

¿Qué es la geometría no conmutativa?

por

Marta Macho Stadler, Universidad del País Vasco-Euskal Herriko Unibertsitatea

... Einstein was always rather hostile to quantum mechanics. How can one understand this? I think it is very easy to understand, because Einstein had been proceeding of different lines, lines of pure geometry. He had been developing geometrical theories and had achieved enormous success. It is only natural that he should think that further problems of physics should be solved by further development of geometrical ideas. How to have $a \times b$ not equal to $b \times a$ is something that does not fit in very well with geometrical ideas; hence his hostility to it...

P.A.M. Dirac, *The Mathematical Intelligencer* 11 (1989) 58.

La *Geometría no conmutativa* se apoya en los siguientes hechos esenciales:

- 1.-** los espacios usados por los físicos son no conmutativos en muchos casos:
 - (i) en Mecánica Cuántica, donde Heisenberg reemplaza el álgebra de funciones sobre el espacio de fases de la Mecánica Clásica, por un álgebra no conmutativa;
 - (ii) en Física del Estado Sólido (trabajos de Bellissard), el espacio de las energías-impulsión de un tal sistema se vuelve no conmutativo;

(iii) en Física de Partículas Elementales (para el modelo de Weinberg-Salam), se reemplaza la geometría del espacio-tiempo usual (una variedad de dimensión 4) por la geometría no conmutativa, “desdoblado” el espacio-tiempo;

2.- existen muchos ejemplos de espacios que surgen de manera natural (espacios de universos de Penrose, espacios de representaciones irreducibles de un grupo discreto, espacios de hojas de una foliación, grupos cuánticos, ...), y para los cuales las herramientas clásicas de matemáticas no son adecuadas, pero que corresponden de una manera muy natural a un álgebra no conmutativa;

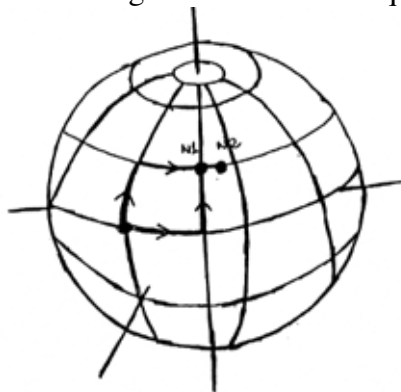
3.- es posible reformular los instrumentos clásicos de la Matemática (medida, topología, cálculo diferencial, cálculo diferencial métrico, ...), en términos algebraicos e hilbertianos, de modo que su marco natural se transforme en no conmutativo; en esta teoría general, el caso conmutativo no está aislado.

1. El mundo real no es conmutativo

La conmutatividad no es una propiedad adquirida en el mundo real. Por ejemplo, cuando nos levantamos por la mañana, no es demasiado importante el orden en el que nos ponemos el reloj o los zapatos. Pero, ¡más vale no cambiar la disposición de la ducha y el vestido!

En matemáticas, a menudo, los números conmutan, pero no las operaciones o las acciones. Además, todas las operaciones no conmutativas no son similares.

Veamos un ejemplo práctico: imaginemos dos navíos que levantan anclas a la vez desde el ecuador.



(i) El primer navío viaja 100 millas hacia el este, después gira y navega aún 100 millas hacia el norte;

- (ii) el segundo barco navega 100 millas hacia el norte, después gira y viaja 100 millas hacia el este.

El segundo barco queda 0.32 millas al este del primero. Pero, si se repite la misma operación con 1000 millas en vez de 100, el alejamiento es más largo, alrededor de 32 millas. La conmutatividad no puede aplicarse aquí a causa de la curvatura de la Tierra, y más aún, el error cometido depende de la distancia recorrida...

2. Motivación física de la geometría no conmutativa

Tenemos un sistema físico, cuyas propiedades queremos estudiar. Su descripción se realiza por medio de ciertas observaciones del sistema. Deseamos obtener un formalismo matemático en términos de estas observaciones.

En Mecánica Clásica es necesario, para determinar la trayectoria ulterior de una partícula, conocer a la vez su posición y su velocidad iniciales. Estos datos forman un conjunto de 6 parámetros, que son las 3 coordenadas de la posición q y las 3 del momento $p = mv$. Si se trabaja con n partículas, aparece un conjunto de $6n$ parámetros, que es el *espacio de fases* M del sistema mecánico considerado. A partir de una función sobre este espacio, el *hamiltoniano* (que mide la energía), se establece un sistema de ecuaciones diferenciales, que determinan la trayectoria a partir de las condiciones iniciales. La estructura natural de M es la de una *variedad simpléctica*, cuyos puntos son los *estados* del sistema. Las funciones sobre M son las *cantidades observables* del sistema. El hamiltoniano H es una función sobre M , que interviene para especificar la evolución de toda cantidad física observable, por la *ecuación de Hamilton* $\dot{f} = \{H, f\}$, donde $\{, \}$ es el corchete de Poisson y $\dot{f} = \frac{d}{dt}f$.

En los buenos casos (por ejemplo, el modelo planetario del átomo de hidrógeno), el sistema dinámico obtenido es *totalmente integrable*, es decir, hay suficientes constantes de movimiento para que al especificarlas, se reduzca el sistema a un movimiento casi-periódico. La descripción de un tal sistema es muy simple:

- 1) el álgebra de las cantidades observables es el álgebra conmutativa de las series casi-periódicas, $q(t) = \sum q_{n_1 \dots n_k} e^{2\pi i \langle n, v \rangle t}$, donde $n_i \in \mathbb{Z}$, $v_i \in \mathbb{R}^+$ son las

$$\text{frecuencias fundamentales y } \langle n, v \rangle = \sum_{i=1}^k n_i v_i;$$

- 2) la evolución en el tiempo está dada por la translación de la variable t .

Así, los principales objetos de la Mecánica Clásica en el *formalismo hamiltoniano*, son:

- (i) el *espacio de fases*, una variedad simpléctica de clase C^∞ , M ;
- (ii) los *observables*, funciones reales sobre M , que pueden considerarse como elementos de un álgebra;
- (iii) los *estados*, que son funcionales lineales sobre los observables;
- (iv) la *dinámica* de los observables está definida por un hamiltoniano H y una ecuación $\dot{f} = \{H, f\}$;
- (v) las *simetrías* del sistema físico actúan sobre observables o estados, a través de transformaciones canónicas de M .

Los observables, la dinámica y la simetría son objetos primarios. El espacio de fases y los estados pueden recuperarse a partir éstos.

Los resultados teóricos dicen que el conjunto de las frecuencias de las radiaciones emitidas por los átomos en un sistema físico es un subgrupo aditivo Γ de \mathbb{R} . A cada frecuencia emitida corresponden todos los múltiplos enteros o armónicos. En el modelo clásico, el álgebra de las cantidades físicas observables se lee directamente a partir del grupo Γ de las frecuencias emitidas: es el álgebra de convolución de este grupo de frecuencias. Como Γ es un grupo abeliano, el álgebra es conmutativa.

Pero, la espectroscopia y sus numerosos resultados experimentales muestran que este último resultado teórico está en contradicción con la experiencia: el conjunto de las frecuencias emitidas por un átomo no forma un grupo, es falso que la suma de dos frecuencias del espectro sea aún una de ellas. La experiencia dice que, en realidad, se trabaja con un *grupoide* $\Delta = \{(i, j) : i, j \in I\}$, con la regla de composición $(i, j) \cdot (j, k) = (i, k)$ (es el llamado *grupoide grosero*). El *principio de combinación de Ritz-Rydberg* permite indicar las líneas espectrales por Δ . Dos frecuencias v_{ij} y v_{kl} se componen si y sólo si $j = k$ y entonces $v_{il} = v_{ij} + v_{jl}$. El álgebra de convolución tiene aún sentido cuando se pasa de un grupo a un grupoide: es el *álgebra de matrices*. Al reemplazar el grupo Γ por el grupoide Δ dictado por la experiencia, el premio Nobel W. Heisenberg reemplaza la Mecánica Clásica (en la cual las cantidades observables conmutan dos a dos), por la Mecánica de las Matrices o Cuántica, en la cual las cantidades observables (tan importantes como la posición y el momento) ya no conmutan. Pero Heisenberg no entendió enseguida que el álgebra con la que estaba trabajando era ya conocida por los matemáticos (el álgebra de matrices), las reglas de cálculo algebraico de Heisenberg le fueron

impuestas por los resultados experimentales de la espectroscopia, y más adelante Jordan y Born identificaron éste álgebra.

En la Mecánica de Matrices, una cantidad física observable está dada por sus coeficientes $\{q(i, j) : (i, j) \in \Delta\}$. La evolución en el tiempo de un observable está dada por el homomorfismo de Δ en \mathbb{R} , que lleva cada línea espectral (i, j) en su frecuencia v_{ij} , obteniéndose la fórmula (similar a la clásica) $q_{(i,j)}(t) = q(i, j)e^{2\pi i v_{ij} t}$. Para obtener el análogo de la ley de evolución de Hamilton, se define una cantidad física particular, H , que juega el papel de la energía clásica y está dada por sus coeficientes $H_{(i,j)}$, donde $H_{(i,j)} = 0$ si $i \neq j$ y $H_{(i,i)} = 2\pi\hbar v_i$ ($v_{ij} = v_i - v_j$ y \hbar es la constante de Planck). Se verifica la fórmula $\frac{d}{dt}f = \frac{i}{\hbar}[H, f]$ (donde $[H, f] = Hf - fH$), que es parecida a la de Hamilton. Por analogía con la Mecánica Clásica (donde $\hbar = 0$), se obliga a los observables q de posición y p de momento, a verificar la ecuación $[p, q] = i\hbar$. La forma algebraica de la energía clásica como función de p y q , da entonces la *ecuación de Schrödinger*. El *principio de incertidumbre de Heisenberg*, que estipula que la posición y la cantidad de movimiento de una partícula no pueden conocerse simultáneamente con grados de precisión independientes, es precisamente una consecuencia de la no conmutatividad.

Así, los principales objetos a Mecánica Cuántica son:

- (i) el *espacio de fases*, espacio proyectivo $P(\mathcal{H})$ de un espacio de Hilbert \mathcal{H} ;
- (ii) los *observables*, operadores auto-adjuntos sobre \mathcal{H} ;
- (iii) los *estados* del sistema físico están definidos por un vector unitario $\xi \in \mathcal{H}$;
- (iv) la *dinámica* de un observable f está definida por un operador autoadjunto H , a través de la *ecuación de Heisenberg* $\dot{f} = \frac{i}{\hbar}[H, f]$;
- (v) las *simetrías* del sistema físico actúan sobre observables o estados a través de operadores unitarios sobre \mathcal{H} .

3. Fundamentos matemáticos de la geometría no conmutativa

El “padre” de la geometría no conmutativa es el medalla Fields A. Connes.

Una C^* -álgebra A es un álgebra de Banach compleja, provista de una involución, verificando respecto a la norma de espacio de Banach, la relación $\|a^*a\| = \|a\|^2$. A puede pensarse como una subálgebra autoadjunta y cerrada para la norma de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, para algún espacio de Hilbert \mathcal{H} .

El primer ejemplo de C^* -álgebra es el siguiente: si M es un espacio localmente compacto, el álgebra de las *funciones nulas en el infinito*,

$$C_0(M) = \{f: M \rightarrow \mathbb{C} : \forall \epsilon > 0, \exists \text{ compacto } K_\epsilon \subset X \text{ t.q. } |f(x)| < \epsilon, \text{ si } x \notin K_\epsilon\},$$

dotada de la involución $f^*(x) = \overline{f(x)}$, para $x \in M$, es una C^* -álgebra conmutativa. $C_0(M)$ no es más que la completación del álgebra $C_c(M)$ de las funciones de soporte compacto. Si M es compacto, $C_0(M) = C(M)$.

El teorema central de esta teoría es:

Teorema de Gelfand: *Toda C^* -álgebra conmutativa es de la forma $C_0(M)$, para algún espacio localmente compacto y separado M ,*

es decir, la categoría de las C^* -álgebras conmutativas y $*$ -homomorfismos, es dual de la categoría de espacios localmente compactos y aplicaciones continuas propias.

Una variedad M de clase C^∞ , puede considerarse desde diferentes puntos de vista:

- (1) el punto de vista de la teoría de la medida (de Lebesgue): M se piensa como un espacio medible con una clase de medidas fijada;
- (2) el punto de vista de la topología: M aparece como un espacio localmente compacto;
- (3) el punto de vista de la geometría diferencial: M se presenta como una variedad diferenciable.

Cada una de estas estructuras sobre M está completamente especificada, por la correspondiente álgebra de funciones, a saber:

- (1) el álgebra conmutativa de Von Neumann $L^\infty(M, \mu)$ de las clases de funciones esencialmente acotadas y medibles sobre M . El *Teorema de Riesz* proporciona la “fórmula mágica” $\mu[f] = \int_M f d\mu$;
- (2) la C^* -álgebra $C_0(M)$ de las funciones continuas sobre M que se anulan en el infinito;
- (3) el álgebra $C_c^\infty(M)$ de las funciones de clase C^∞ con soporte compacto.

Todas las propiedades de M pueden leerse a través de propiedades de su álgebra de funciones. A continuación, presentamos un breve diccionario entre los mundos conmutativo-no conmutativo:

Mundo conmutativo	Mundo no conmutativo
$M \equiv C_0(M)$	A no conmutativo
aplicación propia	morfismo
homeomorfismo	automorfismo
abierto en M	ideal en A
punto en M	ideal maximal en A
abierto denso en M	ideal esencial en A
cerrado en M	cociente en A
medida μ	estado sobre A
$L^\infty(M, \mu)$	álgebra de Von Neumann
compacto en M	unitario de A
compactificación	adjunción de unidad
C_{II}	separabilidad
conexión	no existe idempotente no trivial
fibrado vectorial sobre M	módulo proyectivo tipo finito en A
k -forma diferencial	k -ciclo de Hochschild
k -corriente de DeRham	k -cociclo de Hochschild
homología de DeRham	cohomología cíclica

El “esquema” de funcionamiento de la geometría no conmutativa es el siguiente:

- (i) dado un objeto geométrico *singular* \mathcal{G} , se empieza encontrando una *desingularización* $\tilde{\mathcal{G}}$ de \mathcal{G} ,
- (ii) es de esperar que $\tilde{\mathcal{G}}$ tenga suficiente estructura como, como, a partir de él, encontrar una C^* -álgebra $C^*(\mathcal{G})$, cuya complejidad refleje la estructura de \mathcal{G} ,
- (iii) utilizando métodos de geometría no conmutativa, se trata de investigar la C^* -álgebra no conmutativa $C^*(\mathcal{G})$, y deducir propiedades medibles, topológicas o geométricas de \mathcal{G} a partir de las propiedades analíticas de $C^*(\mathcal{G})$.

Las diferentes líneas de desarrollo de la *geometría no conmutativa* en los últimos años, se pueden resumir en: K y KK -teoría, teoremas del índice para operadores diferenciales con coeficientes no conmutativos, teoremas del índice para operadores diferenciales sobre variedades foliadas (conjetura de Baum-Connes), conjeturas de Novikov, cohomología cíclica, complejos de DeRham no conmutativos, clases características no conmutativas, grupos cuánticos, ...

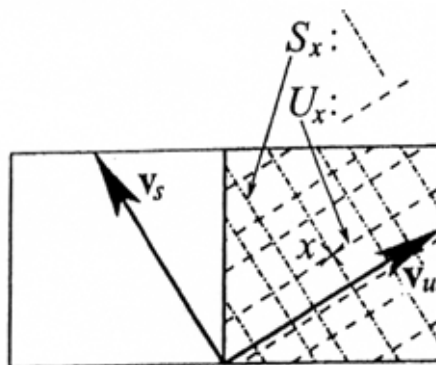
4. Tres ejemplos de aplicación de de la geometría no conmutativa

4. (i) La “aplicación gato” de Arnold

La “aplicación gato” de Arnold es un ejemplo de aplicación caótica. Es el ejemplo más sencillo de *difeomorfismo de Anosov* sobre una variedad compacta y de *sistema dinámico uniformemente hiperbólico*. La descubrió el matemático ruso V. Arnold, usando una imagen plana de un gato, y de allí su nombre. Es una ilustración sencilla de algunos de los principios del caos, como por ejemplo, el orden subyacente en una evolución (aparentemente) aleatoria de un sistema.

El espacio de fases es $(\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2, \mu)$ donde μ es la medida inducida por la medida de Lebesgue de \mathbb{R}^2 y $A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es la aplicación lineal dada por la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ de determinante 1. A preserva las áreas y es *ergódica* respecto a la medida de Lebesgue. La aplicación $\Phi_A: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$, inducida por paso al cociente, verifica la igualdad $\Phi_A \circ \pi = \pi \circ A$, donde $\pi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ es la aplicación cociente. Así, Φ_A es un automorfismo del toro y el sistema dinámico $(\mathbb{T}^2, \mu, \Phi_A)$ se llama “*aplicación gato*” de Arnold.

A tiene dos autovectores ortogonales $v_u = \left(1, \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$ y $v_s = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 1\right)$, correspondientes a los autovalores $\lambda_u = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ y $\lambda_s = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$. A “dilata” por el factor $\lambda_u > 1$ en la *dirección inestable* v_u y “contrae” por el factor $\lambda_s < 1$ en la *dirección estable* v_s (ésto es precisamente la hiperbolicidad). En la imagen, se ve el efecto sobre el espacio de fases:

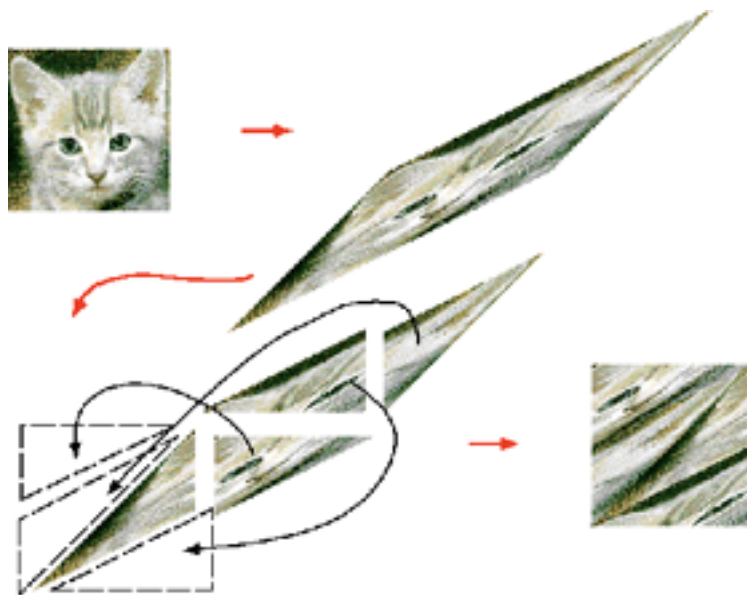


La variedad estable S_x (respectivamente, inestable U_x) por cada punto del espacio de fases $x \in \mathbb{T}^2$ es la proyección por π de la línea que pasa por x y con vector

tangente v_s (respectivamente, v_u). Como $\lambda_u, \lambda_s \in \mathbb{I}$, las líneas S_x y U_x son densas en el toro para cada $x \in \mathbb{T}^2$, y de aquí el mal comportamiento del espacio de órbitas. La descomposición $\mathbb{T}^2 = \bigcup_{x \in I} S_x = \bigcup_{x \in I} U_x$ del espacio de fases en las partes estables e inestables es infinita (no contable).

Se puede codificar este sistema dinámico con sucesiones simbólicas de letras de un alfabeto finito con ciertas “reglas gramaticales”, es decir, se le puede asociar un sistema dinámico simbólico (usando particiones de Markov). La C^* -álgebra asociada es portadora de más información que el sistema original.

Con esta aplicación y las imágenes de su evolución, se ilustra una transformación que aparentemente cambia al azar la organización original de sus pixels. Sin embargo, iterada un número suficiente de veces, como por arte de magia, la imagen original reaparece.



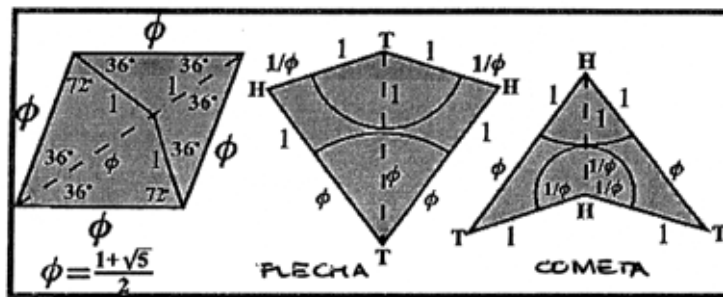
4. (ii) La teselación de Penrose

Los mosaicos proporcionan modelos para los *sólidos quasi-cristalinos* (aleaciones de metal con propiedades de estructura y simetría muy peculiares), un área de interés creciente dentro de la Física. No son propiamente los mosaicos, sino ciertas “discretizaciones” quienes constituyen los *modelos de difracción* de ese tipo de sólidos. La investigación del espectro de una partícula que se mueve en un sólido de ese tipo conduce directamente al estudio de los espacios no conmutativos asociados

a mosaicos, ya que el álgebra de observables es precisamente la C^* -álgebra de la teselación.

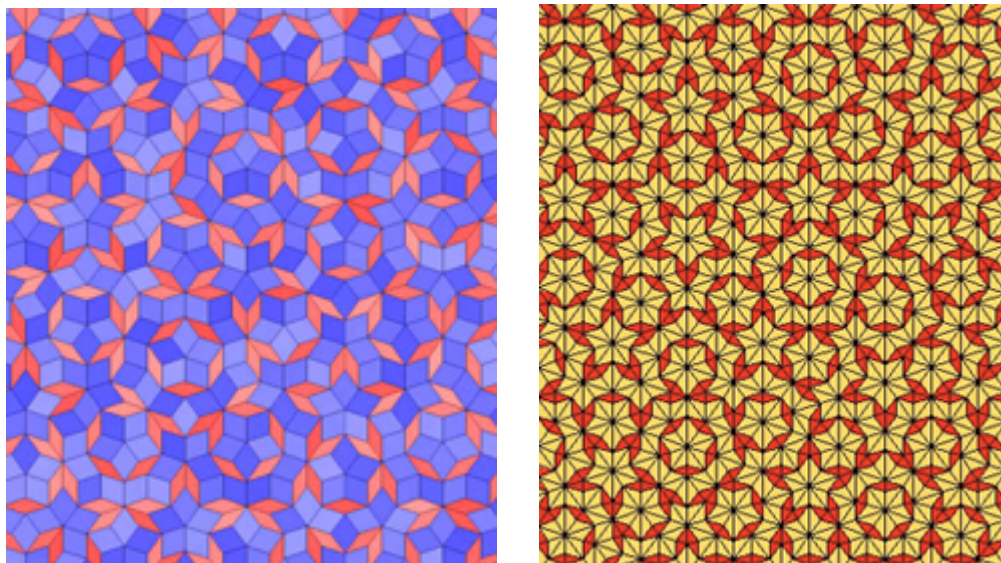
Un *mosaico* o *teselación* del plano es una descomposición del plano en polígonos, llamados *teselas*, obtenidos por traslación (o mediante un subgrupo de movimientos rígidos que contenga a las traslaciones) a partir de un número finito de teselas modelo.

El físico-matemático R. Penrose era capaz de construir teselaciones en el plano, con simetría pentagonal; es conocido que ésto no es posible por medio de teselas periódicas con piezas iguales: estas teselaciones están compuestas por dos tipos de piezas la *flecha* y la *cometa*, con la condición de que cada vértice tiene colores de emparejamiento.



Una característica sorprendente de las teselaciones de Penrose, es que todo motivo finito sucede (infinitas veces) en cualquier otra teselación de Penrose. Decimos que dos de tales teselaciones son *iguales*, si se puede llevar la una en la otra por isometría del plano (esta definición no es trivial, porque ninguna de las teselaciones es periódica). Tiene sentido la noción de *frecuencia de aparición* de flechas (respectivamente, de cometas) por unidad de área, y la razón entre estas dos frecuencias es la *razón áurea*. Como esta proporción es un número irracional, resulta imposible fragmentar el mosaico en una sola celda-unidad que contenga un número entero de cada tipo de dibujo. Nunca será posible decidir localmente que teselación es la que tenemos: si un explorador aterriza en paracaídas sobre un tal plano teselado, no podrá distinguir en que teselación está. Cada zona finita de un patrón cualquiera encaja dentro de cualquier otro patrón.

Sin embargo, se puede probar que hay realmente distintas teselaciones, e incluso infinitas (no contables) diferentes, es decir, existen infinitas maneras de cubrir un mosaico en su totalidad mediante teselas en forma de dardos y cometas.



Para ello, se parametrizan tales teselaciones por un conjunto K de sucesiones infinitas de 0 y 1, satisfaciendo una condición de consistencia:

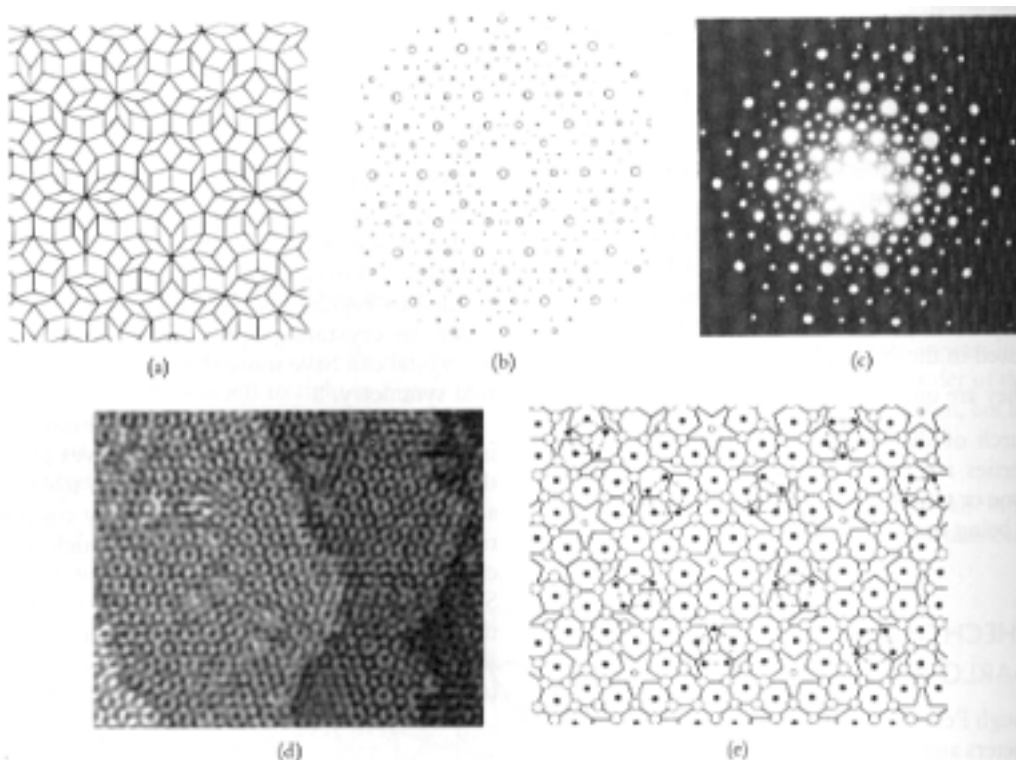
$$K = \{ \{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} : z_n = 0 \text{ ó } 1, (z_n = 1 \Rightarrow z_{n+1} = 0) \}.$$

Este punto es crucial, y se prueba que dos sucesiones z y z' definen la misma teselación de Penrose, $z \sim z'$, si y sólo si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $z_k = z'_k$ para cada $k \geq n$. El espacio K es compacto, de hecho, es un Cantor.

El espacio de los *universos de Penrose* es el espacio cociente $\mathcal{P} = K / \sim$. Para estudiar \mathcal{P} , la idea es distinguir distintos teselados por medio de un álgebra de funciones: existen de verdad diferentes teselaciones de Penrose, porque se pueden construir diferentes invariantes topológicos y usarlos para “etiquetar” las teselaciones. Por ejemplo, hay invariantes topológicos etiquetados por los enteros: todo patrón finito aparece en cada teselación de Penrose, pero en el límite, para regiones cada vez mayores del mosaico, la frecuencia relativa de aparición de patrones, es diferente, es decir, la teselaciones se distinguen “vistas de lejos”.

Aunque Penrose pudo observar que parte de los conceptos aceptados por los cristalógrafos no eran absolutamente ciertos como ellos creían, no era fácil enfrentarse a las reglas que aquellos habían estado siguiendo durante más de un siglo. Las reglas en cuestión sostenían que las estructuras aperiódicas eran inadmisibles, debido a que las unidades de átomos que forman los cristales deben estar ordenados de manera regular con el fin de llenar completamente el espacio. Por ejemplo, en la sal común los iones de sodio y de cloro se asientan en los ángulos de un cubo y éstos

se apilan para formar el cristal de sal. Fueron pocos los que se tomaron en serio las ideas de Penrose, pero en 1984 se encontró un diminuto cristal metálico compuesto de aluminio y manganeso, que tenían una forma tan asombrosa e inesperada como la de los copos de nieve de cinco puntas. Los rayos X y los electrones reflejados en los cristales mostraban la simetría quíntuple de Penrose, un hecho, que según las antiguas leyes de la cristalografía, no era posible.



En las anteriores figuras, se muestra:

- (a) la teselación de Penrose;
- (b) estructura 3-D basada en la teselación de Penrose, que proporciona un patrón de difracción teórico;
- (c) patrón de difracción de la aleación **Mn-Al**;
- (d) imagen al microscopio de la aleación **Al-Cu-Co**;
- (e) teselación correspondiente a la anterior aleación: **Al** corresponde a los círculos en blanco y **Cu-Co** a los círculos negros.

4. (iii) El toro no conmutativo

Para $\theta \in \mathbb{R}$, las curvas integrales del campo de vectores $X = \frac{\partial}{\partial x_1} + \theta \frac{\partial}{\partial x_2}$ definen un flujo \mathcal{F}_θ sobre el toro \mathbb{T}^2 (de otra manera, son las soluciones de la ecuación $dy = \theta dx$). Si $\theta \in \mathbb{Q}$, cada hoja es una circunferencia. En otro caso, cada hoja es densa, de hecho, una copia de \mathbb{R} , “puesta de manera densa” en el toro, y la distribución inducida es el *flujo de Kronecker* \mathcal{F}_θ .



Si se intenta analizar el espacio de órbitas $X = \mathbb{T}^2/\mathcal{F}_\theta$ desde el punto de vista de la topología, X es un espacio indiscreto, sin ningún interés. Pero existe la C^* -álgebra asociada a X , $C^*(\mathbb{T}^2/\mathcal{F}_\theta)$, que es no trivial y que describe las propiedades topológicas de este espacio de órbitas: sea \mathcal{A}_θ la C^* -álgebra universal engendrada por dos generadores unitarios u y v , con la relación de conmutación (que es la forma unitaria de la relación de conmutación de Heisenberg $[p, q] = i\hbar$ de la Mecánica Cuántica): $uv = e^{-2i\pi\theta}vu$. Es el *álgebra de rotación irracional o toro no conmutativo*. Los elementos de \mathcal{A}_θ , tienen como elemento genérico el del tipo $\sum_{n,m \text{ finito}} a_{mn} u^m v^n$ y esto forma una subálgebra densa en él. Pero, hay otros elementos que no pueden escribirse de este modo.

Este álgebra es mucho más complicada que $C(\mathbb{T}^2)$, que es la C^* -álgebra universal engendrada por dos generadores unitarios u y v , pero con la relación de conmutación $uv = vu$:

- (1) $C(\mathbb{T}^2)$ tiene muchos ideales, \mathcal{A}_θ es simple;
- (2) $C(\mathbb{T}^2)$ es conmutativa y \mathcal{A}_θ no. De hecho, su centro está formado justamente por los escalares (los únicos elementos que conmutan con todos los elementos de \mathcal{A}_θ son justo los múltiplos de la identidad),
- (3) \mathcal{A}_θ tiene una única aplicación traza y $C(\mathbb{T}^2)$ (a diferencia de las álgebras de

matrices $M_n(\mathbb{C})$ posee muchas trazas normalizadas:

$$\tau(f) = \int_0^1 \int_0^1 f(e^{2\pi is}, e^{2\pi it}) g(e^{2\pi is}, e^{2\pi it}) ds dt,$$

con g función de probabilidad sobre \mathbb{T}^2 (es decir, una función positiva sobre \mathbb{T}^2 tal que $\int_0^1 \int_0^1 g(e^{2\pi is}, e^{2\pi it}) ds dt = 1$;

(4) \mathcal{A}_θ tiene muchos proyectores y $C(\mathbb{T}^2)$ sólo dos (0 y 1).

Así, tenemos la familia de álgebras de operadores $\{\mathcal{A}_\theta : \theta \in \mathbb{I}\}$, ¿cómo clasificarlas? ¿son todas distintas? ¿cuáles son isomorfas? Para resolver esto hay que recurrir a su estructura proyectiva, es decir, a $K_0(\mathcal{A}_\theta)$ y calcular las trazas de estos proyectores, que son un “código” para \mathcal{A}_θ . En 1980, M.A. Rieffel prueba que existe un proyector $e_\theta \in \mathcal{A}_\theta$, tal que $\tau(e_\theta) = \theta$, y así se deduce la *propiedad de Pimsner-Rieffel-Voiculescu*, $\tau(\text{Proy}(\mathcal{A}_\theta)) = (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\theta) \cap [0, 1]$, donde τ es la única aplicación traza normalizada. Así, esto proporciona el invariante más algebraico, dado por la identidad $\tau_*(K_0(\mathcal{A}_\theta)) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\theta$.

Luego, las álgebras \mathcal{A}_θ no son todas iguales: si $\mathcal{A}_\theta \simeq \mathcal{A}_{\theta'}$ (para $0 < \theta, \theta' < 1$), entonces $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\theta = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\theta'$ con lo que $\theta = \theta'$ ó $\theta' = 1 - \theta$ (si se relaciona θ con la constante de Plank por $\hbar = 2\pi\theta$, este álgebra es muy distinta si se hacen pequeñas variaciones o aproximaciones de \hbar !).

Este álgebra ha permitido a J. Bellissard modelizar el efecto de Hall cuántico. Y aparece también en otros contextos, como en estructuras periódicas en campos magnéticos, modelos matriciales de teoría de cuerdas, juega un papel universal en la teoría de representación de grupos de Lie y proporciona un armazón conveniente para el estudio de los operadores de Schrödinger con potenciales casi-periódicos.

Bibliografía

- [1] A. Connes, *Non Commutative Geometry*, Academic Press, 1994.
- [2] R. Penrose, *The role of aesthetics in pure and applied mathematical research*, Bull. Inst. Math. Appl., 10 (1974), 266-271.
- [3] R. Penrose, *Las sombras de la mente*, Crítica, 1996.
- [4] G. Peterson, *Arnold's cat map*, preprint, 1997.