Curiosidades sobre el Conjunto de Cantor

por

Marta Macho Stadler, Universidad del País Vasco-Euskal Herriko Unibertsitatea

El conjunto de Cantor puede pensarse como el intermedio entre el punto y la recta: es un conjunto "con muchos agujeros", de longitud nula, tiene tantos puntos como $\mathbb{R}$, es autosemejante (es decir, cada una de sus partes, observada con una lente de aumento adecuada, reproduce en cierto sentido el conjunto total). Se trata de un conjunto de probada utilidad en topología (foliaciones, teoría de finales), sistemas dinámicos (teoría ergódica), teoría de la medida, álgebra (fracciones continuas),... y es una fuente continua de contraejemplos.

En este trabajo, se pretende dar algunos ejemplos topológicos donde el conjunto de Cantor aparece directa o indirectamente. Prepárate para disfrutar con las sorpresas que siguen... ¡muchas de ellas desafían la intuición geométrica!

1. Un poco de historia: el genio de Georg Cantor

Resultaron tan chocantes a la intuición de sus contemporáneos las ideas de G. Cantor, que el eminente matemático francés H. Poincaré condenó su teoría de los números transfinitos como una *enfermedad*, de la que algún día llegarían las Matemáticas a *curarse*. L. Kronecker, que fue uno de los maestros de Cantor y miembro preeminente de la matemática institucional alemana, llegó incluso a atacarle directa y personalmente, calificándolo de *charlatán científico, renegado y corruptor de la juventud*.

Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor nació el 3 de marzo de 1845 en San Petesburgo (Rusia). Su madre, María Anna Böhm, procedía de una familia que contaba entre sus miembros con varios músicos de talento; Cantor heredó considerables cualidades artísticas y musicales, siendo un destacado violinista. Su padre, Georg Waldemar Cantor, era un próspero comerciante y luterano devoto, que transmitió a su hijo profundas convicciones religiosas. Siendo Cantor todavía niño, la familia se mudó de Rusia a Alemania, y fue en este país donde Cantor empezó a estudiar matemáticas. En 1868, recibió el título de Doctor por la Universidad de Berlín, con una tesis sobre teoría de los números; dos años más tarde, aceptaba un puesto de *Privatdozent* en la Universidad de Halle am Saale, institución respetada, aunque no de tan gran prestigio en matemáticas como las Universidades de Göttingen o Berlín.

Comenzó a trabajar en series trigonométricas (H.E. Heine trabajaba en Halle), estudio números reales, números irracionales como sucesión infinita de números racionales...; muchos matemáticos encontraron difícil admitir el método de Cantor, porque presuponía la existencia de sucesiones o conjuntos formados por infinitos elementos. Filósofos y matemáticos habían venido rechazando desde los tiempos de Aristóteles la noción de infinitud completa, a causa, sobre todo, de las paradojas que parecía plantear. Galileo, por ejemplo, había hecho notar que, *si en matemáticas fueran admisibles conjuntos infinitos completos, habría tantos números enteros pares como pares e impares reunidos*. Otra de las voces que manifestaban tradicionalmente oposición a la idea de infinidad completa eran las alzadas por teólogos: *el único infinito en el acto sólo puede ser Dios*. Cantor sabía muy bien que Santo Tomás de Aquino, en particular, había mostrado una oposición formal (la cuestión del infinito estaba teológicamente relacionada con otros asuntos fundamentales relativos a las dimensiones del mundo, a su origen, a su fin, ...). En su **Summa Teológica**, Santo Tomás de Aquino (1225-1247) había tomado clara posición contra el infinito actual *es totalmente imposible que una multiplicidad infinita se dé en el acto*. Se apoyaba en un par de argumentos:

1. toda multiplicidad (multitudo) se reduce a la multiplicidad de números, siempre mensurable gracias a la unidad, y por tanto, en modo alguno infinita;

2. una multiplicidad creada por Dios debe responder a una intención predetermi-

nada, en otros términos, debe ser expresable "mediante un número determinado", con lo que queda excluida la existencia de un infinito actual.

Por suerte, tras una cuidadosa búsqueda, Cantor descubre un poderoso aliado en San Agustín (354-430); este último ataca en **La ciudad de Dios** a quienes le niegan a Dios la posibilidad de concebir la infinitud. Es un texto, señala Cantor, "de importancia primordial para mis propios puntos de vista", de aquí que lo transcriba también completo y en latín. Su idea sustancial podría resumirse así: *¿quién osa negar a Dios el poder de conocer todos los números y, en particular, los números infinitos? ¿Debemos creer, acaso, que Dios puede sumar números hasta un cierto límite pero le está vedado ir más allá?*. Para San Agustín, se trata de "algo completamente insensato", tanto más cuando es bien sabido de todos que Dios ama las matemáticas; nos lo ha dicho Platón y también la Biblia. En pocas palabras, una inteligencia que está por encima de todo número puede comprender a la perfección la "infinitud del número". Para Cantor, se trata de una inmejorable defensa del **transfinito**.

La Teología ayudaba a Cantor y él, a su vez, aportaba a la Iglesia católica su parte de verdad. En esta época, en 1879, el papa León XIII había hecho pública una importante encíclica **Aeterni Patris**, en la que deseaba que la Iglesia y la Ciencia se acercasen. En el siglo XIX, la ideas científicas habían sido utilizadas con frecuencia por materialistas y otros apóstatas. León XIII había sido formado por los jesuitas, se interesaba por la ciencias (en particular por la física y la astronomía). No se trataba tanto de hacer compatible la Teología con la Ciencia como de indicar a los científicos *cómo había que hacer para reconciliarse con los verdaderos principios de la filosofía cristiana.*

Entre los oponentes de Cantor, el más temible fue, sin duda, el matemático berlinés L. Kronecker. Según él, las matemáticas sólo podían construirse correctamente si recurrían exclusivamente a los números enteros y a un número finito de operaciones. Más en general, Kronecker otorgaba a la aritmética una primacía sobre el análisis, que según él, "encubría" errores lógicos. Este punto de vista **finitista** o **constructivista** tenía méritos que Cantor reconocía... pero, bien mirado, revelaba que el purismo de Kronecker era abusivo y amenazaba con esterilizar el pensamiento matemático. La razón inmediata para introducir los números transfinitos, mantenía Cantor, estaba en que eran necesarios para seguir avanzando en la teoría de conjuntos y en el estudio de los números reales. No obstante para poder responder a críticos como Kronecker, Cantor argumentó desde una postura filosófica formalista: una vez reconocida la consistencia interna de los números transfinitos, no podía negárseles un puesto junto a otros miembros antaño controvertidos y hoy admitidos en matemáticas, como por ejemplo, los números irracionales. Habiendo formulado una teoría de lo infinito capaz de sortear las conocidas paradojas matemáticas, Cantor estaba convencido de haber eliminado la única objeción que los matemáticos podían oponer para negarse a considerar en sus trabajos conjuntos infinitos completos. Relacionada con esta teoría, la conjetura llamada *hipótesis del continuo* de Cantor que jamás ha sido demostrada. En 1963, P.J. Cohen (Universidad de Stanford), demostró que aunque la hipótesis del continuo es coherente con los axiomas de una versión usual de la teoría de conjuntos, es también independiente de ellos. De hecho, la hipótesis del continuo desempeña en teoría de conjuntos, un papel análogo al que en geometría tiene el postulado euclídeo de las paralelas. Es posible construir diferentes versiones de la teoría de conjuntos según que la hipótesis del continuo se suponga verdadera o falsa, lo mismo que pueden construirse geometrías euclídeas y no euclídeas según se admita que se cumple o no el postulado de las paralelas.

En mayo de 1884, Cantor sufrió su primer colapso nervioso verdaderamente grave. La enfermedad se impuso con rapidez sorprendente y duró algo más de un mes. En la época, sólo se reconocía la fase maníaca de la psicosis maníaco-depresiva; cuando Cantor se "recobró" a finales de junio de 1884, entrando en la fase depresiva, se quejó de carecer de la energía e interés necesarios para retornar al pensamiento matemático riguroso, contentándose con cuidar en la universidad de cuestiones administrativas.

Si bien acabó reaunudando su investigación en matemáticas, fue interesándose de forma cada vez más absorbente por otros temas. Emprendió un estudio de la historia y literatura inglesas, progresivamente más y más absorto por una cuestión académica, que muchos de sus contemporáneos se tomaron con notable seriedad: la conjetura de que la obra dramática de W. Shakespeare la compuso el filósofo F. Bacon. Aunque sin éxito, Cantor probó suerte un tiempo como profesor de filosofía y comenzó a mantener correspondencia con teólogos interesados por las consecuencias filosóficas de sus teorías acerca del infinito.

Georg Cantor tuvo un papel esencial en la creación de una Sociedad Profesional para el desarrollo de las Matemáticas en Alemania: *la Deutsche Mathematiker-Vereiningung*. Convencido como estaba de que su propia carrera había padecido grave daño al haber sido su trabajo rechazado de forma prematura y cargada de prejuicios por el aparato matemático institucional, confiaba en que una organización independiente serviría para alentar y "desafiar" a los matemáticos jóvenes y para servir de foro de ideas nuevas, por radicales o extremas que fueran.

Cantor falleció el 6 de enero de 1918 en la Clínica Psiquiátrica de Halle a causa de un fallo cardíaco.

Existen entre la enfermedad mental de Cantor y las matemáticas que creó importantes conexiones. Ciertos documentos sugieren que ocasionalmente la enfermedad le proporcionó periódicos respiros de los asuntos cotidianos, durante los cuales pudo insistir con ahínco en sus ideas matemáticas, ya fuera en la soledad del hospital, ya en la tranquilidad de su casa.

2. La primera definición de conjunto de Cantor

Cantor no fue el primer descubridor de los conjuntos que llevan su nombre. Además, Cantor introdujo estos conjuntos, no por motivos topológicos o geométricos, sino como consecuencia de un programa puramente aritmético.

En 1875, H.J.S. Smith, catedrático de la Universidad de Oxford publica el artículo *On the integration of discontinuous functions*, Proc. London Math. Soc. 1(6), 140-153, donde tras una exposición sobre la integración de funciones discontinuas, Smith presenta un método para construir conjuntos "loose-order" (nada-densos):

... Let m be any given integral number greater than 2. Divide the interval from 0 to 1 into m equal parts; and exempt the last segment from any subsequent division. Divide each of the remaining $m - 1$ segments into m equal parts; ant exempt the last segments from any subsequent subdivision. If this operation be continued ad infinitum, *we shall obtain an infinite number of points of division P upon the line from 0 to 1. This points lie in loose order....*

Está implícita en esta discusión la aceptación de que los intervalos eliminados en el proceso son abiertos, con lo que el conjunto resultante es cerrado. Hoy en día, ese conjunto se llamaría "un Cantor generalizado". Este parece ser el primer registro publicado de un tal conjunto.

3. La definición de Cantor

Carta de Cantor a Dedekind, Halle am Saale, 5 noviembre 1882:

... por lo que puedo ver, nuestros números irracionales finitos pueden determinarse de manera relativamente sencilla con la ayuda de números α; voy a proseguir mis investigaciones sobre este punto. Sea P el conjunto de los números contenidos en la fórmula $z = \alpha_1\frac{1}{3} + \alpha_2\frac{1}{3^2} + \ldots + \alpha_n\frac{1}{3^n} + \ldots$, en la cual los α_n sólo toman los

valores 0 y 2. Entonces P tiene las siguientes propiedades:

1. *$P = P'$,*

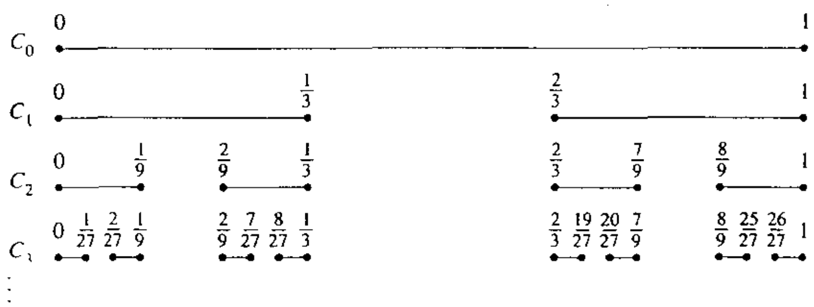
2. *P no es denso en ningún intervalo.*

De 1879 a 1884, Cantor escribió una serie de cinco artículos bajo el título *Über unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten*, que contienen el primer tratamiento sistemático de la topología de la recta real, y otras investigaciones de mayor orden sobre conjuntos derivados, que marcaron los inicios de la *teoría de los números transfinitos* de Cantor. En ellos define lo que es un *conjunto denso*, y muestra relaciones entre estos conjuntos y sus conjuntos derivados. En el quinto artículo de esta serie, Cantor discute las particiones de un conjunto en dos componentes que llama *reducible* y *perfecta*, y define lo que es un *conjunto perfecto*. Muestra que un conjunto perfecto no tiene porque ser denso, y en el pie de página de este artículo, Cantor introduce el *conjunto ternario*, como el conjunto de los puntos de la forma $\alpha_1\frac{1}{3} + \alpha_2\frac{1}{3^2} + \ldots + \alpha_n\frac{1}{3^n} + \ldots$, con los α_n tomando únicamente los valores 0 y 2. Prueba que este conjunto es infinito, perfecto, no denso en ningún intervalo, independientemente de los pequeño que se tome el intervalo.

Mientras Cantor trabajaba en ésto, otros matemáticos estudiaban las extensiones del Teorema Fundamental del Cálculo a funciones discontinuas. Cantor define su conjunto y la función de Cantor asociada, como la función que en el complementario del conjunto de Cantor toma los valores $\frac{1}{2}\frac{\alpha_1}{2} + \ldots + \frac{\alpha_{n-1}}{2^{n-1}} + \frac{2}{2^n}$, para $x \in (a, b)$, donde $a = \frac{\alpha_1}{3} + \ldots + \frac{\alpha_{n-1}}{3^{n-1}} + \frac{1}{3^n}$ y $b = \frac{\alpha_1}{3} + \ldots + \frac{\alpha_{n-1}}{3^{n-1}} + \frac{2}{3^n}$, con α_n 0 ó 2, y observa que puede extenderse naturalmente a una función continua y creciente sobre $[0, 1]$.

4. El ternario de Cantor y sus propiedades

Se divide el intervalo $[0, 1]$ en tres intervalos de la misma amplitud, se elimina el intervalo abierto central (que se llamará intervalo abierto de tipo 1) $\delta = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ y se conservan los intervalos cerrados (que se llamarán de tipo 1) $\Delta_0 = [0, \frac{1}{3}]$ y $\Delta_1 = [\frac{2}{3}, 1]$. Se divide cada intervalo cerrado de tipo 1 en tres intervalos de la misma amplitud. Se eliminan de nuevo los intervalos abiertos centrales (intervalos abiertos de tipo 2), $\delta_0 = (\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$ y $\delta_1 = (\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$ respectivamente, y se conservan los intervalos cerrados (de tipo 2) resultantes, $\Delta_{00} = [0, \frac{1}{9}]$, $\Delta_{01} = [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}]$, $\Delta_{10} = [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}]$ y $\Delta_{11} = [\frac{8}{9}, 1]$.



Se continúa de este modo el proceso, obteniendo para cada $n \in \mathbb{N}$, 2^n intervalos cerrados $\Delta_{i_1 \cdots i_n}$ de tipo n donde i_j es 0 ó 1. Cada intervalo cerrado de tipo n se divide en tres partes de la misma amplitud, conservando dos intervalos cerrados $\Delta_{i_1 \cdots i_n 0}$ y $\Delta_{i_1 \cdots i_n 1}$ (llamados intervalos cerrados de tipo $n+1$) y eliminando cada intervalo abierto $\delta_{i_1 \cdots i_n}$ de tipo $n+1$ que queda entre ellos. Sea C_n la reunión de los intervalos cerrados de tipo n y $\mathfrak{C} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n$. $\mathfrak{C}$ se llama *conjunto perfecto de Cantor, discontinuo de Cantor* o *conjunto ternario de Cantor.* Entonces:

(i) $\mathfrak{C}$ es un conjunto cerrado y no vacío, luego compacto;

(ii) la suma de las longitudes de todos los intervalos abiertos eliminados en el proceso es la longitud del intervalo $[0, 1]$, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k-1}}{3^k} = 1$, en ese sentido, $\mathfrak{C}$ es un conjunto "pequeño";

(iii) todo punto de $\mathfrak{C}$ posee una representación ternaria única $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$, donde a_n es 0 ó 2; así $\mathfrak{C}$ es no contable y en ese sentido, $\mathfrak{C}$ es un conjunto "grande";

(iv) $\mathfrak{C}$ no posee puntos aislados en $[0, 1]$;

(v) $\mathfrak{C}$ tiene interior vacío, es decir, es nada-denso;

(vi) $\mathfrak{C}$ posee dos tipos de puntos:

- los puntos de primera especie, son en cantidad contable y son los extremos de los intervalos abiertos eliminados durante el proceso de construcción; estos puntos son densos en $\mathfrak{C}$,

- los puntos de segunda especie, que son una familia no contable;

(vii) $\mathfrak{C}$ es totalmente disconexo y no localmente conexo;

(viii) $\mathfrak{C} = \prod_{n\in\mathbb{N}} \{0,2\}$, donde $\{0,2\}$ es el espacio discreto formado por dos puntos;

(ix) todos los espacios métricos totalmente disconexos, perfectos y compactos son homeomorfos, de otra manera, $\mathfrak{C}$ es un representante de esta clase de espacios, que llamaremos *conjuntos de Cantor*;

(x) todo compacto métrico es la imagen continua de $\mathfrak{C}$;

(xi) el Cantor $\mathfrak{C}$ es homogéneo, en el sentido de que para cada par de puntos $x, y \in \mathfrak{C}$, existe un homeomorfismo $f\colon \mathfrak{C} \longrightarrow \mathfrak{C}$ tal que $f(x) = y$;

(xii) $\mathfrak{C}$ es la unión disjunta de dos copias de si mismo, es decir, es *autosemejante*;

(xiii) todo abierto en $\mathfrak{C}$, es homeomorfo a $\mathfrak{C}$ o a $\mathfrak{C} - \{0\}$.

5. ¿Qué es $\mathfrak{C} + \mathfrak{C}$? Una sorpresa...

Como $\frac{1}{2}\mathfrak{C} = \{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n} : x_n = 0,1\}$, se concluyen las igualdades

$$\frac{1}{2}\mathfrak{C}+\frac{1}{2}\mathfrak{C} = \{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x_n + y_n)}{3^n}, x_n = 0,1 \text{ y } y_n = 0,1\} = \{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z_n}{3^n}, z_n = 0,1,2\} = [0,1].$$

Así, ¡$\mathfrak{C} + \mathfrak{C} = [0,2]$!

6. Dimensión topológica y dimensión fractal

Las rectas y las curvas tienen dimensión 1, los planos y superficies dimensión 2, los sólidos como los cubos tienen dimensión 3 y así, la dimensión de un objeto es n si se necesitan n variables independientes para describir un entorno de cada punto. Esta es la *dimensión topológica*, introducida por H. Poincaré, que no detecta la "irregularidad" del objeto.

¿Cuál es la relación entre el tamaño de un objeto (longitud, área, volumen) y su diámetro?

(i) si cubrimos un cuadrado de lado 1 con "cuadraditos" de longitud ϵ, necesitamos $\frac{1}{\epsilon^2}$ de tales cuadraditos para hacerlo,

(ii) para cubrir un segmento de longitud 1, nos hacen falta $\frac{1}{\epsilon}$ segmentos de longitud ϵ, y la misma cantidad de cuadrados de longitud ϵ,

(iii) para cubrir un cubo de lado 1, nos hacen falta $\frac{1}{\epsilon^3}$ "cubitos" de lado ϵ, ...

el exponente es la dimensión del objeto a medir, y esto no es una casualidad. Teniendo en cuenta esta propiedad, definimos la *dimensión "contando-cajas", de similaridad o fractal* de $S \subset \mathbb{R}^n$ del modo siguiente: para $\epsilon > 0$, sea $N_\epsilon(S)$ el mínimo número de cubos n-dimensionales de longitud ϵ para cubrir S. Si existe $d \in \mathbb{R}$, tal que $N_\epsilon(S) \sim \frac{1}{\epsilon^d}$ cuando ϵ tiende a 0, decimos que la *dimensión fractal* de S es d, y se denota por $dim_{frac}(S) = d$. Esto significa que $\lim\limits_{\epsilon\to 0}\left(\frac{N_\epsilon(S)}{\frac{1}{\epsilon^d}}\right)$ es una constante k. Tomando logaritmos en la anterior expresión $\lim\limits_{\epsilon\to 0}\left(\log(N_\epsilon(S)) + d\log(\epsilon)\right) = \log(k)$, luego $d = \lim\limits_{\epsilon\to 0}\left(\frac{\log(k) - \log(N_\epsilon(S))}{\log(\epsilon)}\right) = -\lim\limits_{\epsilon\to 0}\left(\frac{\log(N_\epsilon(S))}{\log(\epsilon)}\right)$ y como $0 < \epsilon < 1$, es $\log(\epsilon) < 0$, y d es positivo. Esta dimensión coincide con la de Hausdorff, de difícil definición, para conjuntos compactos, fractales (un fractal F verifica que $dim_{frac}(F) > dim_{top}(F)$) y autosemejantes.

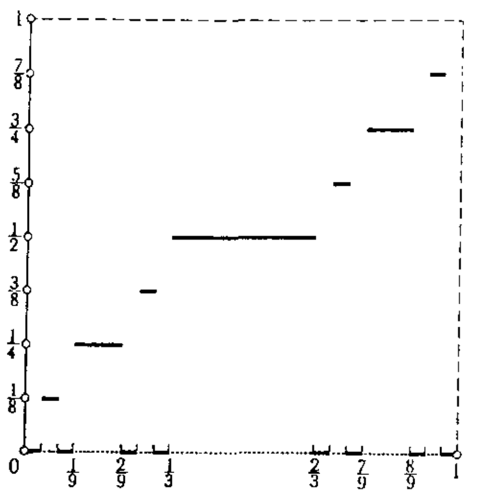
El ternario de Cantor es un conjunto fractal, ya que no es difícil probar que $dim_{top}(\mathfrak{C}) = 0$ y $dim_{frac}(\mathfrak{C}) = \frac{log(2)}{log(3)} = 0.630905$.

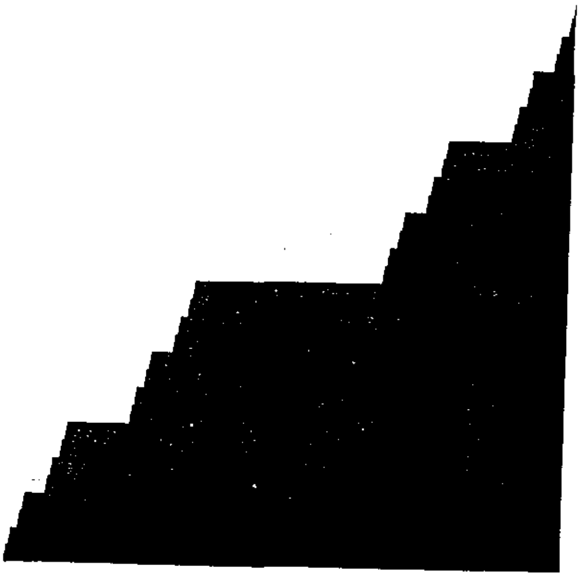
7. La escalera del diablo

La escalera del diablo es un ejemplo de "función de Cantor", otras funciones de este tipo asociadas a distintos conjuntos de Cantor y en diferentes dimensiones, pueden encontarse en **http://www.math.clemson.edu/ mfitch/math/Cantor/**

Se construye una aplicación continua $f\colon \mathfrak{C} \longrightarrow [0,1]$, por si $c \in \mathfrak{C}$ tiene la expansión ternaria $c = \sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{a_i}{3^i}$, con $a_i \neq 1$, entonces tomamos $f(c) = \frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{a_i}{2^i}$. Así, f es uniformemente continua y además $f(\mathfrak{C}) = [0,1]$. Esta función $f\colon \mathfrak{C} \longrightarrow [0,1]$ posee una extensión natural continua $f^*\colon [0,1] \longrightarrow [0,1]$, del modo siguiente, si a y b son los puntos finales (izquierdo y derecho) de un intervalo excluido en el n-ésimo paso de la construcción del conjunto ternario de Cantor, entonces $a = \sum\limits_{i=1}^{n-1}\frac{a_i}{3^i} + 2\sum\limits_{i=n+1}^{\infty}\frac{1}{3^i}$ y $b = \sum\limits_{i=1}^{n-1}\frac{a_i}{3^i} + \frac{2}{3^n}$, donde $a_i \neq 1$ para $i = 1, \dots, n-1$. Se define en tal caso,

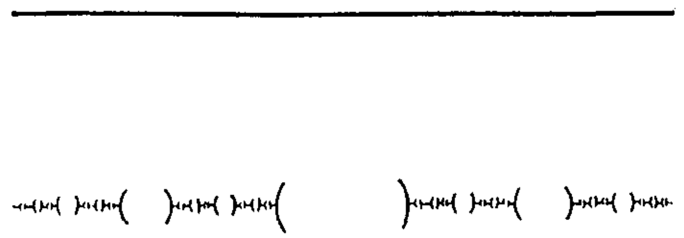
$f(a) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{a_i}{2^i} + \sum_{i=n+1}^{\infty}\frac{1}{2^i} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{a_i}{2^i} + \frac{1}{2^n} = f(b)$. Y $f^*(x) = f(a) = f(b)$, para $x \in [a, b]$, es la extensión continua de f buscada.





8. Un Cantor de medida no nula y algunas construcciones asociadas

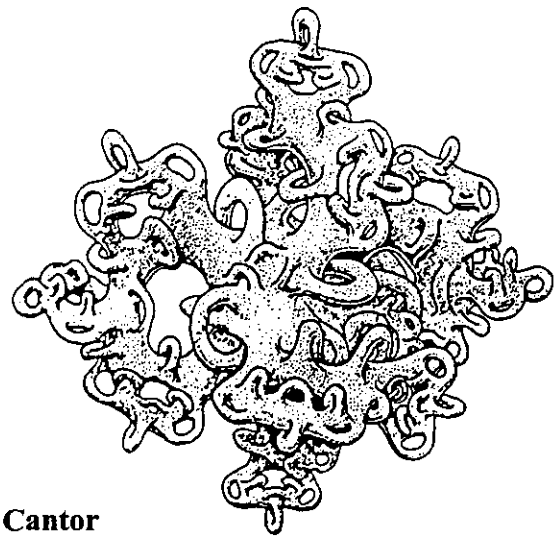
De $[0, 1]$, se elimina un intervalo abierto de longitud $\frac{1}{4}$. De los dos intervalos restantes, se quita el central de longitud $\frac{1}{16}$. En la k-ésima etapa, se eliminan de las 2^k piezas un segmento abierto de longitud $\frac{1}{4}.2^{-2k}$. En una cantidad numerable de pasos, se elimina un conjunto de longitud total $\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty} 2^k 2^{-2k} = \frac{1}{2}$, y el conjunto resultante $\mathfrak{C}^*$ es un Cantor de longitud $\frac{1}{2}$.



Sea σ un arco regular en $\mathbb{R}^2$, de $(0,0)$ a $(1,0)$ sobre el eje OX como se muestra en la figura, y su reflexión. Reemplazamos cada segmento eliminado en la construcción anterior por una copia "en escala adecuada" de σ.

La "curva" resultante es una variedad embebida en $\mathbb{R}^2$, excepto para el conjunto $\mathfrak{C}^*$, que tiene longitud $\frac{1}{2}$.

Si a un esfera $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$, se le añaden infinitas asas de área total finita, se obtiene una superficie S, con un conjunto singular de Cantor de área positiva. S es el límite de una variedad regular sin borde de familias de esferas con cantidades crecientes de asas.



9. El árbol de Cantor

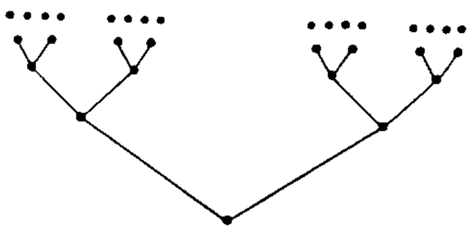
Para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, definimos inductivamente 2^n puntos del plano euclídeo y conjuntos del modo:

0) $n = 0$, el punto $(\frac{1}{2}, -1)$ y $A_0 = \{1\}$,

1) para $n = 1$, los puntos $(\frac{1}{6}, -\frac{1}{2})$, $(\frac{5}{6}, -\frac{1}{2})$ y $A_1 = \{1, 5\}$,

...

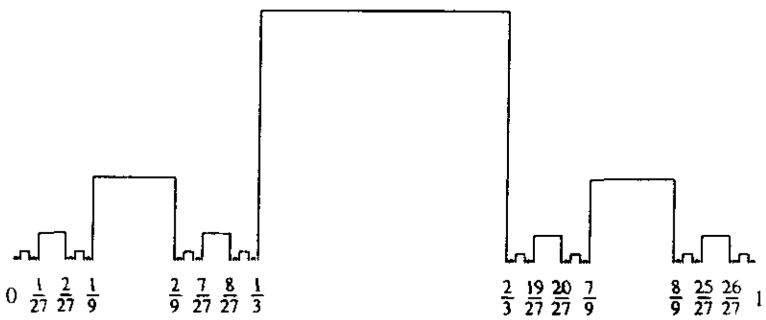
r) si $\{(\frac{a}{2.3^r}, -\frac{1}{2^r}) : a \in A_r\}$ es el conjunto de puntos definidos para $n = r$, tomando $n = r + 1$ se consideran los puntos $\{(\frac{b}{2.3^{r+1}}, -\frac{1}{2^{r+1}}) : b \in A_{r+1}\}$, donde $A_{r+1} = A_r \cup \{2.3^{r+1} - a : a \in A_r\}$.



Entonces, el *árbol de Cantor* es el subespacio $\mathcal{A}$ definido por la familia de segmentos $I_{r,a} = \left[x_{(r,a)}, x_{(r+1,3a-2)}\right]$ y $D = \left[x_{(r,a)}, x_{(r+1,3a+2)}\right]$, siendo $x_{(r,a)} = \left(\frac{a}{2.3^r}, -\frac{1}{2^r}\right)$ con $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $a \in A_r$. Los finales de este espacio están en correspondencia biyectiva con los puntos adherentes en el plano, es decir, $\mathfrak{C}$ (los puntos $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{1}{18}$, $\frac{5}{18}$, ... son los puntos medios de las componentes de $[0, 1] - \mathfrak{C}$).

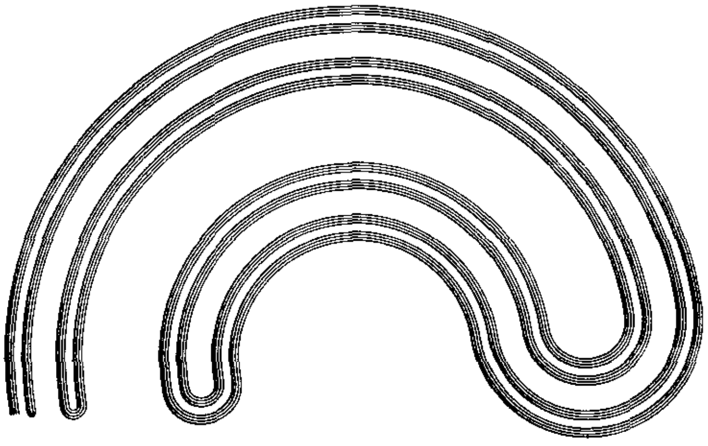
10. La metrópolis de Cantor

$\mathfrak{M}$ es la unión de $\mathfrak{C} \times \{0\}$ junto con la esquina superior y las dos caras verticales del cuadrado sobre cada abierto eliminado en la construcción de $\mathfrak{C}$. $\mathfrak{M}$ es conexo.



11. El torbellino de Cantor

Sea X el eje de abscisas en el plano $\mathbb{R}^2$, para $A \subset X$, consideramos $S^+(c, A)$ la unión de los semicírculos en el semiplano superior $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$, con centro en $(c, 0)$ y puntos finales en A. Sea $S^-(c, A)$ la unión de los semicírculos en el semiplano inferior $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq 0\}$, con centro en $(c, 0)$ y puntos finales en A. Sea $T_0 = S^+(\frac{1}{2}, \mathfrak{C}_0)$, donde $\mathfrak{C}_0 = i(\mathfrak{C})$, $\mathfrak{C}$ es el ternario de Cantor e i es la inclusión usual de la recta en el plano. Sea $T_1 = S^-(\frac{3}{4}, \mathfrak{C}_1)$, donde $\mathfrak{C}_1 = i(\mathfrak{C} \cap (\frac{2}{3}, 1))$. Sea la similaridad $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $f(x, y) = (\frac{x}{3}, \frac{y}{3})$. Para $n > 1$, se define $T_n = f^{(n)}(T_1)$, donde $f^{(n)}$ denota la n-ésima iteración de f. Notar que $T_2 \cap X$ es la imagen del segundo cuarto de $\mathfrak{C}$, que es el mismo que la última mitad de $\frac{1}{3}\mathfrak{C}$, y, más en general $T_n \cap X = f^{(n)}(\mathfrak{C}_0)$. Al conjunto $\mathfrak{T} = \bigcup_{n \geq 1} T_n$, se le llama *torbellino de Cantor*, que es compacto, conexo y no es localmente conexo.



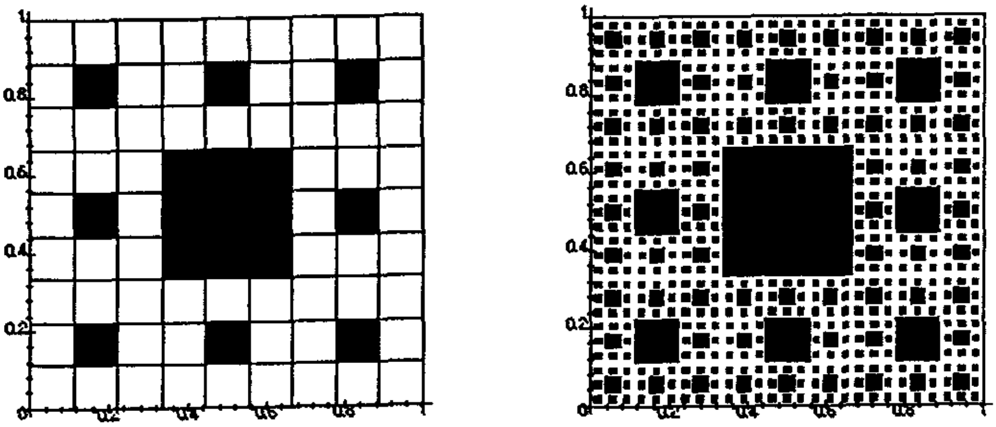
12. El remolino de Cantor

El *remolino de Cantor* es una de las imágenes de rodajas de dimensión 2 del "cubic connected locus", que es el análogo 4-dimensional del conjunto de Mandelbrot, y describe la familia cúbica $z \to z^3 + az + b$, con $a, b \in \mathbb{C}$.

En la página **http://www2.geom.umn.edu/graphics/images/medium/General- Interest/ Fractals/ CCL/cantor-whirlpool.gif**, se ve una imagen de este conjunto creada con el programa BROT.

13.El cuadrado de Cantor

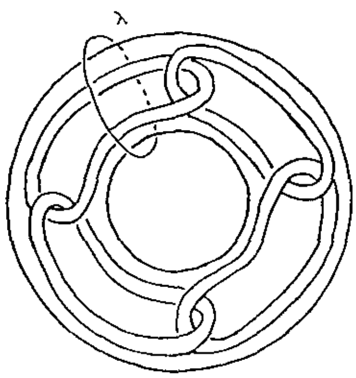
Sea $Q_0 = [0, 1] \times [0, 1]$ y sea Q_1 el conjunto de los puntos en Q_0, cuyas dos componentes poseen como primeras cifras de su desarrollo ternario 0 ó 2. Q_1 es unión de 4 subconjuntos; en general Q_n se define como unión de 4^n cuadrados. K, la intersección de los Q_n, es homeomorfo a $\mathfrak{C} \times \mathfrak{C}$, y a $\mathfrak{C}$ por lo tanto.



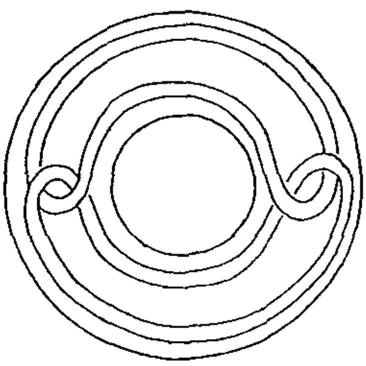
14. El collar de Antoine

En abril de 1917, Louis Antoine, con 29 años, antiguo alumno de l'Ecole Normale Supérieure, agregado de Matemáticas (desde 1912) es capitán en el 151 Regimiento de Infantería en el frente delante de Reims. El 16 de abril, es herido por una bala, que le deja ciego. Durante su larga estancia en el hospital, donde G. Julia comparte su habitación durante largos meses, H. Lebesgue le da la esperanza de poder hacer una tesis, evocando los ejemplos de Euler y Gauss que, también quedándose ciegos, continuaron sus trabajos. Lebesgue le dirige hacia la topología de dimensión 2 y 3, por una parte porque había aún poca bibliografía para traducir en Braille, y por otra parte, tras el testimonio de G. Julia, con la esperanza de que *"Dans une telle étude, les yeux de l'esprit et l'habitude de la concentration remplaceront la vision perdue"*. En julio de 1921, L. Antoine defiende en Estrasburgo su Tesis de Estado *Sur l'homéomorphie de deux figures et de leurs voisinages*, que contiene lo esencial de sus trabajos científicos. Esta tesis es una contribución fundamental a la topología en dimensión 3, y en particular de un método geométrico para construir un cierto conjunto de Cantor de $\mathbb{R}^3$, que es "el collar de Antoine". Este ejemplo juega en primer lugar el papel de un ejemplo simbolizando las trampas y peligros que se encuentran al trabajar los topólogos al pasar de la dimensión 2 a la dimensión 3: *Tout ce que l'on peut prévoir relevant le bon sens est exact dans le plan mais est toujours faux dans l'espace à plus de deux dimensions. Notre intuition est toujours celle d'êtres infiniment plats*, (G. Julia, Notice nécrologique de Louis Antoine, Comptes Rendues Acad. Sciences 272 (1971) 71-74). Y sirve también en la construcción de contraejemplos para una larga serie de conjeturas clásicas (conjetura de Schoenflies, conjetura de Brouwer y del quinto problema de Hilbert para grupos de transformaciones). De manera directa, el collar de Antoine es la base geométrica misma de la célebre involución de $\mathbb{S}^3$ inventada por R.H. Bing; es contemplando el collar que Bing imagina su célebre "shrinking criterion" que permite más tarde a R. Edwards probar que la doble suspensión de una esfera homológica es una verdadera esfera. Y en una de sus discusiones con Edwards, M. Freedman encuentra la herramienta para llevar a cabo la demostración de la conjetura de Poincaré en dimensión 4 y la clasificación de las variedades simplemente conexas en dimensión 4.

El *collar de Antoine* es la intersección de una familia decreciente de conjuntos cada uno de los cuales es la unión de una familia finita de toros sólidos disjuntos cuyos diámetros se acercan a cero con $\frac{1}{k}$: sea $T = X_1$ un toro lleno. En el interior de X_1, se embeben $k \geq 2$ toros T_i^2 enlazados, más pequeños, que forman los eslabones de una cadena.

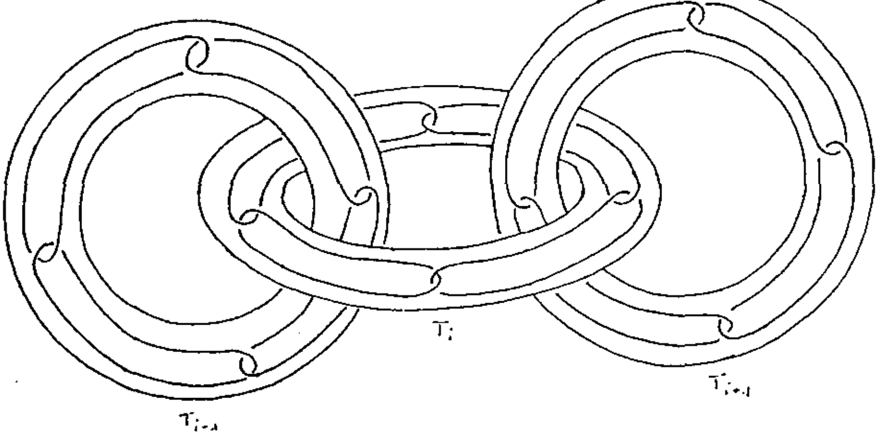


$k = 4$

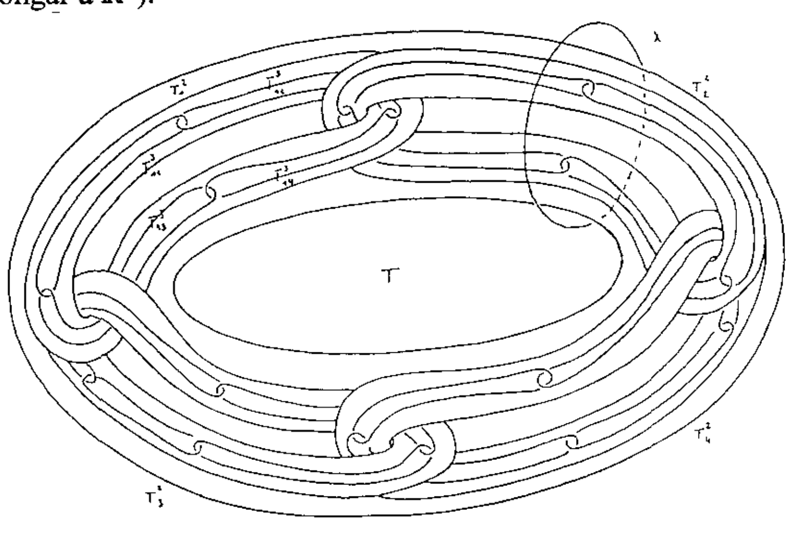


$k = 2$

La manera en que los toros están enlazados no tiene importancia, se puede suponer que $diam(T_i^2) \leq \frac{1}{2}diam(T)$. Se pone $X_2 = \bigcup_{i=1}^{k} T_i^2$. Tres eslabones consecutivos $T_{i-1}^2, T_i^2, T_{i+1}^2$ de la cadena de $k = 4$ se presentan de la forma



Sea $h_i\colon T \longrightarrow T_i$ una similaridad de T sobre T_i, entonces $X_3 = \bigcup_{i=1}^{k} h_i(X_2)$, que es la unión de k^2 toros T_i^3. Por recurrencia, si X_n contiene los k^n toros T_i^n, se eligen k^{n-1} similitudes $h_i\colon T \longrightarrow T_i^n$, y se escribe $X_{n+1} = \bigcup_{i=1}^{k^{n-1}} h_i(X_2)$, reunión de k^n toros. Se puede suponer que $diam(T_i^n) \leq \frac{1}{2^n} diam(T)$. Se obtiene una serie de inclusiones $T = X_1 \supset X_2 \supset X_3 \supset \ldots$, y se define el collar $\mathcal{A}$ como la intersección de los X_n. $\mathcal{A} \neq \emptyset$, de hecho, cada componente conexa de C de cada conjunto T_i^n interseca $\mathcal{A}$. Como las componentes de T_i^n están cerca de otras componentes de T_j^m, cuando n, m son grandes, se tiene que cada punto de $\mathcal{A}$ es un punto límite de $\mathcal{A}$. Como las componentes de T_i^n tienen diámetro pequeño cuando n es grande, $\mathcal{A}$ es totalmente disconexo, y obviamente $\mathcal{A}$ es compacto, así $\mathcal{A}$ es un conjunto de Cantor. $\mathbb{R}^3 - \mathcal{A}$ no es simplemente conexo (hay un lazo λ no contráctil). Si U es un conexo abierto que contiene a $\mathcal{A}$, entonces existe una 2-esfera S tal que $\mathcal{A} \subset S \subset U$, así $\mathbb{R}^3$ contiene una "esfera salvaje" y un "arco salvaje" (un homeomorfismo de $\mathcal{A}$ sobre C no se puede prolongar a $\mathbb{R}^3$).

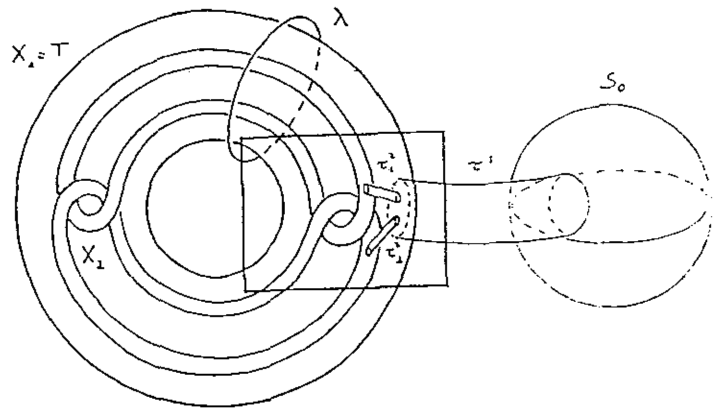


Una bonita construcción del collar de Antoine (que aparece en el libro de D.Roseman, *Elementary Topology*, Prentice Hall, 1999) puede verse en **http://www.cs.ubc.ca/nest/imager/contributions/scharein/various/AntoinesNecklace.html**. Allí también aparece la tercera etapa de la construcción del collar (imagen creada con KnotPlot), una preciosa imagen coloreada.

http://www.geom.umn.edu/graphics/pix/General-Interest/Fractals/antoine.html muestra una imagen del collar de Antoine creada con $n = 10$ toros anudados.

15. La esfera de Antoine-Alexander

Se trata de construir una "esfera salvaje" con ayuda del collar de Antoine: se quita un disco a la esfera $\mathbb{S}_0$ y se reemplaza este disco por un tubo τ^1 al que se le pega un toro $X_1 = T$,



y se obtiene $Y_1 = (\mathbb{S} - disco) \cup \tau^1 \cup X_1$. Y de modo similar

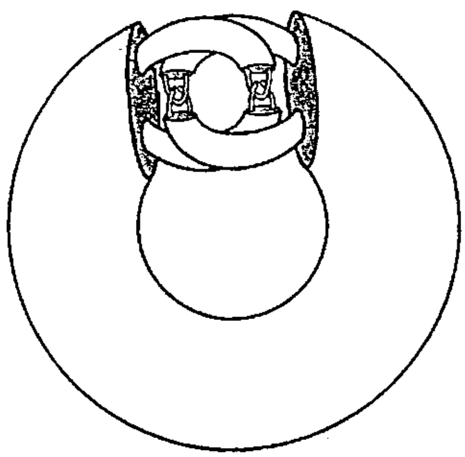
$$Y_2 = (\mathbb{S}_0 - disco) \cup \tau^1 \cup (\tau_1^2 \cup \tau_2^2) \cup X_2$$

$$Y_3 = (\mathbb{S}_0 - disco) \cup \tau^1 \cup (\tau_1^2 \cup \tau_2^2) \cup (\tau_{11}^3 \cup \tau_{12}^3 \cup \tau_{21}^3 \cup \tau_{22}^3) \cup X_3.$$

Se obtiene una filtración $Y_1 \supset Y_2 \supset \ldots$ y se escribe $\Sigma = \bigcap_{n\geq 1} Y_n \simeq \mathbb{S}^2$, que es una esfera salvaje de $\mathbb{R}^3$ que contiene al collar de Antoine $\mathcal{A}$, es la *esfera de Antoine-Alexander*. La componente no acotada de $\mathbb{R}^3 - \Sigma$ no es simplemente conexa. Es un contraejemplo a la conjetura de Schoenflies en $\mathbb{R}^3$.

16. La esfera con cuernos de Alexander

Buscando una simplificación de la esfera salvaje conteniendo al collar de Antoine, en noviembre de 1923, J.W. Alexander presenta una nota en la National Academy of Sciences, *An example of a simply connected surface bounding a region which is not simply connected*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **10**, 8-10, 1924, en la que, con la ayuda del collar de Antoine, obtiene la famosa "esfera cornuda" que lleva su nombre. Este conjunto es un sólido compuesto por una unión contable de conjuntos compactos, es homeomorfo a una bola de dimensión 3, y su frontera es por lo tanto una esfera. Es un ejemplo de "embebimiento salvaje" en $\mathbb{R}^3$. Su complementario no es simplemente conexo y su grupo fundamental no está finitamente generado. El conjunto de los puntos "salvajes" es un conjunto de Cantor, es la familia de los límites de sucesiones de puntos situados sobre las ramas de la esfera (son los "finales" de las ramas). Esta esfera no es equivalente a la esfera de Antoine-Alexander (porque aquí, el complementario de los puntos "salvajes" si es simplemente conexo), no incluimos su construcción por ser complicada y parecida a la anteriores, aunque si una imagen de una de las etapas del proceso inductivo.



17. Cantor y ... la luna

La International Astronomical Union tiene una *Planetary System Nomenclature*: cuando se obtienen imágenes en la superficie de un planeta o satélite, se elige un tema para nombrar características, y sólo unas cuantas cualidades importantes se destacan. Con un sistema complicado y rígido, los Comités de la I.A.U. deciden... nombres de científicos, personajes históricos,... Cantor tiene un lugar en esta nomenclatura:

en 1970, se dió su nombre a un cráter de la luna de latitud 38.2N y longitud 118.6E. Ver **http://wwwflag.wr.usgs.gov/USGSFlag/space/nomen/nomen.html**

18. Corrientes Filosóficas y Matemática: el lugar de Cantor

Describimos a continuación algunas de las más importantes corrientes filosóficas en Matemáticas, intentando ubicar a G. Cantor entre ellas:

Pitagorismo: la esencia del mundo físico es matemática. El número natural es el fundamento de toda realidad material, y ello, en parte, porque los números pueden representarse por figuras (números triángulo, cuadrado,...). En el mundo moderno, el pitagorismo consiste en afirmar que la estructura del físico real (partículas, campos, espacio tiempo,...) es matemática. Las matemáticas no son una descripción de la realidad por medio de símbolos, son la expresión misma de la estructura de lo real, el lenguaje de lo real.

Empirismo: La modelización de regularidades empíricas es el motor del desarrollo matemático. Las matemáticas son "formas" extraidas de la naturaleza (Aristóteles, H. Fourier,...)

Platonismo: Las matemáticas son un mundo de ideas independientes del mundo de los fenómenos. Forman un lenguaje híbrido o intermedio que permite a partir del "sensible", verificar ideas, conceptos donde el "sensible" es un reflejo pálido. Las Matemáticas tienen amenudo la impresión de describir un mundo conceptual "que ya está allí", que no inventan y que se impone a ellas (G. Cantor, K. Gödel, R. Penrose, A. Connes, ...): *Il existe une réalité mathématique qui précède l'élaboration des concepts.*

Intuicionismo: Las matemáticas no son una ciencia que engendra conceptos, sino la ciencia de la representación de los conceptos en las formas del espacio y del tiempo, que todos los sujetos conocedores poseen a priori para percibir el mundo (L.E.S. Brouwer, A. Heyting,...).

Formalismo o estructuralismo : Para los formalistas, las matemáticas son un juego con los símbolos, un sistema de deducciones lógicas obtenidas en el interior de ese lenguaje a partir de axiomas (D. Hilbert, N. Bourbaki, A. Lichnerovicz, ...)

Logicismo: En la línea del formalismo, las matemáticas se derivan de conceptos puramente lógicos (G. Frege, B. Russel, ...).

Naturalismo: Las matemáticas están ligadas a capacidades psicológicas o neurofisiológicas del sujeto humano, adquiridas o a capacidades innatas del cerebro ligadas a la evolución (J. Piaget, J.P. Changeux, S. Dahaene, ...).

Precisamente en el libro *Matière à pensée*, de J.P. Changeux y A. Connes (Ed. Odile Jacob, 1989), hay una magnifica "discusión" entre el "naturalista" y el "platonista". Y en *Triangle de pensées* (Ed. Odile Jacob, 2000) hay otro debate entre A. Connes, el formalista A. Lichnerovicz y el también matemático M.P. Schützenberger.

Bibliografía

[A] L. Antoine, *Sur l'homéomorphie de deux figures et de leurs voisinages*, J. Math. Pures Apl. 86, 221-325, 1921.

[C] J. Cavaillès, *Philosophie Mathématique*, Hermann, 1962.

[D] J.W. Dauben, *Georg Cantor: his Mathematics and Phylosophy of the infinite*, Princeton University Press, 1990.

[GG] I. Grattan-Guiness, *Towards a Bibiography of Georg Cantor*, Ann. of Sci. 27, n^{0}4, 345-391, 1971.

[I] H. Ibish, *L'oeuvre mathématique de Louis Antoine et son influence*, Expositiones Mathematicae 9, 251-274, 1991.

Como dijo G. Cantor: *La esencia de las matemáticas radica en su libertad.*