Lógica y Razonamiento

por

Begoña Carrascal Platas, Universidad del País Vasco

Introducción

A pesar de la gran revolución que supusieron las ideas de Frege en el desarrollo de métodos y conceptos lógicos que están en la base de la lógica actual, el gran desarrollo de la lógica tuvo lugar a partir de la crisis de fundamentos de la matemática de finales del siglo XIX. En esa época Cantor propuso la teoría de conjuntos como nuevo lenguaje de la matemática, mediante el cual se pudieran definir sus diferentes conceptos.

Su definición de conjunto era intuitiva: 'un conjunto es una colección de elementos con una propiedad en común' y muy pronto salieron a la luz paradojas a partir de dicha definición. Una de las más conocidas es la presentada por el matemático y lógico Bertrand Russell:

Paradoja de Russell

Sea el conjunto $A = \{B/B \notin B\}$. ¿Es A un elemento de si mismo? Cada una de las posibles respuestas a esta pregunta lleva a contradicción ya que:

- Si $A \in A$, por definición de A, tenemos $A \notin A$.
- Si $A \notin A$, por la misma razón, tenemos $A \in A$.

El problema está en la definición intuitiva de conjunto, que permite crear conjuntos 'demasiado' grandes, lo que nos lleva a este tipo de situaciones paradójicas.

Para tratar de fundamentar las matemáticas sobre bases sólidas se propusieron diferentes caminos y esto supuso un desarrollo espectacular de los métodos lógicos en relación con los avances que se habían dado desde la época de los estoicos (que propusieron la lógica proposicional) y de los escritos lógicos de Aristóteles (*Organon*).

¿Qué entendemos por lógica hoy en día?

Si partimos de una definición general y popular de lógica, diríamos que lógica es el estudio de los métodos que permiten evaluar argumentos o razonamientos, es decir, el estudio de métodos para evaluar si las premisas de un argumento apoyan de una forma adecuada a su conclusión. Esta sería la idea de la que se partió en la antigüedad al desarrollar las primeras teorías lógicas.

Sin embargo, tal y como hemos dicho anteriormente, las bases de la lógica actual se pueden encontrar en los trabajos desarrollados a finales del siglo XIX a consecuencia de la crisis en la fundamentación de las matemáticas (aunque las propiedades de las lógicas que surgieron a partir de dicha crisis de fundamentos no se demostraron hasta mitades del siglo XX) y la proximidad de la lógica, en esta época y en años posteriores, tanto en sus métodos como en sus aplicaciones, a las teorías matemáticas, llevaron a que la idea original de considerarla como la ciencia del razonamiento se ampliara y, de alguna forma, se difuminara por su aplicación a otras tareas.

Hoy en día hay un resurgir de la idea original intentando delimitar el tipo de lógica que es adecuada para dar cuenta de los razonamientos ordinarios hechos en lenguaje natural. Sin embargo, hasta la fecha y a pesar de haberse barajado diferentes alternativas, no hay consenso a la hora de elegir ninguna de ellas como la más adecuada para explicar este tipo de razonamientos. En general, la mayoría de las teorías siguen basándose en la lógica clásica aunque haciendo notar sus deficiencias a la hora de explicar ciertas formas de razonamiento natural.

Para intentar explicar la idea de lógica, partiremos de una definición general y formal que después aplicaremos a los casos concretos de la *lógica proposicional* y de la *lógica de primer orden*. Veremos alguna de las aplicaciones de estas lógicas al campo matemático y finalmente, daremos una serie de ejemplos para ver su adaptación (o falta de) al razonamiento en lenguaje natural.

Para comenzar citemos brevemente cuáles son los elementos principales que sirven para identificar a una lógica.

En primer lugar necesitamos un *lenguaje formal*. En un lenguaje formal, a diferencia de un lenguaje natural, todos los símbolos (las 'palabras' del lenguaje) que lo componen están determinados 'a priori', lo mismo que las reglas que nos permiten combinarlos (lo que en un lenguaje natural correspondería a la gramática). Estas reglas nos especifican las expresiones bien formadas de nuestro lenguaje, poniendo, por tanto, las bases de su sintaxis. A estas expresiones bien formadas también se les llama *fórmulas* del lenguaje.

Las reglas de formación suelen venir dadas de una forma recursiva y para expresarlas utilizamos, habitualmente, los símbolos de un lenguaje diferente al anterior y que llamaremos *metalenguaje*. Un metalenguaje es, por tanto, un nuevo lenguaje que se utiliza para hablar sobre el lenguaje primitivo o *lenguaje objeto*. Normalmente, el metalenguaje es más rico en símbolos que el lenguaje objeto, es decir, contiene, al menos, todos los símbolos del lenguaje objeto.

El lenguaje formal de la mayoría de las lógicas se puede poner, en general, en correspondencia biunívoca con parte de un lenguaje natural o matemático. Cuanto más sea el poder expresivo del lenguaje formal más será la capacidad de expresar las características y conceptos de la parte en correspondencia con él, pero esto también, en general, supondrá perder propiedades (meta)lógicas, como veremos más adelante.

Distingamos ahora dos clases de símbolos que se suelen encontrar en un lenguaje formal: las *constantes lógicas* y las *constantes no-lógicas*.

El significado de las constantes lógicas está fijado de antemano para cada lógica, mientras que las constantes no-lógicas admiten interpretaciones diferentes de acuerdo con el universo o ámbito de interpretación que estemos considerando. El universo de interpretación es un conjunto no vacío y dependiendo de sus elementos obtendremos interpretaciones diferentes para estos símbolos no-lógicos.

Entre los símbolos lógicos más habituales tenemos $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\forall$, $\exists$, $\ldots$ (negación, conjunción, disyunción, condicional, cuantificador universal, cuantificador existencial,...) y su significado lógico trataría de aproximarse al significado habitual de las expresiones del lenguaje natural *no*, *y*, *o*, *si... entonces*, *todo...*, *existe un...*, ...

Entre los símbolos no-lógicos destacaremos las *constantes individuales*, los *símbolos de predicado* o de *relación* y los *símbolos de función*. La interpretación de una constante individual será un elemento destacado de un universo, la de un símbolo de predicado o relación (n-ario), una relación (n-aria) de los elementos de dicho universo y la de un símbolo de función (n-ario) una aplicación (n-aria) de elementos del universo en el universo.

Sin embargo, como hemos dicho anteriormente, cuando especificamos las fórmulas del lenguaje, estamos en el ámbito de la sintaxis. En este ámbito las fórmulas no tienen significado, son únicamente sucesiones de símbolos (finitas, en la mayoría de las lógicas). Para dotar de significado a estas fórmulas tenemos que pasar al campo de la semántica.

Uno de los conceptos fundamentales de este campo es el de *verdad*, es decir, hay que especificar las condiciones en las que una fórmula es verdadera.

Otro concepto importante en este campo y que se define a partir del concepto de verdad es el de *consecuencia semántica* que denotaremos con el símbolo, $\models$. Mediante esta idea definimos si una conclusión se sigue semánticamente de un conjunto de premisas, es decir, si a partir de unas premisas verdaderas, la conclusión es también necesariamente verdadera.

Resumiendo, algunos de los conceptos que se estudian en el campo de la semántica serían satisfabilidad, verdad, modelo, validez lógica, consecuencia semántica, equivalencia semántica, etc.

En general, el desarrollo de una lógica se hace de una forma paralela, tanto sintáctica como semánticamente y luego se buscan puentes entre los resultados obtenidos en ambos campos.

En el campo sintáctico, tal y como hemos indicado, las fórmulas no tienen significado, son únicamente cadenas de símbolos y para avanzar en este campo necesitamos un *sistema formal* dotado de un cuerpo deductivo que nos permita decidir cuales de esas fórmulas son aceptables en relación con el campo que estemos tratando de formalizar.

Los sistemas formales son de dos clases, *axiomáticos* o *naturales*. Dado un sistema formal, la relación que se considera entre las fórmulas es la relación de *derivación*, $\vdash$, o de *consecuencia sintáctica*, que nos expresa cuando una fórmula se sigue de una serie de premisas de acuerdo a las reglas del sistema. Hilbert fue el más ardiente defensor del método axiomático.

En un sistema axiomático tenemos unas primeras fórmulas o *axiomas* que se aceptan 'a priori' de acuerdo a determinados criterios. A partir de ellos, y por medio de unas reglas de inferencia, deducimos los *teoremas* de nuestro sistema. Una *prueba* o *demostración* de un teorema es una cadena finita de fórmulas, tal que cada una de las fórmulas de la cadena es o bien un axioma o bien una fórmula deducida de las anteriores en la cadena y de los axiomas por aplicación de las reglas de inferencia. La última fórmula de la cadena es el teorema demostrado. Una *derivación* de una fórmula a partir de un conjunto de premisas es igualmente una cadena finita de fórmulas en la cual ahora además de las fórmulas citadas anteriormente también pueden aparecer las premisas. La última fórmula en la cadena es la fórmula derivada. Los sistemas axiomáticos son los más habituales en el campo científico. Tienen la ventaja de que son claros, ya que los axiomas de los que partimos están explícitamente especificados, y las reglas de inferencia suelen ser mínimas y normalmente no polémicas (por ejemplo, el *modus ponens*: $A, A \rightarrow B \vdash B$)

En los sistemas naturales no tenemos axiomas solo un conjunto de reglas de inferencia que nos permiten hacer derivaciones. Son más intuitivos y más flexibles de manejar.

Algunos de los conceptos que se estudian en el campo de la sintaxis son, axioma, teorema, consecuencia sintáctica o derivación, demostración, consistencia, etc.

Cuando se propone una lógica, uno de los objetivos a tener en cuenta son las relaciones existentes entre las dos formas de hacer lógica, o más en general, se trata de estudiar sus propiedades metalógicas. Citaremos aquí dos de las propiedades más habituales que se suelen estudiar en una lógica: la *corrección* y la *completud semántica.*

Definición: Un sistema formal es **correcto** ssi todo lo que se deriva sintácticamente en él a partir de un conjunto de premisas se deduce también semánticamente de este mismo conjunto de premisas. Como consecuencia, tenemos que los teoremas del sistema serán verdades lógicas, es decir fórmulas verdaderas para toda interpretación.

La corrección es una propiedad que se suele exigir de todo sistema formal, es decir, no se suelen proponer sistemas en el que alguno de sus axiomas sea manifiestamente falso para alguna interpretación o que permita deducir consecuencias falsas de premisas verdaderas.

Definición: Una lógica es **completa** (para un sistema formal) si todo lo que se deduce semánticamente a partir de un conjunto de fórmulas es también derivable en el sistema. En particular, toda verdad lógica es demostrable en el sistema, es decir, es un teorema del sistema.

Otras propiedades metalógicas importantes son la *consistencia* (no derivar contradicciones), la *decidibilidad* (existencia de un método mecánico o algoritmo para decidir si una fórmula es una verdad lógica), *independencia axiomática*, etc.

Lógica proposicional

Describamos ahora brevemente la sintaxis y la semántica de la lógica más sencilla, la lógica proposicional, LP.

En primer lugar tenemos que especificar su lenguaje formal y para ello, el primer paso, es decir cual es su alfabeto.

El alfabeto de la lógica proposicional está formado por los siguientes subconjuntos:

i) Un conjunto infinito de símbolos de variable proposicional:

$$\{p, p_1, p_2, \ldots, q, q_1, q_2, \ldots, r, r_1, r_2, \ldots, \}$$

Cada una de estas variables representaría la forma de una oración declarativa del lenguaje natural, o mejor dicho, el contenido (la proposición) de dicha oración. De una forma intuitiva y sin entrar en la discusión existente sobre esta idea, sería la representación del significado literal de la oración sin tener en cuenta las diferentes maneras que hay que decirlo.

Por ejemplo, 'Llueve', 'Euria ari du', 'Il pleut' o 'It's raining' se representarían mediante el mismo símbolo si es que se dicen en el mismo contexto.

ii) Un conjunto de conectores:

$$\{\neg, \rightarrow\}$$

Nosotros solo hemos considerado dos conectores (la negación y el condicional) y definiremos todos los demás mediante ellos. Los conectores representarían los nexos conectivos del lenguaje natural.

iii) El conjunto de separadores gráficos:

$$\{(,)\}$$

Estos símbolos se utilizan para facilitar la lectura de las fórmulas.

Una vez definido el alfabeto, hay que determinar cuales son las expresiones bien formadas o fórmulas del lenguaje, lo que haremos de una forma recursiva y utilizando las variables A y B de un metalenguaje para designar fórmulas cualesquiera de LP.

Definición: Las reglas de definición de las fórmulas del lenguaje LP son las siguientes:

1) Todo símbolo de variable proposicional es una fórmula de LP.
2) Si A es una fórmula de LP, $\neg A$ es también una fórmula de LP.
3) Si A y B son fórmulas de LP, $(A \rightarrow B)$ es también una fórmula de LP.
4) No hay más fórmulas en LP que las que se obtienen aplicando un número finito de veces alguna o algunas de las reglas anteriores.

Para facilitar la lectura de las fórmulas vamos ahora a definir otros conectores como forma simplificada de alguna de las fórmulas que surgen de las reglas anteriores. Así tenemos:

Definición:

- $(A \wedge B) \equiv_{def} \neg(A \rightarrow \neg B)$. El símbolo '$\wedge$' denotará la conjunción de fórmulas.
- $(A \vee B) \equiv_{def} (\neg A \rightarrow B)$. El símbolo '$\vee$' denotará la disyunción de fórmulas.
- $(A \leftrightarrow B) \equiv_{def} (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$. El símbolo '$\leftrightarrow$' denotará el bicondicional entre dos fórmulas.

Podíamos haber considerado como símbolos primitivos de nuestro alfabeto todos los conectores en vez del conjunto de conectores $\{\neg, \rightarrow\}$. Tendríamos entonces que establecer las relaciones entre ellos por medio de su definición semántica.

La semántica usual para esta lógica es una semántica bivalente, es decir, el significado de una fórmula cualquiera de LP se asocia con uno de estos los valores de verdad, verdadero o falso.

El valor de verdad de las fórmulas complejas, es decir, de aquellas que contienen al menos un conector, se define a partir de los valores de verdad de las variables proposicionales que contienen y del significado asignado a los conectores. Como el conjunto de conectores que hemos considerado es $\{\neg, \rightarrow\}$ definamos recursivamente la semántica de las fórmulas que los contienen:

Definición:

1) Si la fórmula A es verdadera, $\neg A$ es falsa.
2) $A \rightarrow B$ es falsa si A es verdadera y B falsa, en los demás casos $A \rightarrow B$ es verdadera.

   El conector '$\rightarrow$' es el condicional y por tanto, parece adecuado hacer falsa a una fórmula con antecedente verdadero y consecuente falso. Sin embargo, de los otros tres casos posibles aquellos con antecedente falso han sido muy discutidos, ya que se alejan del uso habitual que hacemos del condicional en el lenguaje natural y por ello, se han propuesto también otras lógicas con tratamientos diferentes de este conector. La semántica definida aquí corresponde al tratamiento clsico del condicional y de alguna forma vendría dada por las interconexiones que hemos establecido entre los diferentes conectores.

Teniendo en cuenta estas definiciones tendríamos que la semántica de los restantes conectores quedaría definida de la siguiente forma:

Definición:

- $A \wedge B$ es verdadera ssi A y B son verdaderas y falsa en caso de que una de ellas, al menos, sea falsa.
- $A \vee B$ es falsa ssi A y B son falsas. En caso contrario, la disyunción es verdadera.
- $A \leftrightarrow B$ es verdadera ssi los valores de A y B coinciden (es decir, las dos son verdaderas o las dos son falsas). En caso contrario, el bicondicional es falso.

Si representamos los valores de verdad, verdadero y falso mediante los números 1 y 0 respectivamente, la semántica de la lógica proposicional vendría resumida en la siguiente tabla:

A	B	$\neg A$	$A \rightarrow B$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \leftrightarrow B$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1	0
0	1	1	1	0	1	0
0	0	1	1	0	0	1

A partir de aquí se pueden definir los diferentes conceptos semánticos, así como diferentes técnicas para la evaluación de fórmulas. Veamos algunas de estas definiciones:

Definición: Una fórmula de LP es una **tautología** ssi es verdadera para cualquier valor de verdad de sus variables proposicionales. Una fórmula es una **antilogía** ssi es falsa para cualquier valor de verdad de sus variables. Una fórmula se dice **neutra** ssi no es ni tautología ni antilogía.

Definición: Una fórmula A es **consecuencia lógica** o se deduce lógicamente de un conjunto de fórmulas Γ ssi no es posible encontrar una asignación de valores de verdad a las variables proposicionales de las fórmulas en Γ y a las de A que haga verdaderas a todas las fórmulas de Γ y falsa a A. Si A es consecuencia lógica de las fórmulas en Γ escribiremos $\Gamma \models A$.

Definición: Si consideramos que las fórmulas en Γ y A corresponden a la formalización de un razonamiento dado en lenguaje natural (o científico), es decir, si las fórmulas en Γ, representan las premisas del argumento y A la conclusión, diremos que el razonamiento es **lógicamente válido** ssi A es consecuencia lógica de las fórmulas en Γ. Un razonamiento válido con premisas verdaderas se dice que es un razonamiento **correcto**.

Ejemplo: *El siguiente razonamiento sería válido:*

Si llueve las calles se mojan.
Llueve.
En consecuencia, las calles se mojan.

La forma del razonamiento es, $A \rightarrow B, A \models B$ *y de acuerdo con las tablas de verdad no es posible encontrar una interpretación que haga verdaderas a* $A \rightarrow B$ *y a* A*, siendo* B*, al mismo tiempo, falsa.*

Sin embargo el siguiente razonamiento no sería válido:

Si llueve, las calles se mojan.
Las calles están mojadas.
En consecuencia, llueve.

Su forma es $A \rightarrow B, B \models A$ *y podría darse una interpretación que haga las dos premisas verdaderas y la conclusión falsa (por ejemplo, si están regando las calles).*

Definición: Se dice que A y B son **equivalentes semánticamente**, en símbolos, $A \equiv B$, ssi tienen una tabla de verdad idéntica. Por tanto, si A y B son equivalentes semánticamente A es consecuencia semántica de B y viceversa.

Para desarrollar la lógica proposicional sintácticamente hay que especificar un sistema formal para ella. A lo largo de la historia se han propuestos diferentes sistemas axiomáticos y naturales. Todos ellos son equivalentes, en el sentido de que en todos ellos se derivan las mismas fórmulas de la lógica proposicional. Difieren en la forma de presentación y en su mayor o menor facilidad de uso. Por citar alguno, presentaremos el sistema axiomático de Church (1956) y el sistema natural de Gentzen (1938).

Utilizaremos el símbolo '$\vdash$' de una forma doble, sin nada a su izquierda nos servirá para denotar los teoremas (o axiomas) o fórmulas aceptadas por el sistema y con una fórmula o un conjunto de fórmulas a su izquierda, $\Gamma \vdash A$, para designar que A se **deriva** o es **consecuencia sintáctica** del conjunto de premisas Γ.

Sistema SL (CHURCH 1956)

Esquemas de axioma[1]:

SL1 $\vdash A \rightarrow (B \rightarrow A)$

SL2 $\vdash (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$

SL3 $\vdash (\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)$

Regla de inferencia:

Modus Ponens: $A, A \rightarrow B \vdash B$

Ejemplo de derivación en este sistema:

Veamos que $\vdash A \rightarrow A$

1) $A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A)$ SL1
2) $(A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A)) \rightarrow ((A \rightarrow (A \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A))$ SL2
3) $(A \rightarrow (A \rightarrow A) \rightarrow (A \rightarrow A))$ MP 1,2
4) $A \rightarrow (A \rightarrow A)$ SL1
5) $A \rightarrow A$ MP 3,4

Sistema formal natural de Gentzen (Untersuchungen über das Logische schliessen, *Mathematische Zeitschirift 39* (1934): 176-210). Propuesto de forma independiente por Jaskowski en 1934.

[1]En los esquemas hemos suprimido, por comodidad, los paréntesis externos de las fórmulas.

Es un sistema regulativo, es decir, las deducciones se hacen mediante un conjunto de reglas de inferencia sin necesidad de axiomas. Es más intuitivo que un sistema axiomático y se adapta mejor al tipo de derivaciones que hacemos en lenguaje natural. En este sistema es más habitual hacer derivaciones de fórmulas a partir de un conjunto de premisas que demostrar teoremas.

Reglas básicas:

(i) Reglas de introducción y eliminación de la negación.

$$\text{IN} \quad \dfrac{\left[\begin{array}{c} A \\ \vdots \\ B \wedge \neg B \end{array}\right.}{\neg A} \qquad\qquad \text{EN} \quad \dfrac{\neg\neg A}{\text{A}}$$

(ii) Reglas de introducción y eliminación de la conjunción.

$$\text{IK} \quad \dfrac{\begin{array}{c}\text{A}\\ B\end{array}}{A \wedge B}\ , \quad \dfrac{\begin{array}{c}\text{A}\\ B\end{array}}{B \wedge A} \qquad\qquad \text{EK} \quad \dfrac{A \wedge B}{\text{A}}\ , \quad \dfrac{A \wedge B}{\text{B}}$$

(iii) Reglas de introducción y eliminación de la disyunción

$$\text{ID} \quad \dfrac{\text{A}}{A \vee B}\ , \quad \dfrac{\text{A}}{B \vee A} \qquad\qquad \text{ED} \quad \dfrac{\begin{array}{c} A \vee B \\ \left[\begin{array}{c} A \\ \vdots \\ C \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{c} B \\ \vdots \\ C \end{array}\right. \end{array}}{C}$$

(iv) Reglas de introducción y eliminación del condicional

$$\text{IC} \quad \dfrac{\left[\begin{array}{c} A \\ \vdots \\ B \end{array}\right.}{A \to B} \qquad\qquad \text{EC (MP)} \quad \dfrac{\begin{array}{c}\text{A}\\ A \to B\end{array}}{B}$$

Reglas derivadas Citemos algunas de las más conocidas:

(v) Reglas de introducción y eliminación del bicondicional.

$$\text{IBC}\quad \frac{\begin{array}{c}A \to B\\ B \to A\end{array}}{A \leftrightarrow B} \qquad\qquad \text{EBC}\quad \frac{A \leftrightarrow B}{A \to B},\quad \frac{A \leftrightarrow B}{B \to A}$$

(vi) Transitividad **(vii) Modus Tollens** **(viii)Contraposición**

$$\frac{\begin{array}{c}A \to B\\ B \to C\end{array}}{A \to C} \qquad \frac{\begin{array}{c}A \to B\\ \neg B\end{array}}{\neg A} \qquad \frac{A \to B}{\neg B \to \neg A}$$

(ix) Silogismo disyuntivo

$$\text{SD}\quad \frac{\begin{array}{c}A \vee B\\ \neg A\end{array}}{B},\quad \frac{\begin{array}{c}A \vee B\\ \neg B\end{array}}{A}$$

(x) Dilemas

$$\text{Dil1}\ \frac{\begin{array}{c}A \vee B\\ A \to C\\ B \to C\end{array}}{C},\ \text{Dil2}\ \frac{\begin{array}{c}\neg A \vee \neg B\\ C \to A\\ C \to B\end{array}}{\neg C},\ \text{Dil3}\ \frac{\begin{array}{c}A \vee B\\ A \to C\\ B \to D\end{array}}{C \vee D},\ \text{Dil4}\ \frac{\begin{array}{c}\neg A \vee \neg B\\ C \to A\\ D \to B\end{array}}{\neg C \vee \neg D}$$

Ejemplo de derivación en este sistema:

Demostremos la siguiente ley de Morgan: $\neg(A \vee B) \vdash \neg A \wedge \neg B$.

1.	$\neg(A \vee B)$	Premisa
2.	A	Premisa auxiliar
3.	$A \vee B$	ID, 2
4.	$(A \vee B) \wedge \neg(A \vee B)$	IK, 1,3
5.	$\neg A$	IN, 2-4
6.	B	Premisa auxiliar
7.	$A \vee B.$	ID, 6
8.	$(A \vee B) \wedge \neg(A \vee B)$	IK, 1,7
9.	$\neg B$	IN, 6-8
10.	$\neg A \wedge \neg B$	IK, 5,9

La lógica proposicional tiene propiedades metalógicas interesantes, entre otras destacaremos el hecho de que es *correcta* y *completa* (para un sistema formal cualquiera de los diferentes que se han propuesto a lo largo de la historia). También tenemos que es *decidible*, es decir, existe un procedimiento mecánico que decide si una fórmula cualquiera de LP es una tautología o no, por ejemplo, el método de las tablas de verdad.

Lógica elemental

Mediante la lógica proposicional no podemos dar cuenta de la mayoría de los razonamientos que se dan en matemáticas y en otros lenguajes más complejos.

Por ejemplo sea el razonamiento,

Todo ser humano es mortal.
Sócrates es un ser humano.
En consecuencia, Sócrates es mortal.

Este razonamiento se simboliza en lógica proposicional mediante los símbolos 'p' y 'q' (para las premisas) y 'r' para la conclusión que evidentemente no corresponde a la forma de un razonamiento válido de la lógica proposicional.

El motivo por el que no se puede expresar debidamente este tipo de razonamientos en lógica proposicional es porque, en dicha lógica, las proposiciones se consideran en su totalidad, no se examinan las partes que las componen. Necesitamos pasar a una lógica más compleja para dar cuenta de este tipo de razonamientos. La lógica situada en el siguiente escalón sería la lógica elemental o lógica de primer orden en la cual los componentes de la oración pueden ser expresados por separado. Así, en ella, es posible expresar razonamientos que utilizan generalizaciones, es decir, partículas de la forma *todos/as* o *cualquier*. Igualmente, también se pueden formalizar oraciones con expresiones del tipo *algún/alguna*.

La lógica elemental, LQ, se conoce también como lógica de cuantificadores, o lógica clásica.

Definamos ahora las bases de su sintaxis dando para ello su alfabeto y las reglas de formación de sus fórmulas.

El alfabeto de la lógica elemental, LQ, es el siguiente:

$$A_{LQ} = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \cup \{a_i\}_{i\in I} \cup \{f_i^n\}_{i\in J, n\in\mathbb{N}^+} \cup \{F_i^n\}_{i\in K, n\in\mathbb{N}^+} \cup \{\neg, \rightarrow\} \cup \{\forall\} \cup \{(,)\}$$

Veamos qué elementos componen los distintos subconjuntos de este alfabeto.

- $A_1 = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es el conjunto de símbolos de variable individual. Es un conjunto numerable.

- $A_2 = \{a_i\}_{i\in I}$ es el conjunto de símbolos de constante individual. Normalmente tendremos un conjunto finito de constantes (el conjunto vacío incluido). Nos van a servir para designar aquellos elementos que queramos destacar o distinguir en un conjunto.
- $A_3 = \{f_i^n\}_{i\in J, n\in\mathbb{N}^+}$ es el conjunto de símbolos de función. Normalmente tendremos un conjunto finito de estos símbolos (vacío incluido). Son símbolos que se utilizan para formalizar funciones matemáticas y por tanto, puede haber ámbitos en los que no sean necesarios. Si f_i^n es un símbolo de función de LQ, el subíndice se utiliza para diferenciar funciones con el mismo superíndice y éste, el superíndice, expresa el número de argumentos a los que se aplica la función.
- $A_4 = \{F_i^n\}_{i\in K, n\in\mathbb{N}^+}$ es el conjunto de símbolos de relación. Este conjunto no puede ser nunca vacío y como máximo será numerable. Análogamente al caso de los símbolos de función el subíndice sirve para diferenciar predicados con el mismo superíndice, y el superíndice indica el número de elementos que están en relación. Los símbolos de la forma F_i^1 se suelen llamar símbolos de predicado (monádicos) y se interpretarán como propiedades de los elementos de un universo.
- $A_5 = \{\neg, \rightarrow\}$ es el conjunto de conectores.
- $A_6 = \{\forall\}$ es el conjunto formado por el cuantificador universal. El cuantificador existencial, $\exists$, lo introduciremos por definición a partir del universal y de la negación de la siguiente forma: $\exists x A \equiv_{def} \neg\forall x \neg A$, designando A a una fórmula cualquiera de LQ.
- $A_6 = \{(,)\}$ es el conjunto de separadores gráficos.

Los conectores y los cuantificadores forman el conjunto de constantes lógicas de la lógica elemental.

Normalmente no utilizaremos todo el alfabeto de LQ, dependiendo del campo de aplicación nos quedaremos con una parte u otra de éste, especificando los símbolos no-lógicos que consideraremos en cada caso, es decir, especificando los símbolos de constante individual, función y predicado que se consideran. Al hacer lo anterior delimitamos el tipo, τ, del lenguaje que consideramos. Un sublenguaje de LQ de tipo τ se denomina $LQ(\tau)$.

Si no consideramos símbolos de función en el lenguaje, la lógica se suele denominar lógica de predicados.

Habitualmente se suele considerar en el lenguaje también otro símbolo lógico, $\equiv$, para denotar a la identidad. La lógica resultante en este caso se simboliza mediante $LQ^{\equiv}$ siendo la interpretación normal del signo de identidad (aunque no la única) la igualdad.

Análogamente a como hicimos en lógica proposicional tenemos ahora que definir el conjunto de fórmulas de LQ, pero aquí necesitamos primero delimitar el llamado conjunto de términos de esta lógica.

Definición: El conjunto de **términos** de LQ se define recursivamente mediante las siguientes reglas:

1) Los símbolos de constante individual son términos.
2) Los símbolos de variable individual son términos.
3) Si $t_1, t_2, \cdots, t_n$ $(n \in N)$ son términos, $f_i^n t_1 t_2 \cdots t_n$ es un término para todo i.
4) No hay ms términos que los definidos por aplicación finita de las reglas anteriores.

Si nos limitamos a la lógica de predicados, los únicos términos serían las constantes y las variables.

Definamos ahora recursivamente el conjunto de fórmulas de LQ determinando en primer lugar el conjunto de fórmulas atómicas:

Definición: Si $t_1, t_2, \cdots, t_n$ son términos $(n \in N)$ y F_i^n un símbolo de relación n-ario, $F_i^n t_1 t_2 \cdots t_n$ es una **fórmula atómica**. Si consideramos en el lenguaje el símbolo de identidad, tendremos que las expresiones de la forma $t_i \equiv t_j$ serían también fórmulas atómicas de $LQ^{\equiv}$.

Definición: Las reglas de formación de las **fórmulas** son las siguientes:

1) Las fórmulas atómicas son fórmulas.
2) Si A es una fórmula, $\neg A$ es una fórmula.
3) Si A y B son fórmulas, $(A \to B)$ es una fórmula.
4) Si A es una fórmula y x_i es un símbolo de variable individual, entonces $\forall x_i A$ es una fórmula.
5) No hay más fórmulas que las que se forman mediante la aplicación, un número finito de veces, de alguna de las reglas anteriores.

En el caso de las fórmulas obtenidas mediante aplicación de la tercera regla, $\forall x_i A$ se dice que las variables de A están bajo el alcance del cuantificador universal,$\forall$.

Ejemplo:

1) $f_1^3 x_2 a_1 x_1$, $f_1^3 x_2 a_1 f_2^2 x_1 f_1^1 a_3$ *y* x_5 *son términos.*

2) $F_1^1 f_1^3 x_2 a_1 x_1$ *y* $F_1^2 x_1 x_2$ *son fórmulas atómicas.*

3) $\exists x_0 \forall x_1 (F_1^1 x_1 \rightarrow (\neg F_2^1 a_0 \rightarrow F_1^2 x_0 x_2))$ *es una fórmula. (Hemos utilizado el símbolo* $\exists$ *aunque este no aparezca en ninguna de las reglas anteriores, como simplificación de la fórmula que podríamos escribir utilizando el cuantificador universal y la negación, según la equivalencia:* $\exists x A \equiv_{def} \neg \forall x \neg A$*)*

Para definir los primeros conceptos de la semántica de la lógica elemental, necesitamos algunas definiciones previas.

Definición: Una variable x_i tiene una **ocurrencia ligada** en un fórmula si está bajo el alcance de un cuantificador en una expresión de la forma $\forall x_i$ o $\exists x_i$. En caso contrario, diremos que la variable tiene una ocurrencia libre en la fórmula.

Se dice que la variable está **libre** en la fórmula si tiene al menos una ocurrencia libre en ella. Si tiene al menos una ocurrencia ligada se dice que la variable está **ligada**.

Definición: Una fórmula que no tiene variables libres se denomina **enunciado** o **fórmula cerrada**.

Al interpretar los enunciados en un dominio, su valor de verdad no dependerá de la interpretación de sus variables, mientras que en las fórmulas con variables libres, su valor dependerá de la interpretación que hagamos de éstas en el dominio correspondiente.

En lenguaje matemático o natural, la forma de las expresiones que normalmente se utilizan corresponderá, en general, a la de un enunciado. En lenguaje natural, las variables libres se utilizarían, por ejemplo, para representar pronombres.

La siguiente definición es necesaria si en una fórmula queremos sustituir una variable por un término, sin que los posibles cuantificadores de la fórmula afecten al término sustituido de una forma diferente a como afectaban a la variable.

Definición: Un término está libre para una variable x_i en una fórmula A

ssi no existe ninguna ocurrencia libre de x_i en A bajo el alcance de algún cuantificador que cuantifica a alguna de las variables que aparecen en el término.

Por ejemplo, el término t = $f_1^3 x_2 a_1 x_1$ no está libre para x_2 en la fórmula $\exists x_0 \forall x_1$ $(F_1^1 x_1 \rightarrow (\neg F_2^1 a_0 \rightarrow F_1^2 x_0 x_2))$ ya que la única ocurrencia libre de la variable x_2, que aparece en la fórmula, está bajo el alcance de la expresión cuantificada $\forall x_1$ y x_1 es una variable que aparece en el término.

La semántica de esta lógica fue definida de una manera formal por el matemático Alfred Tarski en 1936 y se ha convertido en la semántica habitual para la lógica elemental. Tarski, en vez de definir directamente el concepto de verdad, utilizó como paso previo, el concepto de *satisfabilidad* para poder definir también cuándo una fórmula con variables libres es verdadera.

Definición: Sea un lenguaje de primer orden de tipo τ, $LQ(\tau)$ y sea el conjunto de símbolos no-lógicos determinado por τ, $\{a_i\}_{i \in I'} \cup \{f_i^n\}_{i \in J', n \in N_0^+} \cup \{F_i^n\}_{i \in K', n \in N_1^+}$ donde I', J' y K' son subconjuntos de índices y N_0^+ y N_1^+ son subconjuntos de números naturales distintos de cero. Una **interpretación** para $LQ(\tau)$ es un par ordenado $I = (D, J)$, tal que :

D es un conjunto no vacío que llamaremos **universo** o **dominio** de la interpretación.

J es la **función de interpretación** que nos define el significado de los símbolos no-lógicos del sistema de la siguiente forma:

- A cada símbolo de constante le hacemos corresponder un elemento fijo del universo al que llamaremos su denotación o referencia. En símbolos, $J(a_i) = \overline{a_i} \in D$. Por ejemplo, si el dominio de interpretación es el conjunto de los números naturales, la denotación de una constante será un número natural fijo.
- La interpretación de un símbolo de función n-ario mediante J (su denotación o referencia) es una aplicación del conjunto D^n en el conjunto D. En símbolos, $J(f_i^n) = \overline{f_i^n} : D^n \rightarrow D$. Por ejemplo, con el mismo universo de interpretación anterior, la interpretación de un símbolo de función de la forma f_i^2 será una operacián binaria de los números naturales, por ej. la suma o el producto.
- La interpretación de un símbolo de predicado o relación n-aria (su denotación o referencia) es una relación n-aria definida en el universo. En símbolos, $J(F_i^n) = \overline{F_i^n} \subseteq D^n$. Es decir, la interpretación de un símbolo

de predicado n-ario será un subconjunto del conjunto D^n. Siguiendo con el mismo ejemplo anterior, la interpretación del símbolo F_i^2 será una relación binaria definida en el conjunto de los números naturales, por ejemplo, 'ser menor que'. La interpretación de los símbolos con superíndice 1, F_i^1, será, por tanto, una propiedad de los elementos del universo. Por ejemplo, en el caso anterior, 'ser par'.

Análogamente a la idea de interpretación, se ha utilizado también el concepto de **estructura relacional** a la hora de interpretar las fórmulas de la lógica elemental.

Definición: Dado un tipo de lenguaje de primer orden mediante las constantes no-lógicas del lenguaje, $\{a_i\}_{i \in I'} \cup \{f_i^n\}_{i \in J', n \in N_0^+} \cup \{F_i^n\}_{i \in K', n \in N_1^+}$, una **estructura relacional** para este tipo está formada por un universo de interpretación D y una denotación para cada uno de estos símbolos. Formalmente, $< D, \{\overline{a_i}\}, \{\overline{f_i^n}\}, \{\overline{F_i^n}\} >$. Este tipo de estructuras también han sido denominadas **álgebras**.

Antes de empezar a definir los conceptos semánticos más importantes como son los de *satisfabilidad*, *verdad*, *modelo*, *validez lógica*, *consecuencia semántica* y *equivalencia semántica* una definición previa.

Definición: Sea s una sucesión infinita de elementos del universo de interpretación, $s =< b_0, b_1, b_2, ..., b_i, ... >$, $bi \in D, i = 0, 1, ...$ El **valor de un término** t para sucesión s, $s^*(t)$, se define de la siguiente forma:

i) Si t es una variable, $t = x_i$, entonces $s^*(t) = b_i \in D$, es decir, el valor de t es el elemento de la sucesión s que ocupa el lugar i.

ii) Si t es una constante, $t = a_i$, entonces $s^*(t) = J(a_i) = \overline{a_i}$, es decir, el valor de la constante es su denotación o referencia.

iii) Si t es un término que comienza con un símbolo de función, $t = f_i^n t_1 t_2 \cdots t_n$, el valor de t se define de la siguiente forma: $s^*(t) = \overline{f_i^n}(s^*(t_1), ..., s^*(t_n))$, es decir, tomamos la denotación del símbolo de función, f_i^n, y aplicamos dicha función al valor de los términos $t_1, t_2, ..., t_n$. Por ejemplo, si $\overline{f_1^2}$ es la función suma de números naturales y los valores de los términos t_1 y t_2 son '3' y '7' respectivamente, el valor del término dado es '3+7'.

A partir de la anterior definición definimos la noción de *satisfabilidad*.

Definición: La sucesión s **satisface** a la fórmula A en la interpretación I, $I \models A[s]$, ssi se cumple alguna de las siguientes condiciones:

i) Si A es una fórmula atómica de la forma $A = F_i^n t_1 t_2 \cdots t_n$, la sucesión s satisface a A en I ssi $\overline{F_i^n}(s^*(t_1), ..., s^*(t_n))$ se verifica, es decir, si los valores de los términos $t_1, t_2, \ldots, t_n$ están relacionados mediante $\overline{F_i^n}$.

ii) Si $A = \neg B$, la sucesión s satisface a A en I, ssi s no satisface a B. Esta es la interpretación habitual de la negación, análoga a la dada en lógica proposicional.

iii) Si $A = B \to C$, la sucesión s satisface a A en I ssi s no satisface a B o s satisface a C. Igualmente al caso anterior, la interpretación del condicional es la misma que dimos en lógica proposicional.

iv) Si $A = \forall x_i B$, la sucesión s satisface a A en I ssi cualquier sucesión que difiere de s en, como máximo, el elemento que ocupa el lugar i satisface a B.

En el caso del universal, la definición anterior no es más que un artificio formal para definir la satisfabilidad de todas las fórmulas de LQ de una forma uniforme. Lo que queremos decir no es más que si en la fórmula B aparece la variable x_i bajo el alcance del cuantificador universal, hay que comprobar si interpretando x_i por todos y cada uno de los elementos del dominio de interpretación, la fórmula se satisface. Tenemos, por tanto, que el valor de la variable ligada viene fijado por el significado que del cuantificador.

Ejemplo:

1) *Si el dominio de interpretación es el conjunto de los números naturales, la relación $\overline{F_1^2}$ 'ser menor que' y la sucesión $s =< 1, 3, 5, \ldots >$, tenemos que s satisface a la fórmula $F_1^2 x_0 x_2$ ya que '1' (el valor de x_0) es menor que '5' (el valor de x_2), es decir, se verifica $1 < 5$. Por otra parte, la sucesión $s' =< 1, 1, 1, \ldots >$ no satisface a la fórmula anterior ya que no se verifica $1 < 1$. Si la fórmula fuera $F_1^2 x_0 a_1$ y la denotación de a_1, '0', ni s ni s' la satisfarían.*

2) *Si la fórmula A es $\forall x_1 F_1^2 x_1 x_2$, su dominio de interpretación, el conjunto de los números naturales y la denotación de F_1^2 la relación '$<$', la sucesión $s =< 1, 1, 1, \ldots >$ no satisface a la fórmula A ya que no se verifica la siguiente expresión: 'para todo número natural n, $n < 1$' (el valor de la variable libre x_2 en la sucesión s es '1').*

Definición: Una fórmula es **satisfacible**, si existe al menos una sucesión de elementos del dominio de alguna interpretación que la satisface. Un conjunto de fórmulas es **satisfacible** si todos sus elementos son satisfacibles a la vez para al menos una interpretación.

A partir de esta noción de satisfabilidad definimos el concepto de *verdad* para una fórmula cualquiera de la lógica elemental.

Definición: Una fórmula es **verdadera** para una interpretación ssi toda sucesión de elementos del dominio de la interpretación satisface a la fórmula. Si la fórmula A es verdadera para la interpretación I, diremos que I es un **modelo** de A. Formalmente, $I \models A$.

Para las fórmulas que no tienen variables libres o enunciados no necesitamos recurrir al concepto de satisfabilidad para decidir si son o no verdaderas ya que solo utilizamos las sucesiones de elementos del dominio para dar cuenta del valor de las variables libres.

Definición: Una fórmula es **lógicamente válida** o una **verdad lógica** ssi es verdadera para cualquier interpretación. Dicho de otra forma, si toda interpretación es un modelo de la fórmula. En símbolos, $\models A$.

Ejemplo: *Sea la fórmula:*

$$\forall x_1(F_1^2 f_1^2 f_2^2 x_1 a_3 a_2 f_2^2 f_1^2 x_1 a_3 a_0) \rightarrow (F_1^2 f_2^2 f_1^2 x_0 a_3 a_2 f_1^2 f_2^2 x_1 a_3 a_2)$$

Sea la interpretación $I = (D, J)$ tal que $D = N$, $J(F_1^2) =\geq$, $J(f_1^2) = +$, $J(f_2^2) = \cdot$, $J(a_i) = i, i = 0, 1, 2, 3$. Sea la sucesión $s =< 0, 2, 4, 6, \ldots >$. La interpretación del antecedente de la fórmula sería:

Para todo $n \in \mathbb{N}$, $(n.3) + 2 \geq (n + 3).0$ *que evidentemente se verifica.*
El consecuente se interpreta de la siguiente forma: $(0 + 3).2 \geq 2.3 + 2$ *que evidentemente no se verifica. Luego la sucesión s no satisface a la fórmula en la interpretación dada y en consecuencia la fórmula no es verdadera para dicha interpretación, ni, por tanto, lógicamente válida.*

Sin embargo la fórmula es satisfacible, ya que bastaría con cambiar la interpretación del único símbolo de predicado F_1^2 a $\leq$, dejando lo demás como anteriormente, lo que nos hace el antecedente falso, y por tanto, el condicional verdadero independientemente del valor de verdad del consecuente.

Es más, para esta nueva interpretación la fórmula no sólo es satisfacible, sino también verdadera, ya que el valor de verdad del antecedente es falso independientemente de la sucesión que se elija para interpretar el consecuente.

Para terminar con las definiciones semánticas, definamos ahora la relación de *consecuencia semántica* y la de *equivalencia semántica* entre fórmulas de LQ.

Definición: Sean A y B dos fórmulas cualesquiera de LQ. B es **consecuencia semántica** de A, $A \models B$, ssi dada una interpretación cualquiera, toda sucesión de elementos del dominio de la interpretación que satisface a A, también satisface a B.

Análogamente se puede definir el caso en el que en vez de una fórmula, A, tenemos un conjunto de fórmulas Γ. B es **consecuencia semántica** del conjunto de fórmulas Γ, ssi para toda interpretación y para toda sucesión de elementos del dominio de la interpretación, si las fórmulas de Γ se satisfacen, B también se satisface.

Definición: Si Γ es un conjunto de fórmulas cerradas y A es también un enunciado, podemos considerarlos como la formalización de un razonamiento en lenguaje natural (o matemático), donde Γ serían las premisas del argumento y A la conclusión. Diremos que el razonamiento es **lógicamente válido** ssi la conclusión se sigue lógicamente de las premisas, es decir si no es posible que las premisas sean verdaderas para una interpretación mientras que la conclusión es falsa. Un razonamiento válido con premisas verdaderas es un razonamiento **correcto**.

Definición: Las fórmulas A y B son **equivalentes semánticamente**, $A \equiv B$, ssi A es consecuencia semántica de B y B es consecuencia semántica de A, es decir, ssi $A \models B$ y $B \models A$. Dicho de otro modo, ssi las sucesiones que satisfacen a las fórmulas A y B son las mismas.

Análogamente al caso de la lógica proposicional, si queremos desarrollar sintácticamente la lógica de primer orden, necesitamos un sistema formal para ella, e igualmente al caso de LP, son varios y diversos los que se han propuesto. Vamos a limitarnos a exponer aquí el sistema axiomático de Church para LQ que tiene los tres primeros axiomas idénticos a los propuestos para LP por ser la lógica elemental una extensión de la lógica proposicional.

Sistema SLQ (Church, 1956)

Esquemas de axioma:

SLQ1 $\vdash A \rightarrow (B \rightarrow A)$

SLQ2 $\vdash (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$

SLQ3 $\vdash (\neg A \to \neg B) \to (B \to A)$

SLQ4 $\vdash \forall x_i A \to A$ Si x_i no tiene ocurrencias libres en A

SLQ5 $\vdash \forall x_i A(x_i) \to A(t)$. Siendo $A(x_i)$ una fórmula de LQ y x_i una variable con al menos una ocurrencia libre en A y t un término libre para x_i en A.

SLQ6 $\vdash \forall x_i(A \to B) \to (A \to \forall x_i B)$ Si x_i no tiene ocurrencias libres en A.

Reglas de inferencia:

Modus Ponens $A, A \to B \vdash B$

Regla de generalización Si $\vdash A$, entonces $\vdash \forall x_i A$

A la hora de destacar alguna de las propiedades metalógicas de esta lógica podemos decir, que como en el caso de la lógica proposicional, si consideramos uno cualquiera de los sistemas formales usuales, la lógica elemental es *correcta* y *completa*.

Sin embargo, Church demostró en 1936 que esta lógica *no es decidible*, es decir, que no hay procedimiento mecánico para decidir si una fórmula dada es lógicamente válida o no. Hay fragmentos de esta lógica que si son decidibles, por ejemplo la lógica de predicados monádicos.

La completud de esta lógica fue demostrada por Gödel en 1929 en su tesis doctoral. Henkin en 1949 demostró el mismo resultado mediante un método diferente que se puede aplicar para demostrar también la completud de otras lógicas.

Aplicaciones en matemáticas

Citemos brevemente aquí algunos resultados sobre distintas teorías o conceptos matemáticos que se pueden obtener a partir del estudio de las propiedades metalógicas de la lógica elemental.

1) La noción de finitud no es caracterizable en primer orden[2] ya que si un conjunto de fórmulas tiene modelos finitos arbitrariamente grandes, también tiene un modelo infinito.

2) El cuerpo de los reales no es absolutamente caracterizable en lógica de primer orden ya que todo enunciado verdadero en $\mathbb{R}$ lo es también en una estructura de dominio contable que evidentemente no es isomorfa a $\mathbb{R}$.

[2]No se puede formalizar mediante una fórmula de la lógica elemental.

3) La clase de los cuerpos arquimedeanos[3] no es axiomatizable en primer orden.

4) Cualquier axiomatización que demos para $\mathbb{R}$ tiene un modelo no-standard.

Para ver lo anterior, consideremos la teoría de $\mathbb{R}$, $Th(\mathbb{R}, <)$, es decir, el conjunto de enunciados de primer orden verdaderos en el cuerpo ordenado de los reales (ordenado mediante la relación habitual $<$) y consideremos el siguiente conjunto de fórmulas:

$$\Phi = Th(\mathbb{R}, <) \cup \{0 < x < 1, 0 < x < \frac{1}{2}, 0 < x < \frac{1}{3}, \ldots\}$$

Se demuestra que este conjunto tiene un modelo y como se puede ver por la forma de las fórmulas, el universo de este modelo contiene un elemento mayor que cero pero menor que todo número real, lo que nos da una base teórica para el desarrollo del llamado *análisis no-estándard*, es decir el desarrollado utilizando la noción de *infinitésimo*.

5) La aritmética de Peano (con los axiomas habituales) tiene un modelo contable no estándar (con un elemento mayor que todo número natural). La demostración es similar a la del apartado anterior.

6) Consideremos un conjunto de axiomas para la teoría de conjuntos, por ejemplo el sistema axiomático presentado por Zermelo-Fraenkel al que le añadimos el axioma de elección (que dice que dada una colección de conjuntos no vacíos y disjuntos dos a dos, existe un conjunto formado por exactamente un elemento de cada uno de los conjuntos de la colección). Este axioma es utilizado habitualmente en el desarrollo ordinario de la matemática. Es equivalente, por ejemplo, al *lema de Zorn*, o al *principio de la buena ordenación* de cualquier conjunto o la *ley de la tricotomía* (dados dos cardinales cualesquiera, o son iguales o uno de ellos es mayor que el otro) o al teorema que dice que todo espacio vectorial tiene una base.

Si llamamos ZFC al conjunto de axiomas anterior (incluido el axioma de elección), Gödel demostró en 1931, mediante su segundo teorema de incompletud, que no es posible demostrar la consistencia de ZFC por medios matemáticos, es decir, que no es posible demostrar que no lleva a contradicción. Sólo es posible demostrar su consistencia relativa, es decir, si ZF es consistente, ZF más el axioma de elección es también consistente. Además este axioma es independiente de los otros

[3]Un cuerpo es arquimedeano ssi para todo elemento del cuerpo, x, existe un número natural n tal que $x < n$.

axiomas: ni el axioma de elección, ni su negación son derivables a partir de los axiomas de ZF.

Del axioma de elección se deriva la *paradoja de Banach-Tarski*: una esfera puede ser descompuesta en un número finito de piezas que se pueden volver a montar construyendo dos esferas del mismo tamaño que la primitiva. Aquí la geometría euclídea juega un papel en cómo se deriva esta paradoja, ya que en geometría hiperbólica es posible la derivación sin el axioma de elección.

Si consideramos la llamada hipótesis del continuo, HC, que dice que todo subconjunto infinito de R es contable o de la misma cardinalidad que R, tenemos que el axioma de elección es derivable a partir de HC. La consistencia relativa de $ZF + CH$ fue demostrada por Gödel en 1939 y la de ZF más la negación de la hipótesis del continuo por Cohen en 1963.

Las lógicas que hemos presentado en este artículo corresponden al núcleo de lo que se conoce como lógica clásica. Bien debido al campo de aplicación o bien por carencias expresivas debidas a diferentes motivos, se han considerado también otro tipo de lógicas cambiando o añadiendo determinados elementos.

Por poner algún ejemplo citaríamos las siguientes: si en vez de dos valores de verdad consideramos más valores, tenemos las *lógicas multivalentes*. Si aceptamos que las fórmulas tengan una longitud infinita, tendríamos las *lógicas infinitarias*. Si introducimos más símbolos lógicos en el lenguaje tendríamos entre otras las *lógicas modales* (introducimos dos símbolos nuevos para denotar a los operadores modales 'posible' y 'necesario') o *las lógicas temporales* (con símbolos para denotar el pasado o el futuro por ej.). Si decidimos no aceptar alguna de las leyes clásicas de la lógica, como por ejemplo la ley del tercio excluso, es decir, que $A \vee \neg A$ sea un teorema, tendríamos la *lógica intuicionista* etc., pero desarrollar dichas lógicas llevaría más espacio del disponible aquí.

Antes de acabar, quisiéramos, sin embargo, presentar algunos ejemplos de razonamientos en lenguaje natural que nos pueden dar una idea de la forma de razonar que habitualmente se utiliza en al vida ordinaria. La mayoría de ellos no son razonamientos válidos ni correctos en el sentido lógico formal que hemos definido pero ¿serían todos ellos, siempre y en cualquier contexto, inaceptables? ¿Cómo se define la idea de aceptabilidad? ¿Que tipo de lógica es la más adecuada para describirlos? ¿Por qué algunos de ellos son inaceptables o menos aceptables que otros aunque tengan la misma forma? ¿Por qué alguno de ellos, aún siendo válidos y correctos, no son aceptables como razonamientos ordinarios (i.e. *petitio principii*)? ¿Cómo se recobra información que proviene de situar el razonamiento en un contexto determinado? Son preguntas abiertas que se consideran hoy en día en las modernas teorías de argumentación. Aunque hay respuestas parciales a algunas de ellas, no hay una teoría (formal o informal) universalmente aceptada para dar cuenta de todas ellas.

Ejemplos

¿Qué estás haciendo?
Soy un astronauta.
No puedes ser un astronauta. No llevas casco.
Han Solo no lleva casco tampoco.
Ya...
Han Solo es un astronauta, así que no todos los astronautas tienen casco.

Premisas implícitas

Un estudio reciente ha descubierto que es más posible que las mujeres sean asesinadas en el trabajo que los hombres. El 40% de las mujeres que murieron en el trabajo en 1993 fueron asesinadas. El 15% de los hombres que murieron en el trabajo durante el mismo periodo fueron asesinados.

Premisas implícitas

Todos los hombres son mortales.
2 es el único número primo par.
Sócrates es un hombre.
Luego, Sócrates es mortal.

Premisas irrelevantes

"La isla del tesoro" tiene una buena trama. Los personajes de "La isla del tesoro" están llenos de vitalidad. El estilo de "La isla del tesoro" es claro y ágil. Por tanto, "La isla del tesoro" es un gran libro.

Argumentación conductiva.

Si no recoges la habitación, no sales.
Ya la he recogido.
¡Ah! Pero yo sólo he dicho que si no recogías no salías.

Negar el antecedente

Si mentir hace surgir malos sentimientos, entonces mentir es malo.
Mentir es malo.
Luego, mentir hace surgir malos sentimientos.

Afirmar el consecuente.

Si llueve las calles se mojan.
Las calles están mojadas.
En consecuencia, llueve.

Afirmar el consecuente.

Si usar placebos causara daño, entonces usarlos sería malo.
Usar placebos no causa daño.
Luego, usar placebos no es malo.

Negar el antecedente

¡ Con lo que he estudiado! ¿Cómo no me vas a aprobar?

Razonamiento ad populum

Ms. Riley, are you saying that President Bus made a moral error when he decided to go to war with Iraq? I can't believe my ears. That's not how Americans feel. Not true Americans anyway. You are an American, aren't you, Ms. Riley?

Razonamiento ex populo

Fuentes bien informadas han asegurado que Bush sacará las tropas de Irak. Luego, Bush sacará las tropas de Irak.

Razonamiento ad verecundiam

Creo que Dale debe ser fiel a sus creencias porque... porque eso dice mi hermano, y él sabrá. ¿Es tu hermano abogado, juez o una autoridad de algún tipo? No, pero es muy listo.

Razonamiento ad verecundiam

El examen me ha salido bien porque llevaba en el bolsillo este amuleto que me da suerte.

Falsa causa o razonamiento posthoc, ergo propter hoc.

El hombre no tiene límites.
Mikel es un hombre.
Luego, Mikel no tiene límites.

Equivocación.

Una persona que nunca ha estudiado nada de informática es un inexperto en informática.
Si eres un inexperto en informática y estudias una hora seguirás siendo un inexperto en informática.
Por mucha informática que estudie una persona, seguirá siendo un inexperto.

Sorite o argumento del montón.

El equipo es excelente. Todos sus jugadores son de primera categoría.

Composición.

Los nativos americanos están desapareciendo.
Ese hombre es nativo americano.
Luego, ese hombre está desapareciendo.

División.

El azúcar se disuelve porque es soluble.

Petitio principii

No le he visto echar sal al puchero, luego seguro que la sopa está sosa.

Razonamiento ad ignoratiam

No se han encontrado pruebas contra el acusado. Luego el acusado es inocente.

Razonamiento ad ignoratiam

La doctora Martínez piensa que el fármaco x es un buen remedio para la enfermedad y. Pero esto debe de ser falso, pues ya sabes que de la tal doctora no te puedes fiar..., no hay más que ver que ya se ha divorciado tres veces.

Ad hominem (mullierem)

Bibliografía

Entre los libros de texto más usuales para un curso de introducción a la lógica hay diferentes orientaciones. Algunos son más adecuados para estudiantes de Filosofía, mientras que otros lo son para personas con formación matemática, unos no pretenden ser más que una pequeña introducción al tema, mientras que otros estudian en detalle las propiedades principales de la lógica clásica. Presentamos a continuación una pequeña lista, que sin pretender ser ni exhaustiva ni quizás representativa de las diferentes orientaciones, sí que da cuenta, de alguna manera, de la diversidad existente.

[1] ALCHOURRÓN C.E. (ed.) *Lógica.* Madrid: Trota, CSIC. 1995.

[2] BARWISE, J., J. ETCHEMENDY et al., *Language, proof and logic.* Stanford, CA: CSLI. 2000.

[3] BADESA, C., I. JANE, I.& R. JANSANA, *Elementos de lógica formal.* Barcelona: Ariel. Arg. 1998.

[4] DEAÑO, A. *Introducción a la lógica formal.* Madrid: Alianza. 1978.

[5] ENDERTON, H. E., *A mathematical Introduction to Logic.* Boston: Academic Press. 1972.

[6] GAMUT, L.T.F. *Logic, Language and Meaning. I. Vol. Introduction to Logic.* Chicago: Univ. of Chicago Press. 1991.

[7] GARRIDO, M., *Lógica simbólica.* Madrid: Tecnos. 1974. [3. ed. 1995].

[8] HAMILTON, A. G. *Lógica para matemáticos.* Madrid: Paraninfo. 1981.

[9] HUNTER, G. *Metalógica.* Madrid: Paraninfo. 1981.

[10] LAYMAN, C.S. *The power of logic.* Boston: McGraw Hill. 2000.

[11] SHAPIRO, S. Classical Logic, URL = <http:// plato.stanford.edu/archives/ sum2003/entries/logic-classical/ >. 2003. *The Stanford Encyclopedia of Philosophy.* (Summer 2003 Edition). Edward N. Zalta (ed.).

[12] ROUTLEDGE *Encyclopedia of Philosophy, Version 1.0.* London and New York, 1998.