obtener dos circunferencias  $l'$  y  $m'$  que se cortarán, además de  $O$ , en el punto  $X'$  inverso del punto buscado  $X = l \cap m$ . Este punto  $X$  se obtiene invirtiendo  $X'$  y, en virtud de (1) y (2), el Problema 3 queda también resuelto utilizando exclusivamente un compás. ■

Como acabamos de demostrar, todas las construcciones geométricas que son

realizables con regla y compás son posibles usando sólo un compás. Sin embargo, no todas ellas son posibles usando únicamente una regla. No es difícil demostrar que el punto medio entre dos puntos dados no se puede obtener con sólo una regla, lo que confiere al compás el carácter de indispensable en las construcciones de la geometría elemental.

En 1822 Jean-Victor Poncelet (1788-1867), inspirado por los resultados de Mascheroni, sugirió un método para demostrar que *“cada problema de construcción resoluble por medio del compás y la regla puede solucionarse valiéndose únicamente de una regla, siempre y cuando en el plano del dibujo se fije previamente una circunferencia y su centro”*. La demostración detallada de este resultado fue dada por Steiner en 1833 y por ello se conoce como el teorema de Poncelet-Steiner<sup>4</sup>. Por lo tanto, según este resultado, para que la regla sea equivalente al compás es suficiente con usar *sólo una vez* el compás.

A modo de curiosidad, todas las construcciones geométricas realizadas con regla y compás pueden resolverse sin ninguna herramienta, simplemente doblando y plegando el papel que representa el plano de la construcción. Este resultado se sigue de la obra *Geometric Exercises in Paper Folding* de T. Sundara Row de finales del siglo pasado<sup>5</sup>.

### 3 Transformaciones de Möbius

En la sección anterior hemos visto cómo la inversión permite resolver de manera sencilla muchos problemas de la geometría plana. En la resolución de estos problemas no hemos hecho uso de coordenadas cartesianas en el plano, es decir, hemos utilizado razonamientos puramente sintéticos. Como anécdota, en el siglo XIX el problema de Apolonio sirvió como una especie de problema de ensayo al competir entre geometría sintética y analítica. Poncelet y Steiner fueron ardientes defensores de la geometría sintética y les disgustaban los métodos analíticos hasta el punto de arremeter en ocasiones contra los que los utilizaban. Sin embargo, la introducción y desarrollo de métodos analíticos permitió tratar con éxito problemas que la geometría sintética

---

<sup>4</sup>Una demostración de este resultado se puede encontrar en el libro de Howard Eves mencionado anteriormente.

<sup>5</sup>La primera obra que da un tratamiento riguroso de este tema es debida a Robert C. Yates, *Geometrical Tools, A Mathematical Sketch and Model Book*, Educational Publishers, 1949.

no había sido capaz de resolver (como, por ejemplo, demostrar la imposibilidad de ciertas construcciones con regla y compás).

Veamos cómo se describe la inversión respecto de una circunferencia por medio de coordenadas. Identificando el plano inversivo con  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ , la inversión respecto de la circunferencia  $\Sigma(O, 1)$  centrada en el origen de coordenadas y de radio la unidad se expresa por  $z \mapsto 1/\bar{z}$ , siendo  $\bar{z}$  el conjugado del número complejo  $z$ . Esta transformación forma parte de un grupo de transformaciones más general que introducimos a continuación.

En primer lugar, consideremos las *transformaciones de Möbius* de  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ , las cuales vienen dadas por

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}, \quad ad \neq bc,$$

donde  $\infty \mapsto a/c$  y  $-d/c \mapsto \infty$ . Estas transformaciones de  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$  forman un grupo, que denotamos por *Möb*, y la geometría correspondiente es precisamente la geometría de la recta proyectiva compleja. Felix Klein propuso en 1872 la idea de pensar en una geometría como en un par  $(X, G)$ , donde  $X$  es un conjunto y  $G$  es un grupo de transformaciones de  $X$  que define las relaciones invariantes de la geometría (*Erlanger Programm*).

Un grupo de transformaciones de  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$  que contiene al grupo *Möb* es el generado por todas las transformaciones de Möbius junto con la transformación  $z \mapsto \bar{z}$  dada por la conjugación compleja. Este grupo se denomina *grupo inversivo* y lo denotamos por *Inv*. (Notar que la inversión  $z \mapsto 1/\bar{z}$  pertenece a *Inv*, pero no al grupo *Möb*.) La geometría correspondiente a  $(\mathbb{C} \cup \{\infty\}, \text{Inv})$  se denomina *geometría inversiva*.

Enunciamos sin demostración<sup>6</sup> algunos resultados interesantes sobre las transformaciones pertenecientes al grupo *Inv*. En primer lugar, se puede probar que cada biyección de  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$  que lleva '*circunferencias*' a '*circunferencias*' es un elemento del grupo inversivo *Inv*. Por otro lado, si por '*reflexión*' designamos una reflexión en una recta (por ejemplo,  $z \mapsto \bar{z}$  es la reflexión en el eje real) o una inversión respecto de una circunferencia, entonces se tiene que cada transformación de Möbius es producto de un número par de '*reflexiones*'. En particular, las '*reflexiones*' generan el grupo inversivo *Inv*.

<sup>6</sup>Las demostraciones se pueden consultar por ejemplo en el libro de P.M. Neumann, G.A. Stoy y E.C. Thompson, *Groups and Geometry*, Oxford Univ. Press, 1994.

Volviendo a la idea de Klein citada anteriormente, si  $(X', G')$  y  $(X, G)$  son dos geometrías, se dice que  $(X', G')$  es una *subgeometría* de  $(X, G)$  si  $X' \subset X$  y  $G' \subset G$ . Los conceptos de una geometría aparecen automáticamente en todas sus subgeometrías.

En la geometría euclídea el conjunto subyacente es el plano complejo, es decir,  $X = \mathbb{C}$  y el grupo  $G$  es el conjunto de transformaciones de la forma  $z \mapsto e^{i\theta}z + b$ , donde  $\theta$  y  $b$  son constantes,  $\theta$  real,  $b$  compleja. (Estas transformaciones representan los movimientos rígidos en el plano, es decir, rotaciones seguidas de traslaciones.) Por tanto, la geometría euclídea es una subgeometría de la geometría de Möbius, que a su vez es una subgeometría de la geometría inversiva. Los problemas de la Sección 2 estaban planteados en el marco de la geometría euclídea y hemos hecho uso de la inversión para resolverlos; dicho de otro modo, hemos resuelto problemas de la geometría euclídea plana considerando ésta como subgeometría de la geometría inversiva.