



Facultat de Matemàtiques i Estadística
Universitat Politècnica de Catalunya
Lección inaugural del curso 2003-2004
22 de setiembre de 2003

La ecuación del calor

Professor Luis Caffarelli
Department of Mathematics
University of Texas at Austin

Fourier

La ecuación del calor fue propuesta por Fourier en 1807—en su memoria sobre la propagación del calor en los cuerpos sólidos.

En ella proponía además el germen de lo que pasaría a ser la Teoría de las Series de Fourier.

Tan controvertida fue esta última, que tomó quince años, hasta 1822, para que la Academia de Ciencias decidiese publicarla.

Modelos matemáticos

La ecuación del calor es un modelo matemático (quizás el más sencillo) que trata de describir la evolución de la temperatura en un cuerpo sólido.

Consideremos, para simplificar la presentación, una barra metálica aislada de longitud uno ($0 \leq x \leq 1$), inicialmente a temperatura cero, que después de un cierto tiempo, t_0 , hemos calentado a una temperatura $T(x, t_0)$ manteniendo sus extremos, $x = 0$ y $x = 1$, a temperatura cero.

A partir de ese instante, t_0 , dejamos que la temperatura $T(x, t_0)$ evolucione libremente y estamos interesados en un modelo matemático que nos permita predecir la temperatura $T(x, t)$ para todo x en el intervalo $[0, 1]$, en todo tiempo futuro (es decir, para todo $t > t_0$), a partir de nuestro conocimiento de $T(x, t_0) = T_0(x)$ y del hecho que para $x = 0$ o $x = 1$ la temperatura permanece igual a cero.

Naturalmente no hay un “único modelo”. Hay infinitos, dependiendo de la precisión y el rango de valores en que pretendemos sea válido (altas o bajas temperaturas cambiarán el comportamiento del material, impurezas podrían ser relevantes, etc.).

El modelo propuesto por Fourier puede sintetizarse así:

1. La energía (calórica) necesaria para llevar un trozo de la barra de longitud $\Delta\ell$ de temperatura cero a temperatura T es proporcional a $\Delta\ell \times T$ (i.e., la *densidad de energía*, $e = kT$, es proporcional a la temperatura, con k una constante característica del material).
2. La energía fluye de las zonas de mayor temperatura a las de menor temperatura. Más precisamente, la densidad de flujo de energía es

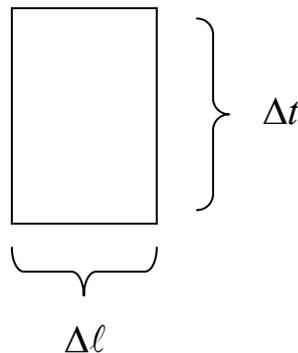
$$f(x) = -\theta D_x T$$

(o $\vec{f}(x) = -\theta \nabla T$ en varias dimensiones), nuevamente θ es una constante característica del material.

3. La energía se conserva. Si tomamos un trozo de barra, $\Delta\ell$, la energía contenida en $\Delta\ell$ en el instante t_2 es igual a la energía que había en $\Delta\ell$ en el instante t_1 más el “flujo de energía” que penetró en los extremos x_1, x_2 en el intervalo de tiempo de t_1 a t_2 . Matemáticamente:

$$\int_{\Delta\ell} (e(x, t_2) - e(x, t_1)) dx = \int_{t_1}^{t_2} (-f(x_2, t) + f(x_1, t)) dt$$

Si dibujamos el rectángulo $\Delta\ell \times \Delta t$,



la primera integral ocurre en los bordes superior e inferior, mientras que la segunda ocurre en los laterales. Para poder compararlas, necesitamos poder escribirlas en un dominio común, el rectángulo. Lo logramos tomando derivadas:

$$\int_{\Delta\ell \times \Delta t} D_t e(x,t) dx dt = \int_{\Delta\ell \times \Delta t} -D_x f(x,t) dx dt$$

Como esta relación se debe verificar para cualquier rectángulo, no importa cuan pequeño, necesariamente los integrandos deben ser iguales:

$$D_t e + D_x f = 0.$$

Recordando las expresiones de e y f en función de T , obtenemos la ecuación

$$kD_t T = \theta D_{xx} T$$

En términos actuales las relaciones 1) y 2) se denominan *leyes constitutivas*, y establecen relaciones puntuales entre las *variables de estado*, e, f, T y sus derivadas, que dependen de las características del material, etc. La relación 3), en cambio, es de índole diversa, es una *ley de conservación*, y establece que ciertas cantidades (masa, energía, etc.) se conservan a través de un proceso. Eso no quiere decir que sean puntualmente constantes. En un gas, por ejemplo, la masa fluye de una parte a otra. Lo que una ley de conservación hace es postular la existencia de una variable conservada, e , y un flujo, \vec{f} , que satisfacen

$$D_t e + D_x f = 0.$$

(o $D_t e + \text{div } \vec{f} = 0$).

En definitiva, escribir un modelo matemático consiste en *elegir aquellas variables de estado que son relevantes para el fenómeno que queremos describir, encontrar* (en general experimentalmente) *sus leyes constitutivas, y como se conservan*.

Existencia y unicidad

Quizás la variación más importante que han sufrido estas ideas hoy en día está en tomar en cuenta efectos aleatorios.

Independientemente de cuan bueno sea un modelo matemático para representar la realidad, debe tener un mínimo de coherencia interna.

Si las relaciones que especificamos son excesivas, serán en general contradictorias y nuestro problema puede no tener solución.

Si son muy pocas, puede que tengamos muchas soluciones distintas, cuando en realidad esperamos tener una solución única.

Por eso el próximo paso de Fourier fue tratar de encontrar solución al problema. Dada la temperatura inicial, $T_0(x)$, y la condición

$$T(1,t) = T(0,t) = 0$$

para todo $t > t_0$, se trata de demostrar que existe una única función $T(x,t)$ que satisface la ecuación

$$T_t = T_{xx}$$

(hacemos $k = \theta = 1$).

Intentemos primero encontrar algunas soluciones para T_0 particulares de la forma

$$T(x,t) = T_0(x)g(t).$$

Para ello es necesario que

$$g'(t)T_0(x) = g(t)T_0''(x)$$

o que

$$\frac{g'(t)}{g(t)} = \frac{T_0''(x)}{T_0(x)} = \lambda \text{ constante}$$

(la única forma posible para que dos funciones de variables distintas sean iguales es que sean constantes, ya que podemos fijar t y variar x sobre todos sus valores posibles).

Como $T_0(0) = T_0(1) = 0$, los únicos pares posibles son

$$T_0(x) = \text{sen}(n\pi x)$$

$$g(t) = e^{-(n\pi)^2 t}.$$

Pero el problema que estábamos considerando es lineal. Por lo tanto, cualquier combinación de soluciones

$$T(x,t) = \sum c_n \text{sen}(n\pi x) e^{-(n\pi)^2 t}$$

es una nueva solución, con dato inicial

$$T_0(x) = \sum c_n \text{sen}(n\pi x).$$

Fourier demuestra entonces que cualquier función T_0 (digamos continuamente diferenciable, con $T_0(0) = T_0(1) = 0$) puede expresarse de esa manera, y da una fórmula para los coeficientes.

Nace así el análisis de Fourier, tan revolucionario que tomó quince años para que matemáticos de la época aceptaran que una serie de funciones altamente oscilatoria como es $\sin(n\pi x)$ pueda representar, por ejemplo, un arco de parábola o una poligonal.

Análisis armónico

El análisis de Fourier ha pasado a llamarse análisis armónico. Podemos decir que consiste en describir una función no por sus características especiales (donde es grande, donde es pequeña), sino por la influencia que cada frecuencia ($\sin \lambda x$) tiene en su composición. Como tal, ocupar un lugar fundamental en todo lo que se relaciona a teoría de ondas, transmisión de todo tipo de señales, reconstrucción de imágenes por ultrasonido, análisis espectral, etc.

Recientemente ha tomado gran importancia una forma de descomponer funciones en “trozos elementales” que describen las propiedades oscilatorias de la función simultáneamente en el espacio físico (la variable x) y el espacio de frecuencias (la variable n o λ).

Estos trozos elementales se llaman *wavelets* y han revolucionado la compresión de imágenes, la transmisión de datos, etc.

El núcleo de Gauss y paseos al azar

Hay en realidad una forma más convincente de representar a la solución $T(x,t)$, y que exhibe más claramente las propiedades cualitativas de la propagación del calor. Consiste en poner inicialmente “masas puntuales”.

Supongamos ahora que la barra es infinita, está a temperatura cero y logramos poner una “masa puntual” de una unidad calor en el origen y en el instante t_0 . Es decir, logramos concentrar una cantidad $c=1$ de energía calórica en el origen de forma tan veloz que para nuestra escala de tiempos resulta instantánea.

¿Como evoluciona la temperatura a continuación?

Un pequeño análisis de autosemejanza: si $T(x,t)$ es una solución de la ecuación, también lo es $aT(bx, b^2t)$, lo cual nos permite calcular que en este caso

$$T(x,t) = \frac{1}{(\pi t)^{1/2}} e^{-x^2/4t} = G(x,t).$$

Este es el núcleo (“la campana”) de Gauss, o fórmula de dispersión de error.

Si trasladamos la masa puntual a x_0 , la nueva fórmula es

$$T(x,t) = G(x - x_0, t),$$

puesto que la ecuación es invariante por traslaciones.

Si superponemos masas puntuales de intensidades c_i en los puntos x_i

$$T(x,t) = \sum c_i G(x - x_i, t)$$

y finalmente, para una densidad de energía $e = T_0(x)$,

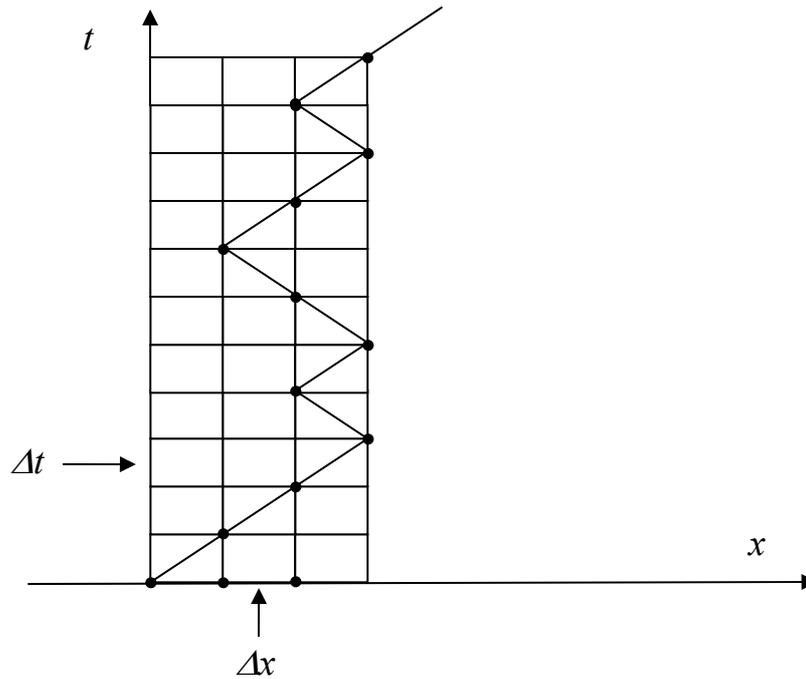
$$T(x,t) = \int G(x - x_0, t) T_0(x_0) dx_0.$$

Esta representación nos dice entre otras cosas y de manera inmediata, que

- a) si la temperatura original es positiva, permanece positiva.
- b) Que el efecto de cualquier cambio de temperatura se hace sentir instantáneamente en toda la barra.
- c) Que la temperatura T_0 puede ser altamente discontinua y un instante más tarde se regulariza.

Pero, ¿cual es la relación entre la ecuación del calor y la propagación de errores?

Supongamos que en el instante t_0 estamos parados en el origen. Revoaleamos una moneda; si sale cara, damos un paso, Δx , a la derecha. Si sale cruz, a la izquierda.



Cada intervalo Δt , repetimos la operación.

¿Cual es la probabilidad $u(x, t)$ que en tiempo t nos encontremos en la posición x ?

Parece complejo de calcular, pero podemos observar que en el instante $t - \Delta t$ estábamos o en $x + \Delta x$ o en $x - \Delta x$ y que de allí nos movimos con probabilidad $\frac{1}{2}$ a (x, t) , es decir

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (u(x + \Delta x, t - \Delta t) + u(x - \Delta x, t - \Delta t))$$

o sea

$$u(x, t) - u(x, t - \Delta t) = \frac{1}{2} (u(x + \Delta x, t - \Delta t) + u(x - \Delta x, t - \Delta t) - 2u(x, t - \Delta t))$$

Todo depende ahora del balance entre Δt y $(\Delta x)^2$. Si elegimos $\frac{(\Delta x)^2}{\Delta t} = 1$,

podemos dividir ambos miembros por Δt y obtenemos:

$$\frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{\Delta^2 u}{(\Delta x)^2},$$

que es una forma discreta de la ecuación del calor.

Es decir, en el límite $\Delta t \rightarrow 0$, u converge a la solución de la ecuación del calor. Pero en el instante inicial, estamos parados en el origen con probabilidad 1, es decir

$$u(x, t) = G(x, t).$$

Esta es una versión del teorema central del límite que dice que si repetimos en forma independiente n veces un mismo experimento X_i de esperanza cero, entonces la distribución de probabilidad de

$$X = \frac{\sum X_i}{\sqrt{n}}$$

converge a una Gaussiana.

Difusiones no lineales

Es por eso que a una ecuación del tipo de la del calor se le suele llamar una ecuación de difusión. Las ecuaciones de difusión aparecen en diversos campos. Por ejemplo, en dinámica de poblaciones la densidad de energía e es substituida por la densidad de población σ , y una de las muchas razones por las que una población migra es para ir hacia zonas de densidad menor, es decir, el flujo de población tiene la forma

$$f = -\nabla \sigma + \dots \text{ (otras razones)}$$

y por lo tanto las ecuaciones correspondientes serán de la forma

$$D_t \sigma = \Delta \sigma + \dots$$

O, en una epidemia, la probabilidad de infección en un lugar x , en un instante de tiempo t , depende en forma monótona de las probabilidades de los puntos adyacentes unas horas antes. Esto da lugar, infinitesimalmente, a una ecuación de la forma

$$D_t e = F(D_x^2 e, \nabla e)$$

donde e es la esperanza matemática de infección en x, t .

En un fluido viscoso, las partículas adyacentes a una dada tratan de “arrastrarla” o “frenarla” si intenta dispararse.

El punto que quiero destacar es que, en todos estos fenómenos, el término de “difusión” o “viscosidad” induce un proceso de “achatamiento” o “promediado” de las variables de estado que caracteriza a los problemas difusivos o viscosos.

La influencia de la teoría de “ecuaciones parabólicas” es hoy en día inmensa, en las ecuaciones de fluidos (Navier–Stokes, flujo en medios porosos, ecuaciones de cambio de fase), en teoría de control óptimo y teoría de juegos (ecuaciones totalmente no lineales), modelado de dinámica de poblaciones, epidemiología, matemática de las finanzas, etc.