¿TE GUSTA LA FÍSICA?
LA MAGIA DE LAS ONDAS.

José Luis Martín Iglesias
Profesor de Tecnoloxía no
I.E.S. nº1 de Ordes (A Coruña)

Andaina Matemática
24 de abril de 2006

Una *onda* es una perturbación física que se propaga en el espacio y en el tiempo.
En general, el estudio de ondas se comienza analizando algún tipo de onda mecánica: en ellas, ha de existir un medio material que se perturbe y a través del cual se propague la perturbación.
Es decir, partiendo de un medio o sistema en equilibrio, realizamos una perturbación (una modificación de las condiciones, como la presión del aire o la tensión de una cuerda) en un punto o región del espacio durante un cierto intervalo de tiempo, de modo que se produce un cambio en el sistema o en el medio que se transmite a su través. El cambio en el estado del sistema implica el cambio de valor de alguna magnitud física relevante en el mismo.

Por tanto, para producir una onda mecánica precisamos de tres elementos:

- **una *fuente* que produce una perturbación (causa)**
- **un *medio material* que se pueda perturbar.**
- **una *conexión física* entre las partículas del medio que explique la transmisión de la perturbación.**

La característica fundamental de las ondas es que transportan energía sin transportar materia.

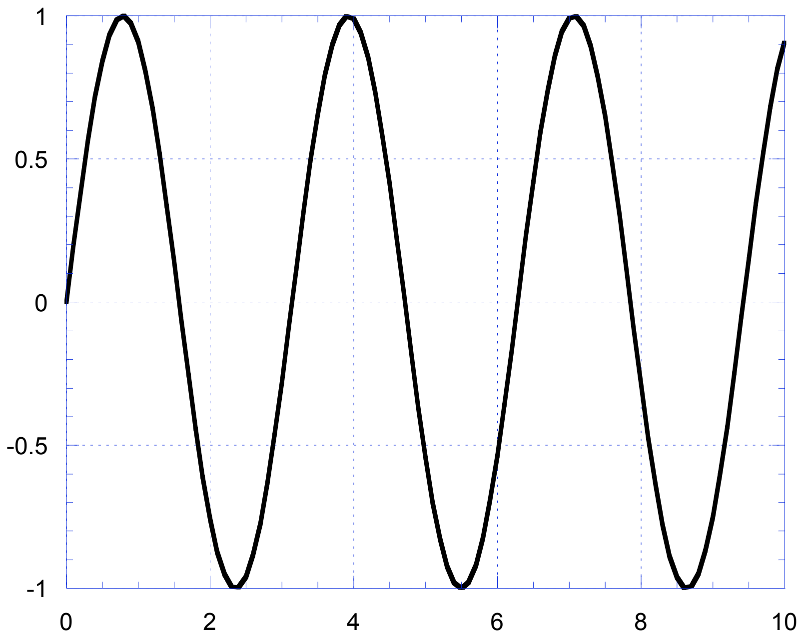
http://www.maloka.org/f2000/waves_particles/stadium_wave.html

Matemáticamente, la onda se representa mediante una expresión que informa de cómo se transporta esta perturbación a lo largo del medio. Es decir, desde el punto de vista mecánico, el movimiento ondulatorio queda perfectamente definido si especificamos las posiciones de todos los puntos del medio como una función del tiempo.

$$\psi = f(x,t)$$

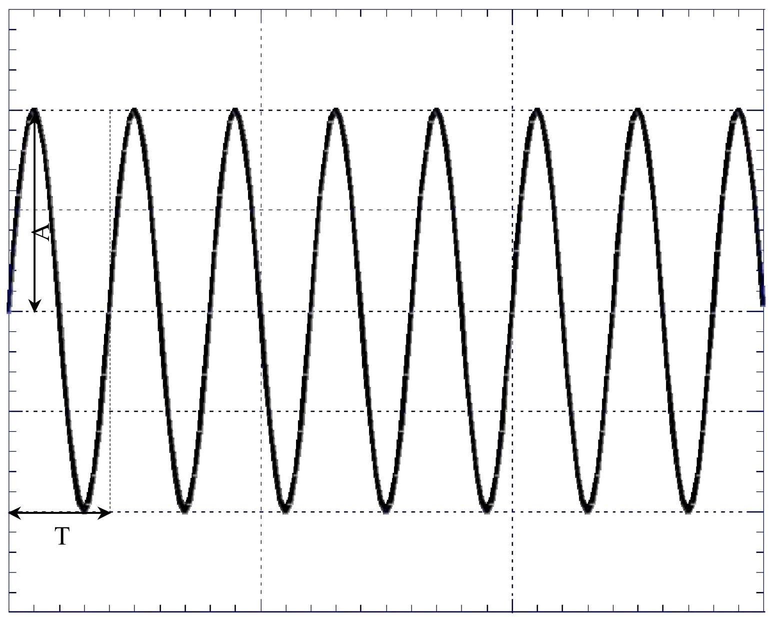
¿Qué forma puede tener la expresión de una onda? Es decir, ¿qué condiciones ha de cumplir una perturbación para constituir una onda? A menudo, la representación visual que empleamos para identificar una onda es una función del tipo que se ve en la figura.

En un caso simple, como este, tenemos una determinada magnitud que es función periódica de otra, por ejemplo el tiempo. Las crestas de la onda, los puntos donde la magnitud alcanza los máximos relativos, presentan el mismo valor para la magnitud y están equiespaciados; lo mismo sucede para los nodos o ceros de la función, y además la distancia entre dos consecutivos es la misma que para las crestas.



A partir de esta representación es fácil definir los parámetros fundamentales que definen una onda:

-1.5-1-0.500.511.500.511.5Et



- **la *amplitud* A es el valor que presenta la magnitud en los máximos. La porción de onda comprendida entre dos máximos consecutivos (o dos**

puntos equivalentes cualesquiera, como dos mínimos, o dos nodos equivalentes) es un ciclo (una oscilación completa), y es este ciclo el que se repite indefinidamente para constituir la perturbación periódica.

- **la *frecuencia* f de la onda, si la variación de la magnitud es respecto al tiempo, es el número de ciclos que la perturbación realiza en una unidad de tiempo (si la variación es respecto a otra magnitud física, puede definirse una frecuencia similar a la temporal respecto a ella).**
- **el *período* T de la onda es la longitud del intervalo temporal (o la magnitud correspondiente) que transcurre mientras la onda realiza una oscilación completa. Nótese que por lo tanto también es el intervalo de tiempo entre dos puntos cualesquiera de la onda que sean equivalentes y consecutivos (es decir, que no haya otro intermedio que sea equivalente a ambos).**

De la propia definición resulta evidente que la frecuencia y el período así definidos son inversos:

$$T = \frac{1}{f}$$

Por tanto, la amplitud y cualquiera de los otros dos parámetros definen completamente la forma de la onda.

Pensemos como ejemplo en el voltaje suministrado por una fuente de corriente alterna, que tiene la forma (ver Apéndice):

$$V = V_0 \cos(wt + \varphi)$$

El voltaje suministrado a un receptor por una fuente como esta oscila entre los valores –V_0 y V_0 (es decir, V_0 es la amplitud de la onda de voltaje) y lo hace de forma periódica, con período:

$$\begin{aligned} &\cos(wt + \varphi) = \cos(wt' + \varphi) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow wt = wt' + 2\pi k, k \in Z \end{aligned}$$ **(no consideramos nodos que no sean equivalentes)**

El menor intervalo temporal posible a partir de esta expresión, que coincide por tanto con el período de la onda, se da para k +1 o –1, y vale:

$$T = \left[|t - t'| \right]_{k=1} = \frac{2\pi}{w}$$

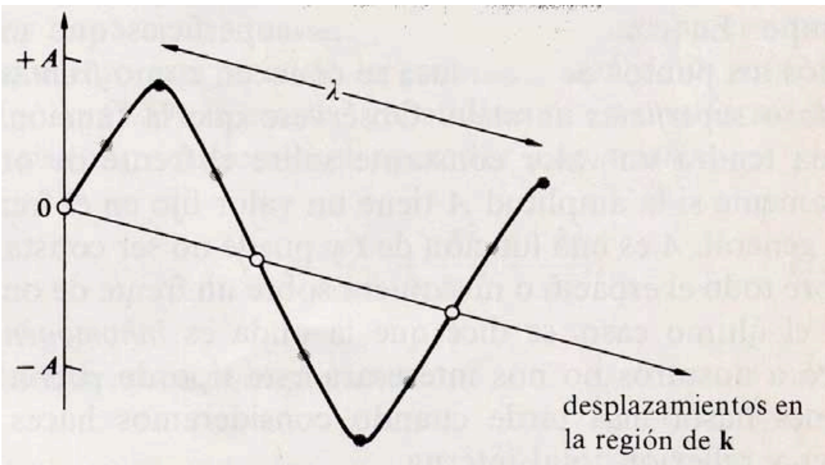
El factor w que aquí aparece se relaciona, por tanto, con la frecuencia del modo siguiente:

$$w = 2\pi f$$

y se denomina *frecuencia angular*, ya que si se visualiza la variación periódica de la magnitud como la proyección sobre el eje de abscisas de un vector con origen en O que gira con velocidad angular constante (*fasor*), la

velocidad de giro coincide con este valor. Dicho de un modo coloquial; si la frecuencia f informa del “número de vueltas” que da una onda en una unidad de tiempo (identificando una oscilación completa con una vuelta), la frecuencia angular informa del ángulo recorrido en dicho tiempo, medido por supuesto en radianes.

Aquí estamos tratando con un tipo de ondas muy simple. Son funciones oscilatorias, pero además son periódicas, tienen frecuencia definida y constante y varían sólo respecto a una variable (por ejemplo, el tiempo). Este modelo no sirve para representar a cualquier tipo de onda, pero sí es de ayuda para visualizar más fácilmente ondas, como las electromagnéticas, que oscilan en función del tiempo, pero también del espacio.
Más concretamente: con una función de este tipo, estamos representando la variación frente al tiempo de una magnitud única en el sentido de que es una sola, medida en un punto concreto que siempre es el mismo, por ejemplo dos puntos dados de un circuito donde colocamos los terminales de medida de un polímetro o un osciloscopio para medir un voltaje. Las ondas electromagnéticas, incluso las más sencillas, son más complejas en el sentido de que la perturbación se desplaza en todas direcciones, y por tanto en cada punto del espacio hay un valor determinado de la magnitud, el campo electromagnético, en cada instante de tiempo. Por tanto, las ondas electromagnéticas pueden verse como ondas de este mismo tipo pero en dos “dimensiones” complementarias: si “le sacamos una foto” a una onda en un instante de tiempo determinado, la “congelamos”, la forma de la perturbación es oscilatoria (por ejemplo, armónica) con respecto al espacio, de manera que se pueden definir una frecuencia y un período espacial; complementariamente, si fijamos un punto del espacio y estudiamos cómo varía el valor de la magnitud en ese punto a lo largo del tiempo, este valor oscila (por ejemplo de forma armónica) en función del tiempo, existiendo una frecuencia y un período temporales, que obviamente no coinciden con los anteriores porque son formalmente y dimensionalmente diferentes. Lógicamente, como no podemos “congelar” una onda, estas dos oscilaciones están sucediendo a la vez, de modo que el valor de la perturbación varía armónicamente con el espacio para cada instante de tiempo y armónicamente con el tiempo para cada punto del espacio.



Comencemos por estudiar un tipo muy sencillo de ondas, al menos aparentemente: las ondas que no cambian de forma a medida que se propagan, y que se denominan *pulsos*. Supongamos que la onda se propaga según una dirección definida OX a una velocidad v; la invariancia de la forma de la onda con el tiempo nos lleva establecer que es periódica en el tiempo:

$$\psi = f(x - vt) = f(x')$$

es decir, el valor de la perturbación en el punto x en el instante t es el que tenía en el punto x'=x-vt en el instante inicial.

NOTA: este pulso corresponde a una onda que viaja a velocidad v en el sentido positivo del eje OX, que se denomina progresivo; un pulso regresivo, avanzando en el sentido negativo del eje OX conllevaría un cambio de signo en la velocidad (vector), de modo que:

$$\psi = f(x + vt) = f(x')$$

Nos interesa conocer la variación con el tiempo y el espacio de esta perturbación, pues buscamos la causa física de que tenga precisamente esta forma, y es razonable esperar que la expresión responda a una determinada ecuación diferencial:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x'}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial t} = -v\frac{\partial f}{\partial x'}$$

Por tanto, se verifica una primera relación:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -v\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

que es válida para un *pulso progresivo*. Si el pulso fuera *regresivo*, el segundo miembro tendría un signo diferente, lo cual no es lógico, ya que físicamente cabe esperar que la ecuación que describa los pulsos describa tanto los progresivos como los regresivos. Vayamos por tanto a un orden de diferenciación superior:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x'^2}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x'}\left(-v\frac{\partial f}{\partial x'}\right)\frac{\partial x'}{\partial t} = -v\frac{\partial^2 f}{\partial x'^2}(-v) = v^2\frac{\partial^2 f}{\partial x'^2}$$

y obtenemos una relación:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = v^2\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0$$

que habría sido la misma para el caso de un pulso regresivo y que se conoce como *ecuación de ondas*.
Es una E.D. lineal, por lo que se verificará el *principio de superposición*: si tenemos dos soluciones ψ_1 y ψ_2 cualquier combinación lineal de ellas también serán una solución. Los pulsos progresivos y regresivos son soluciones de esta ecuación, por lo que la solución general será de la forma:

$$\psi = Af(x+vt)+Bf(x-vt)$$

Un caso particular de soluciones de esta ecuación son las soluciones *armónicas*, que tienen forma de seno o coseno: en este caso, la perturbación es periódica en el tiempo y en el espacio.

Si "congelamos" la perturbación en un instante de tiempo, es periódica en el espacio:

$$\psi(x,0) = A\cos(kx) = f(x)$$

Como queremos que la perturbación tenga la misma forma a lo largo del tiempo, por construcción la onda será:

$$\psi(x,t) = A\cos(k(x-vt)) = A\cos(kx-wt)$$

(por supuesto, la onda puede tener también una fase inicial ε).

En esta expresión se ve que la frecuencia espacial es $\frac{k}{2\pi}$, de modo que el período espacial será: $\frac{2\pi}{k}$

Las dimensiones de este período son de longitud, dado que estamos analizando la oscilación de la onda respecto a la posición, y por lo tanto este valor indica la distancia que recorre la onda en cada oscilación completa (dicho de otro modo, la distancia en metros que hay entre dos puntos del espacio en los cuales se localizan dos crestas consecutivas para cualquier instante, ya que la frecuencia de la onda es constante): por ello, este parámetro se denomina *longitud de onda*: $\lambda = \frac{2\pi}{k}$

La frecuencia temporal ha de ser: $\frac{kv}{2\pi} = f$

y está relacionada con la frecuencia espacial; del mismo modo, los períodos espacial y temporal están relacionados. En concreto:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{v}{f} \Rightarrow \lambda f = v$$

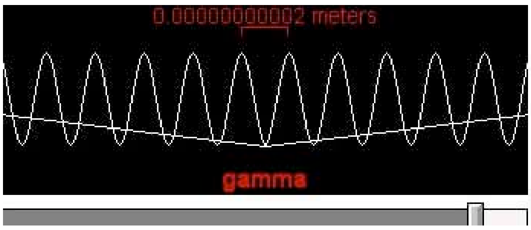
la longitud de onda y la frecuencia temporal son inversamente proporcionales, y su producto es igual a la velocidad de la onda.
En teoría, una onda puede tener cualquier frecuencia y por tanto cualquier valor de longitud de onda. Los diferentes valores que puede tener la frecuencia son uno de los métodos más importantes para clasificar las ondas.

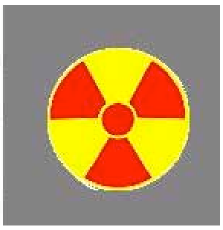
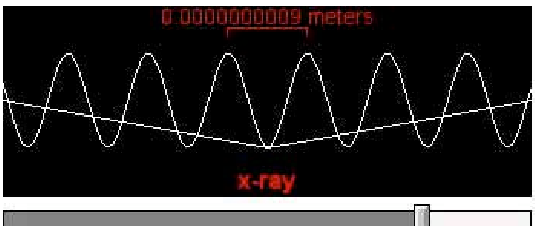
La importancia de las ondas armónicas es que constituyen una *base* funcional para el conjunto de las ondas electromagnéticas; es decir, cualquier perturbación se puede describir, en régimen lineal, como una combinación lineal de ondas armónicas. Esta base funcional es continua, no de tipo discreto.

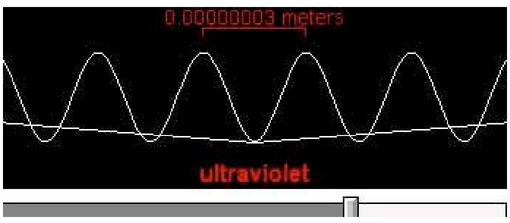
EJEMPLO: pensemos por un momento en una onda luminosa. Como bien sabemos, la velocidad de la luz es constante e igual a: $c = 3 \cdot 10^8 \left(m/_s \right)$
de modo que cuanto mayor es la frecuencia de un rayo de luz (mayor número de oscilaciones realiza por unidad de tiempo) y por tanto menor es su período temporal, menor es a su vez su período espacial, es decir, su longitud de onda.

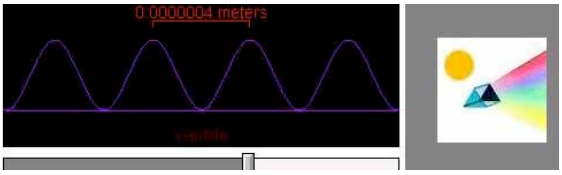
Las ondas electromagnéticas también se clasifican generalmente por su frecuencia:

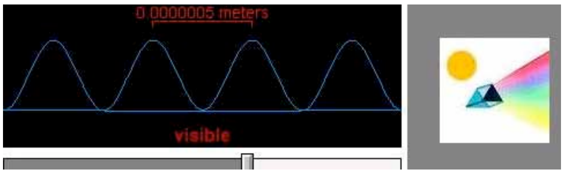
Tipo de radiación	Frecuencia (Hz)	Longitud de onda (m)
Rayos gamma	10^{21}	10^{-12}
Rayos X	10^{18}	10^{-10}
UV	10^{16}	10^{-8}
Visible	10^{15}	10^{-6}
Infrarrojo	10^{13}	10^{-5}
Microondas	10^{10}	10^{-2}
Radar	10^{9}	10^{-1}
TV	10^{8}	10
Radio	$<10^{8}$	>10

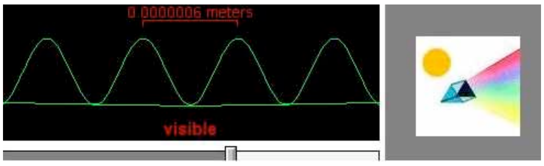


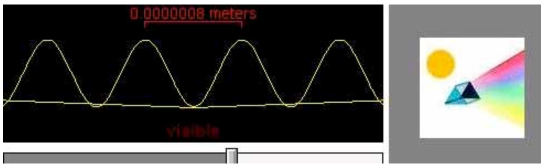



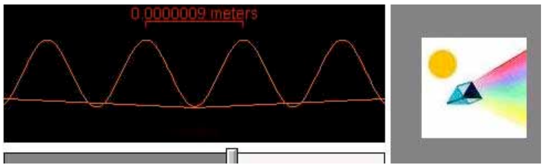



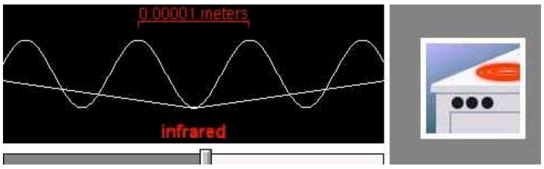

0.0000004 meters
visible

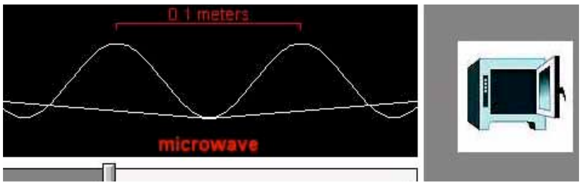

0.0000005 meters
visible

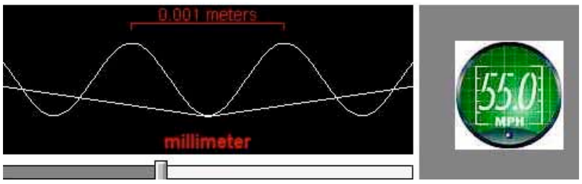

0.0000006 meters
visible

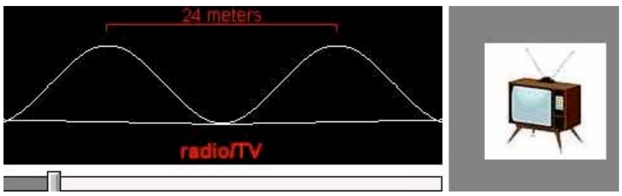

0.0000008 meters
visible


0.0000009 meters


0.00001 meters
infrared


0.1 meters
microwave


0.001 meters
millimeter
55.0
MPH


24 meters
radio/TV

En términos ópticos hablamos indistintamente de luz o de ondas electromagnéticas, empleando los términos como sinónimos, independientemente de que la onda sea visible para nuestros ojos o no. Una onda electromagnética consiste en un campo electromagnético (es decir eléctrico y magnético) que varía con el tiempo y el espacio, es decir, que oscila. Físicamente, la luz que las personas y otros animales podemos captar es una perturbación electromagnética de la misma naturaleza que las demás, y por tanto no es incorrecto referirse a cualquier perturbación electromagnética como luz. Lo que ocurre es que un detector, en particular un ojo humano, generalmente estará capacitado solamente para detectar las perturbaciones en un cierto rango de frecuencias (o longitudes de onda), siendo ciego para las demás. Para deshacer posibles ambigüedades, cuando hablamos de la luz que el ojo humano puede captar la denominamos *luz visible*, lo cual puede parecer una reiteración.

Esto es relativamente fácil de entender: las ondas transportan energía, de modo que al incidir sobre un detector esta energía interacciona con el mismo y provoca una respuesta que es empleada para producir una imagen. Sabemos que la *energía* transportada por una onda electromagnética es *directamente proporcional* a su frecuencia; si la frecuencia es demasiado pequeña, también lo será la energía transportada por la onda como para excitar al detector; si la frecuencia es demasiado grande, la energía de la onda puede ser tan elevada que resulte perjudicial para el detector mismo. Por ejemplo, en el ojo humano hay células sensibles a la luz de ciertas frecuencias; al ser excitadas por ella, emiten una respuesta nerviosa (similar a una señal eléctrica) que el cerebro emplea para producir una imagen. Sería recomendable que al ojo humano no llegaran ondas luminosas con la suficiente frecuencia como para que la energía dañara el ojo: la atmósfera filtra la mayor parte de la radiación UV. Por otra parte, el hecho de que el ojo sea ciego al IR tiene también una base: el cuerpo humano se encuentra a una temperatura a la cual emite gran cantidad de radiación de tipo IR, por lo que si el ojo captara este tipo de radiación, la emisión del propio cuerpo, de los seres vivos en general y de otros cuerpos con temperatura suficiente perturbaría la visión normal.

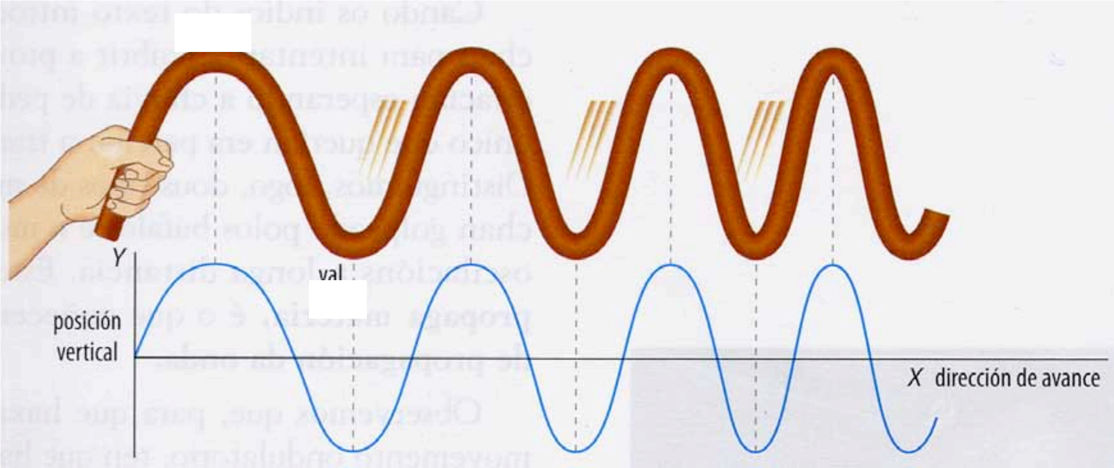
Ondas longitudinales y transversales.

Otro punto de vista muy importante desde el cual se pueden clasificar las ondas es atendiendo a la relación entre su *dirección de vibración* y su *dirección de propagación*.

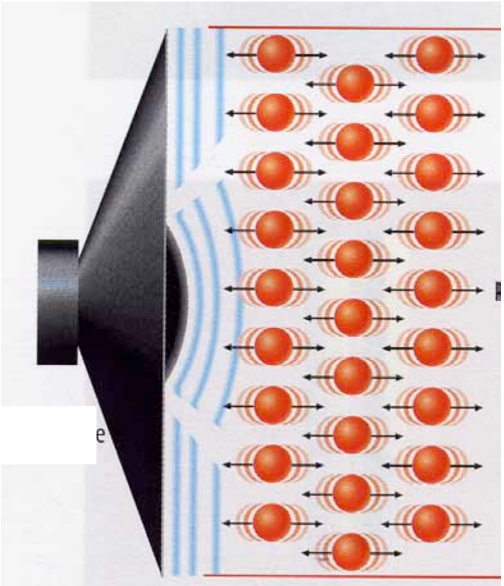
Veámoslo con un ejemplo: una onda en una cuerda. Si tomamos una cuerda y la agitamos por un extremo de arriba abajo con el brazo, la perturbación se traslada a lo largo de la cuerda. A pesar de que la perturbación vibra en dirección vertical, se traslada a lo largo de la cuerda en dirección horizontal;

es decir, las direcciones de vibración y de propagación en esta onda son perpendiculares.

A este tipo de ondas se las denomina *ondas transversales*.



Una onda en la cual la dirección de vibración y la de propagación coinciden (son paralelas) se denomina una onda longitudinal. Esto es lo que ocurre por ejemplo con el sonido:



la variación de presión que realizamos sobre el aire al emitir un sonido incide sobre las moléculas de aire vecinas, las hace vibrar, y el choque con las moléculas vecinas hace que la perturbación se propague.

Las ondas en un estanque son también ondas transversales.

¿Qué ocurrirá con las OEM?

ONDAS ESTACIONARIAS.

Interferencia entre ondas armónicas.

Supongamos que dos ondas armónicas de igual amplitud, número de onda y frecuencia, desfasadas una cantidad fija, se superponen:

$$\psi_1(x,t) = A\cos(kx - wt)$$
$$\psi_2(x,t) = A\cos(kx - wt + \varepsilon)$$

Usando:

$$\cos a + \cos b = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

tenemos:

$$\psi_1(x,t) + \psi_2(x,t) = 2A\left[\cos\left(\frac{2kx - 2wt + \varepsilon}{2}\right)\cos\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\right] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \psi = 2A\cos\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\cos\left(kx - wt + \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

tenemos otra onda armónica de la misma frecuencia con amplitud y fase diferente.

La amplitud de la onda resultante depende del desfase entre las ondas superpuestas:

- si eran ondas en fase: $\varepsilon = 0 \Rightarrow A' = 2A$, es decir, la amplitud es máxima (se suman algebraicamente las amplitudes de las ondas superpuestas). En este caso, se dice que las ondas interfieren constructivamente.

- si eran ondas en oposición de fase: $\varepsilon = \pi \Rightarrow A' = 0$, la onda resultante es nula; en este caso, se dice que las ondas interfieren destructivamente.

- en las situaciones intermedias, la amplitud tiene un valor comprendido entre estos extremos.

Un fenómeno peculiar de superposición es el que se da cuando se superponen ondas de la misma amplitud y de la misma frecuencia que se encuentran en fase y se desplazan en la misma dirección pero en sentidos contrarios:

$$\psi_1(x,t) = A\cos(kx - wt)$$
$$\psi_2(x,t) = A\cos(kx + wt)$$

$$\psi_1(x,t)+\psi_2(x,t)=2A\left[\cos\left(\frac{2kx}{2}\right)\cos\left(\frac{-2wt}{2}\right)\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \psi = 2A\cos(kx)\cos(wt)$$

Como se observa, en este caso se desacoplan la parte espacial y la parte temporal de la onda, de forma *que la amplitud de las oscilaciones es función de la posición*; es decir, la perturbación no se desplaza. Esta onda se denomina una *onda estacionaria*.

Para ciertos puntos, el primer coseno vale 0 y dichos puntos no oscilan, permanecen inmóviles:

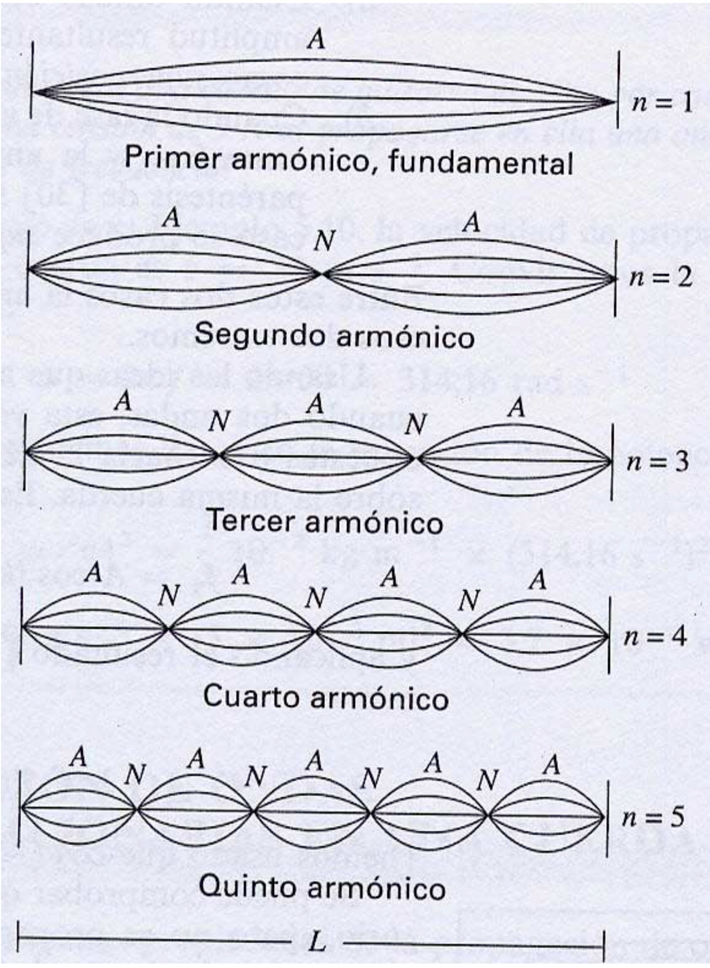
$$\cos(kx)=0 \Leftrightarrow x=\frac{(2n+1)\pi}{2};n\in Z$$

estos puntos se denominan *nodos* de la onda.

Otros puntos, sin embargo, tienen amplitud máxima:

$$\cos(kx)=\pm 1 \Leftrightarrow x=n\pi;n\in Z$$

estos puntos se denominan *crestas* de la onda.



Una onda estacionaria puede generarse empleando por ejemplo una cuerda fijada por sus dos extremos. Haciendo vibrar uno de ellos, se genera una onda que al llegar al otro extremo produce un pulso reflejado. Suponiendo que no hay pérdidas en la reflexión, la onda reflejada es de la misma amplitud y frecuencia que la incidente. La condición para que además estén en fase es que la longitud de la cuerda sea un múltiplo de la mitad de la longitud de onda. Para entender esto, podemos basarnos en el modo en que un pulso se refleja en el extremo de un muelle o bien darnos cuenta de que dado que la cuerda está sujeta por los extremos, es evidente que dos de los nodos deben estar localizados en los extremos de la cuerda.

En principio, esto parece incompatible con lo encontrado antes, pues no se obtiene un nodo en la posición x=0. Sin embargo, esto se debe a que se han considerado las ondas superpuestas sin fase inicial; introduciendo una fase inicial en ambas igual a $\pi/2$ (lo cual equivaldría a representar las ondas armónicas mediante funciones de tipo seno, en lugar de coseno, lo cual es perfectamente lícito) se corrige la posición de los nodos de forma que los extremos de la cuerda lo sean. Entonces ha de verificarse:

$$\operatorname{sen}(kx)=0 \Rightarrow kx = n\pi \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda}x = n\pi \Rightarrow x = n\frac{\lambda}{2}$$

para todos los nodos de la onda estacionaria; en particular:

$$L = n\frac{\lambda}{2}$$

y por tanto, sólo se pueden generan ondas estacionarias con longitudes de onda dadas por:

$$\lambda = 2\frac{L}{n}$$

que es el resultado predicho.

Una onda estacionaria, a diferencia de las vistas hasta ahora, no transporta energía.

Práctica 1: observación de ondas estacionarias en una cuerda.

Práctica 2: observación de ondas mecánicas estacionarias en superficies o planchas metálicas.

Fundamentos de la TEM de la luz: las ecuaciones de Maxwell.

Muy a menudo, se emplea la representación de las ondas en forma exponencial, ya que esto facilita considerablemente gran parte de los cálculos que se hacen con ellas.
Dado que cualquier complejo de módulo 1 se puede escribir:

$$z = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta = \exp(i\theta)$$

y que hemos escogido las funciones de tipo coseno para representar las ondas armónicas, representarlas en forma exponencial equivale a "añadir" la parte imaginaria, que no tiene sentido físico; por ello, en cualquier expresión en la que se emplee la notación exponencial para representar una onda ha de tenerse en cuenta que lo que en realidad tendría que escribirse (y no se hace por comodidad y no sobrecargar la notación) es la parte real de dicha expresión:

$$\psi(x,t) = A\cos(kx - wt + \varepsilon) = A\cos\varphi = A\,\mathrm{Re}\left(e^{i\varphi}\right)$$

que escribiremos como

$$\psi(x,t) = Ae^{i\varphi} = Ae^{ikx - wt + \varepsilon}$$

Al lugar geométrico de los puntos del espacio donde la perturbación toma el mismo valor se le denomina *frente o superficie de onda*.

Dijimos al principio que el fenómeno de una onda requería de una perturbación, un medio material y una conexión entre los puntos del medio material. Esto parece claro en muchos tipos de ondas:

Ondas en un estanque: el medio material es el agua, la perturbación es una modificación de la posición de parte de la superficie del líquido y las moléculas de líquido están ligadas entre sí, de manera que los movimientos de unas afectan a las otras (conexión) y la onda se propaga.

Ondas en una cuerda: el medio material es la cuerda, la perturbación una variación de la posición de uno de sus extremos y la conexión entre las partículas son los enlaces entre las moléculas que forman la cuerda, que es un cuerpo sólido.

Ondas de sonido: el medio material es por ejemplo el aire (puede ser también un cuerpo sólido), la perturbación es una variación de presión en un punto determinado que se propaga por choques sucesivos entre moléculas de aire vecinas.

Sin embargo, hemos pasado con naturalidad a hablar de OEM en particular de luz, y sabemos que la luz puede propagarse en el vacío. ¿Por qué no precisa de un medio material para transportarse?

Una manera ingenua de ver esto es la siguiente: supongamos una carga puntual que crea un campo electrostático (es decir, constante en el tiempo). Sabemos dibujar bien las *líneas de campo* en este caso: son rectas secantes en el punto en que se encuentra la carga. Si por algún motivo acelerásemos la carga como resultado de la aplicación de una fuerza o de cualquier otro modo, por ejemplo imprimiéndole un movimiento de vaivén, las líneas de campo estarían variando constantemente, por lo que el campo producido por la carga dejaría de ser estático e intuitivamente se aprecia que el campo antes estático se convierte en una onda. Un campo físico como el campo eléctrico es un campo que afecta a todos los puntos del espacio alrededor de la carga que lo crea, y por lo tanto supone una conexión entre los mismos, independiente de que estos puntos formen parte de un medio material o no. Por tanto, en el caso del campo EM, la perturbación es el movimiento de las cargas, lo que se perturba es el campo producido por las cargas y la conexión entre los puntos del espacio es el propio campo. ¡NO ES NECESARIO UN MEDIO MATERIAL PARA PROPAGAR ESTA PERTURBACIÓN!

Hay una manera más rigurosa de abordar esta cuestión: las ecuaciones de Maxwell.

En el último tercio del s. XIX James Clerk Maxwell completó la teoría del electromagnetismo. Antes, los fenómenos eléctricos y magnéticos se habían considerado de naturalezas diferentes, pero una serie de experiencias pusieron de manifiesto una estrecha relación entre ambos: las corrientes eléctricas circulando por un conductor producen un campo magnético medible con una brújula, y las variaciones en los campos magnéticos generan corrientes eléctricas en conductores sometidos a ese campo magnético y no alimentados por ningún generador, corrientes que son medibles en un amperímetro.

Las ecuaciones de Maxwell son las siguientes:

1) $\vec{\nabla}\vec{D} = \rho$ **(ley de Gauss)**

donde el primer símbolo denota el operador usual:

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$ **es el vector desplazamiento, que se relaciona con el campo eléctrico a través de una constante, la permitividad eléctrica, que da cuenta de las propiedades eléctricas del medio material en que trabajemos**

y por tanto el primer miembro denota la divergencia del vector desplazamiento:

$$\vec{\nabla}\vec{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = div\vec{D}$$

el símbolo rho en el segundo miembro denota la densidad (por unidad de volumen) de carga eléctrica.
Esta ecuación expresa que las fuentes escalares del campo eléctrico son las cargas.

2) $\vec{\nabla}\vec{B} = 0$ **(ley de Gauss magnética)**

muy similar a la anterior, donde $\vec{B}$ **es el vector inducción magnética, que se relaciona con el campo magnético mediante** $\vec{B} = \mu\vec{H}$ **, siendo** μ **la permeabilidad magnética, una constante que da cuenta de las propiedades magnéticas del medio.**

Esta ecuación expresa que no hay fuentes escalares para el campo magnético; es decir, no existe el equivalente a las cargas eléctricas para el caso magnético. Dicho de otro modo, no existen monopolos magnéticos, y por ello cuando partimos un imán, constituido por un polo norte y un polo sur, por la mitad, no separamos sus polos, sino que cada uno de los fragmentos constituye un nuevo imán con su polo norte y su polo sur correspondiente.

3) $\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = -\dot{\vec{B}}$ **(ley de inducción de Faraday)**

donde ahora el primer miembro denota el rotacional del vector campo eléctrico:

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = \left(\frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial Ez}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x}\right)\vec{k} = rot\vec{E}$$

Esta ecuación expresa las fuentes vectoriales del campo eléctrico; en particular, dice que la variación con el tiempo de un campo magnético genera un campo eléctrico.

4) $\vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{j} + \dot{\vec{D}}$ **(ley de Ampére-Maxwell)**

donde

$$\vec{j} = \frac{d\vec{I}}{dS}$$

es la densidad de corriente.
Esta ecuación expresa las fuentes vectoriales del campo magnético: las corrientes (cargas en movimiento) y las variaciones con el tiempo del campo eléctrico. Este último término fue introducido por Maxwell.

Las ecuaciones de Maxwell unificaron la electricidad y el electromagnetismo, y explicaron todas las conexiones que se habían observado entre estos dos tipos de fenómenos. Además, permitieron predecir la existencia de ondas electromagnéticas, idénticas en naturaleza a la luz, cuya existencia fue corroborada por Hertz unos años después. Hasta donde sabemos hoy, la teoría de Maxwell es correcta.

Además, permiten explicar la propagación del campo EM en el vacío: la variación con el tiempo de un campo eléctrico genera un campo magnético que también varía con el tiempo, lo cual a su vez genera un campo eléctrico variable…….. el campo EM se autosustenta, por lo que no precisa de un medio material para propagarse.

Los medios materiales pueden clasificarse en función de cómo varían las propiedades eléctricas (o magnéticas que presentan), evaluadas en la permitividad eléctrica:

ε=cte: medio homogéneo
$\varepsilon=\varepsilon$(posición): medio inhomogéneo
$\varepsilon=\varepsilon$(dirección): medio anisótropo
$\varepsilon=\varepsilon$(campo eléctrico): medio no-lineal

Si nos encontramos lejos de las fuentes de los campos eléctrico y magnético, situación que se puede asumir en Optica, podemos aproximar:

$$\vec{j} \approx 0; \rho \approx 0$$

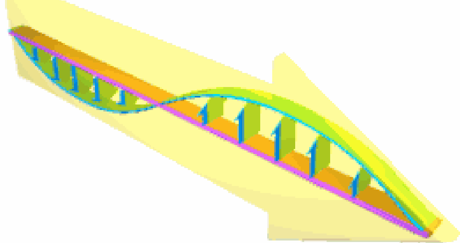
y entonces las ecuaciones se transforman en:

$$\vec{\nabla}\vec{D} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla}\vec{E} = 0$$
$$\vec{\nabla}\vec{B} = 0$$
$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\dot{\vec{B}}$$
$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \dot{\vec{D}}$$

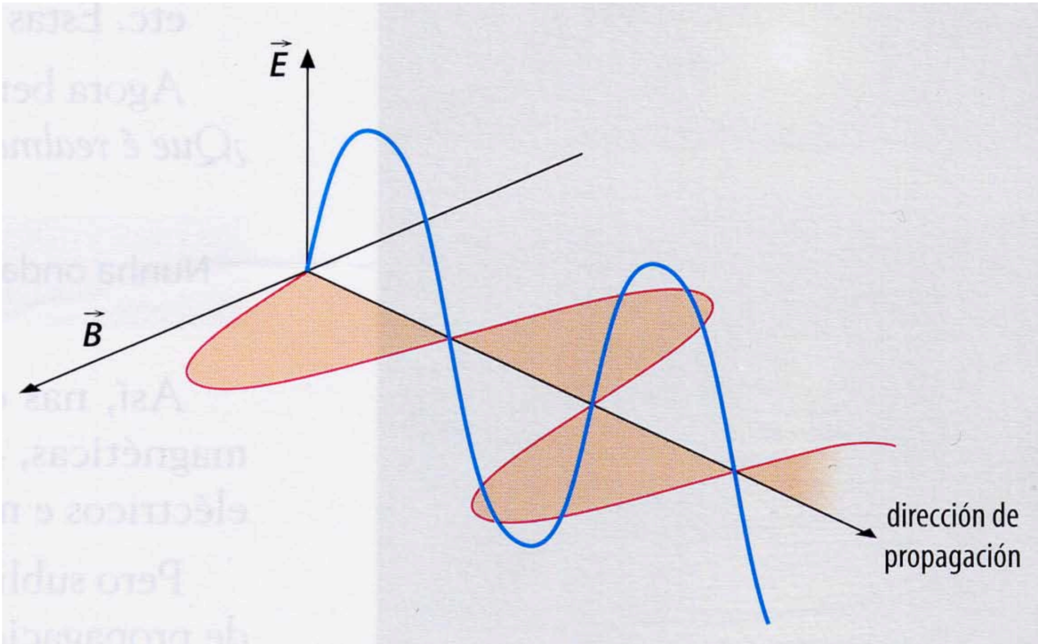
Las dos primeras ecuaciones nos permiten demostrar entonces que el campo eléctrico y el magnético (es decir, el campo EM) es un campo transversal, ya que su dirección de vibración (la de cada uno de los campos) y la de propagación son perpendiculares. Para visualizarlo en un caso simple; si suponemos que la dirección de propagación del campo eléctrico es la OX, el campo tendrá la forma:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(kx - wt + \varepsilon)$$

y salvo los casos triviales de que el campo sea nulo o que la amplitud sea un vector constante sin componente x, la única forma de que se verifique la primera ecuación de Maxwell es que el campo tenga dos componentes ortogonales a la dirección de propagación; es decir, que vibre en el plano perpendicular a la dirección de propagación, constituyendo por tanto una onda transversal.



Para el campo magnético sucede lo mismo. Más aún; de la tercera ecuación se sigue que el campo eléctrico (variable) inducido por el campo magnético es perpendicular a éste, de modo que los vectores $\vec{E}, \vec{B}$ y el que determina la dirección de propagación *forman un triedro*.



LA POLARIZACIÓN DE LA LUZ (ONDA TRANSVERSAL)

La *polarización* es un fenómeno inherente a las ondas transversales. Si demostramos que la luz se puede polarizar, demostraremos experimentalmente que es una onda transversal.

En una onda transversal, por definición, la perturbación debe vibrar perpendicularmente a la dirección de propagación. Esto le deja a la perturbación un margen de maniobra muy amplio: hay todo un plano transversal a la dirección de propagación en el cual puede estar contenida la perturbación.

Supongamos, por simplicidad, que estudiamos un conjunto muy grande de ondas planas de la misma frecuencia que se trasladan con dirección de propagación dada. Si estas ondas fueron generadas de manera independiente, en principio no podemos presuponer que tengan una dirección de vibración definida; en otras palabras, la dirección de vibración con que se genera cada una puede ser aleatoria y por consiguiente la distribución de las direcciones de vibración será *equiprobable*. Podremos encontrar una onda vibrando en una dirección dada de ese plano con la misma probabilidad que en cualquier otra.

Esto es lo que sucede en el caso de la luz generada por las fuentes ordinarias, como una bombilla o el Sol. En este caso, la fuente está constituida por un número enorme de emisores atómicos orientados al azar, y cada átomo excitado emite una onda con una cierta dirección de vibración; continuamente se emiten nuevas ondas y la dirección de vibración de una onda concreta es totalmente impredecible. Esto es lo que físicamente denominamos *luz natural* (LN).

Cualquier alteración de esta distribución de vibración simétrica o equiprobable en la orientación de las perturbaciones es un fenómeno de *polarización*.

Pasemos a describir la polarización concretamente en la luz. Supongamos dos ondas planas armónicas de igual frecuencia propagándose en la dirección OZ, desfasadas y con direcciones de vibración ortogonales entre sí:

$$\vec{E}_1(x,t) = E_{0x}\cos(kx - wt)\hat{u}_x$$
$$\vec{E}_2(x,t) = E_{0y}\cos(kx + wt + \varepsilon)\hat{u}_y$$

Por el principio de superposición, el campo eléctrico total será la suma de los dos; la cuestión a estudiar es si la dirección de vibración de este campo total sigue algún patrón definido.

Tomemos módulos en las anteriores ecuaciones:

$$E_1(x,t) = E_{0x}\cos(kx - wt)$$
$$E_2(x,t) = E_{0y}\cos(kx + wt + \varepsilon)$$

Despejando en la primera:

$$\frac{E_1}{E_{0x}} = \cos(kx - wt) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \operatorname{sen}(kx - wt) = \sqrt{1 - \left(\frac{E_1}{E_{0x}}\right)^2}$$

Despejando en la segunda, desarrollando el coseno y empleando la relación anterior:

$$\frac{E_2}{E_{0y}} = \cos(kx - wt)\cos\varepsilon - \operatorname{sen}(kx - wt)\operatorname{sen}\varepsilon =$$
$$= \frac{E_1}{E_{0x}}\cos\varepsilon - \sqrt{1 - \left(\frac{E_1}{E_{0x}}\right)^2}\operatorname{sen}\varepsilon$$

de donde tomando cuadrados y reorganizando términos:

$$\left(\frac{E_2}{E_{0y}}-\frac{E_1}{E_{0x}}\cos\varepsilon\right)^2=\left[1-\left(\frac{E_1}{E_{0x}}\right)^2\right]\mathrm{sen}^2\,\varepsilon$$

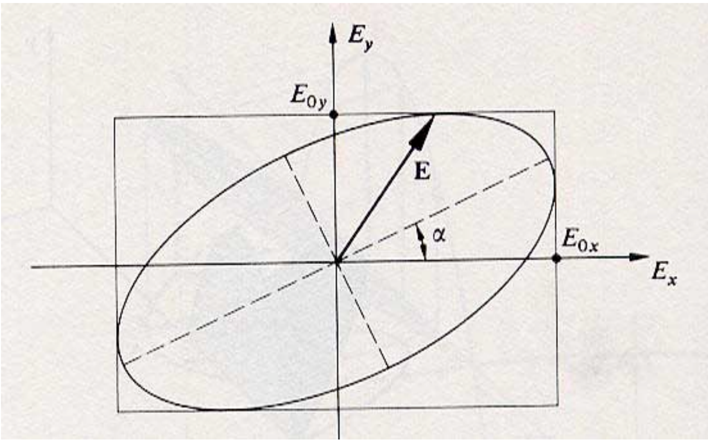
$$\left(\frac{E_2}{E_{0y}}\right)^2+\left(\frac{E_1}{E_{0x}}\right)^2-2\frac{E_1E_2}{E_{0x}E_{0y}}\cos\varepsilon=\mathrm{sen}^2\,\varepsilon$$

Nótese que E_1 y E_2 son, respectivamente, las componentes del campo en las direcciones X e Y.

La ecuación obtenida es la de una elipse que forma un ángulo α con el eje OX tal que:

$$\mathrm{tg}(2\alpha)=\frac{2E_{0x}E_{0y}\cos\varepsilon}{E_{0x}{}^2-E_{0y}{}^2}$$

es decir, que el campo eléctrico resultante es un vector cuyo extremo describe en su giro una elipse, denominada elipse de polarización, que en general no está orientada conforme a los ejes de vibración de las ondas de partida.



Por lo tanto, la luz obtenida está polarizada, ya que la dirección de la vibración del campo eléctrico varía de forma definida con el tiempo.

Además, el sentido en el que el campo recorre la elipse en su giro depende del desfase relativo entre las ondas superpuestas, pues:

$$\frac{\partial E_2}{\partial t}=wE_{0y}\,\mathrm{sen}(kx-wt+\varepsilon)$$

esta relación nos da la variación de la componente Y con el tiempo, y si la evaluamos para x=0, t=0:

$$\left[\frac{\partial E_2}{\partial t}\right]_{x=0,t=0}=wE_{0y}\,\mathrm{sen}\,\varepsilon$$

de donde obtenemos que la componente Y crece si el ángulo ε está entre 0 y π, por lo que el campo gira en sentido contrario a las agujas del reloj, y decrece si el ángulo ε está entre π y 2π, por lo que el campo girará en el sentido de las agujas del reloj.
Estas dos posibilidades se definen como luz elíptica levógira y luz elíptica dextrógira, respectivamente.

Como bien sabemos, la elipse es una cónica que, en el caso en el que los semiejes sean iguales, se convierte en una circunferencia; si las amplitudes son iguales tenemos:

$$\left(\frac{E_2}{E_0}\right)^2+\left(\frac{E_1}{E_0}\right)^2-2\frac{E_1E_2}{E_0^{\,2}}\cos\varepsilon=\operatorname{sen}^2\varepsilon$$

$$E_1^{\,2}+E_2^{\,2}-2E_1E_2\cos\varepsilon=E_0^{\,2}\operatorname{sen}^2\varepsilon$$

lo cual constituye una elipse inscrita en un cuadrado.
Además, hace falta que $\varepsilon=(2n+1)\frac{\pi}{2},n\in Z$ **para que esté orientada según los ejes X,Y:**

$$E_1^{\,2}+E_2^{\,2}=E_0^{\,2}$$

Tenemos en este caso luz circularmente polarizada (LC).

Además, también sabemos que una elipse puede degenerar en una recta en el caso en que uno de los semiejes sea nulo: si $\varepsilon=n\pi,n\in Z$ **entonces la ecuación es:**

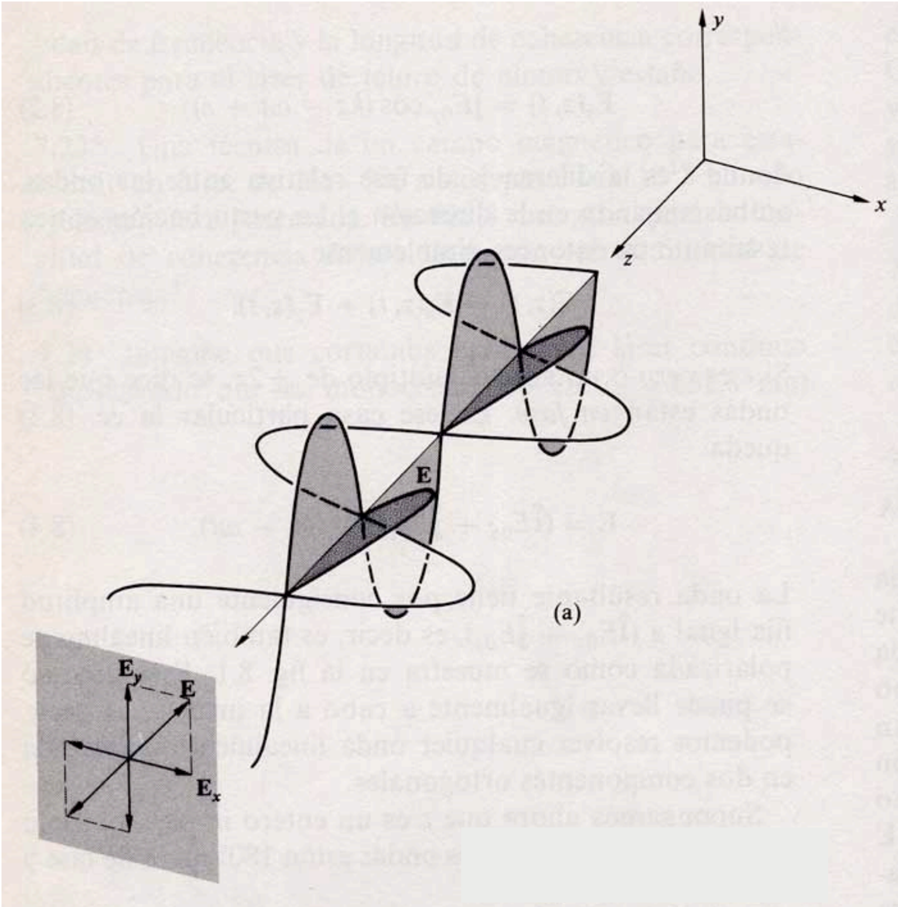
$$\frac{E_2^{\,2}}{E_{0y}^{\,2}}+\frac{E_1^{\,2}}{E_{0x}^{\,2}}\pm\frac{2E_1E_2}{E_{0x}E_{0y}}=0$$

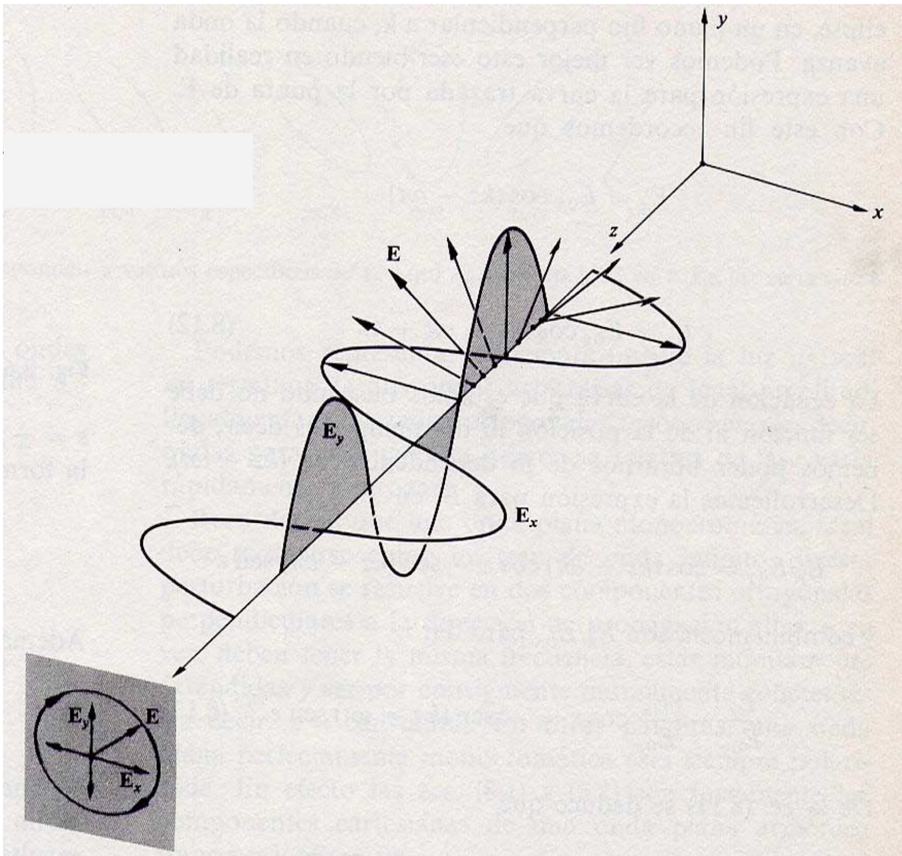
$$\left(\frac{E_1}{E_{0x}}\pm\frac{E_2}{E_{0y}}\right)^2=0$$

$$E_2=\pm\frac{E_{0y}}{E_{0x}}E_1$$

que es la ecuación de una recta. La luz se dice entonces luz lineal (LL), indicando normalmente el ángulo de la dirección privilegiada con el eje OX.

Los casos que hemos obtenido sumando dos ondas planas armónicas de igual frecuencia constituyen casos de *polarización total*: todo el campo resultante está constituido por ondas cuyo vector de vibración tiene dirección constante o que varía de forma definida en el tiempo. Se denominan estados puros.
En un caso más general (y más realista) se tienen estados de *polarización parcial*, en los cuales parte de la luz vibra aleatoriamente y una parte o fracción, que mide el grado de polarización, vibra de un modo definido.

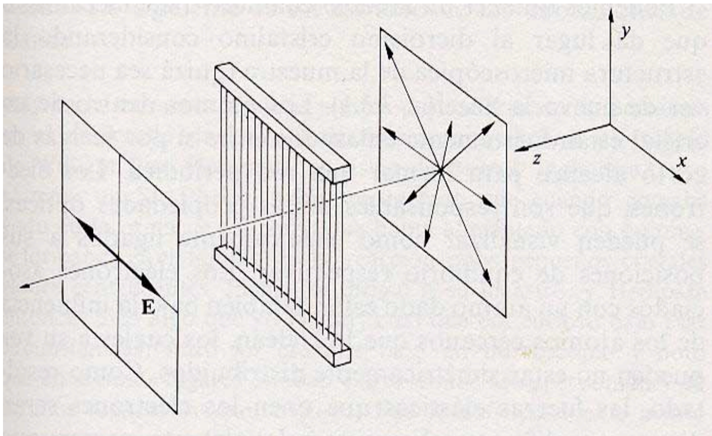

y
x
z
E
(a)
E_y
E
E_x


y
x
z
E
E_y
E_x
E_y
E
E_x

Existen elementos ópticos capaces de filtrar la luz de manera que a su salida toda la luz tenga un estado de polarización determinado.

Por ejemplo, un *polarizador lineal* es un elemento que tiene un eje privilegiado de forma que de toda la luz que lo incide sólo podrá atravesarlo aquella que tenga su dirección de vibración paralelo a dicho eje, denominado eje de transmisión del polarizador, de forma que a la salida la luz está polarizada linealmente.

El *dicroismo* consiste en la absorción selectiva de una de las dos componentes ortogonales de un estado de polarización de un haz incidente. Un polarizador dicroico es un medio anisótropo que tiene una absorción muy fuerte en una de las componentes y es esencialmente transparente para la otra. Si se dispone una rejilla de conductores delgados paralelos y una OEM no polarizada incide sobre ella, la componente del campo a lo largo de los alambres actúa sobre los electrones de los mismos, produciendo una corriente, colisionando estos electrones con los átomos de la red y calentando los alambres por efecto Joule: la energía de esta componente del camo se transfiere del campo a la rejilla. Además, aunque los electrones en movimiento radian, lo hacen de la misma forma hacia delante y hacia atrás, anulándose la onda radiada hacia delante con la incidente y apareciendo la radiada hacia atrás como una onda reflejada. En la dirección X no sucede lo mismo porque los electrones apenas tienen capacidad de moverse en esa dirección.



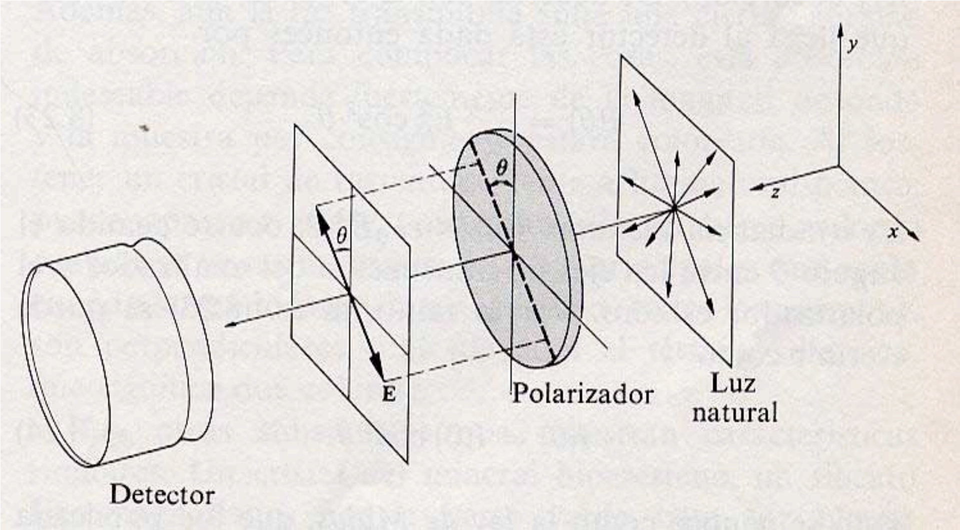
Hay materiales que son naturalmente dicroicos debido a una anisotropía en sus estructuras cristalinas, como la turmalina, que tiene un eje principal o eje óptico de modo que la componente del campo perpendicular a este eje es fuertemente absorbida, tanto más cuanto más grueso es el cristal.

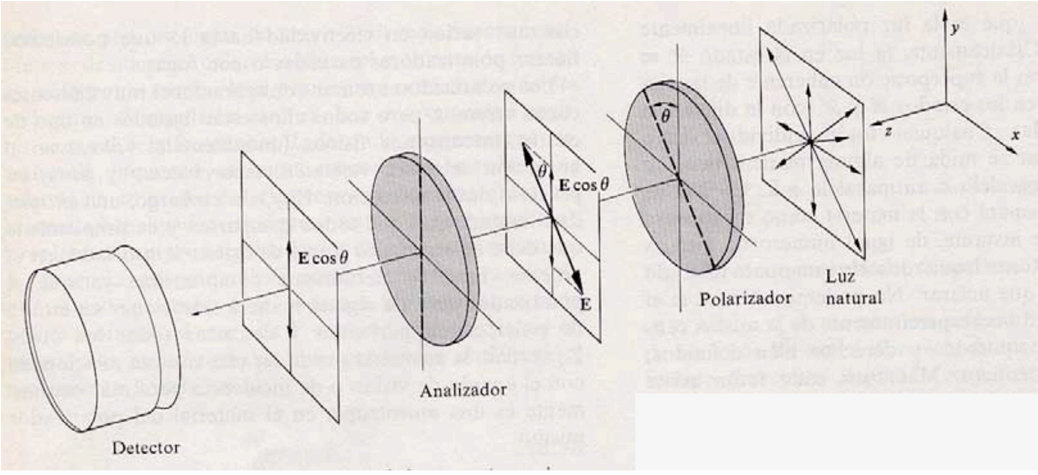
En 1928 Land inventó el polarizador de hoja dicroica o polaroide J, moliendo herapatita o peryoduro sulfatado de quinina en cristales submicroscópicos en forma de aguja, alineándolos paralelamente mediante técnicas EM primero y mecánicas despues, obteniendo un cristal dicroico en forma de hoja, denominada hoja J. En 1938 inventó un nuevo tipo, la hoja H, que no

contiene cristales dicroicos, sino que se obtiene estirando tras calentarla una hoja de alcohol de polivinilo, quedando las largas cadenas alieandas en el proceso, la hoja se sumerge luego en una solución rica en yodo, adhiriéndose este elemento a las cadenas y pudiendo los electrones de conducción de este material moverse a lo largo de las cadenas como en el caso de la rejilla de alambres.

http://www.maloka.org/f2000/polarization/molecular_view.html

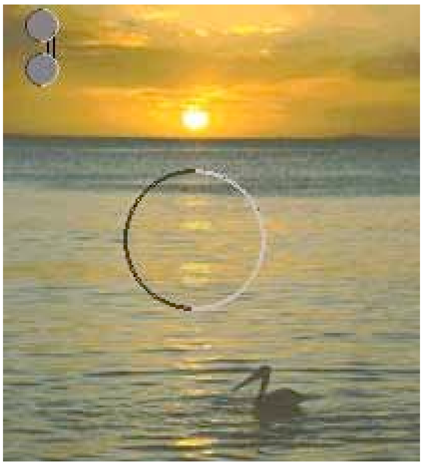
Lógicamente, si disponemos dos polarizadores uno a continuación de otro con sus ejes de transmisión formando un ángulo recto, disposición que se denomina de *polarizadores cruzados*, a la salida no habrá luz en absoluto. En realidad, habrá un poco de intensidad luminosa debido a que la absorción de cada componente por cada uno de los polarizadores no es perfecta.

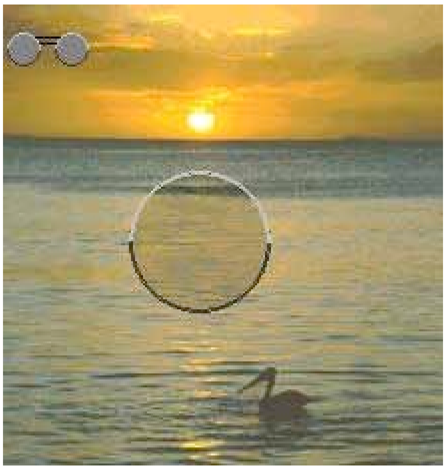


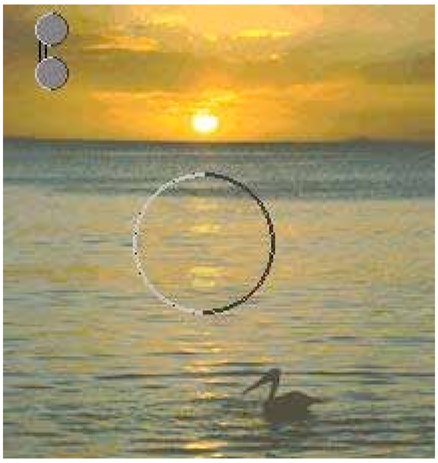


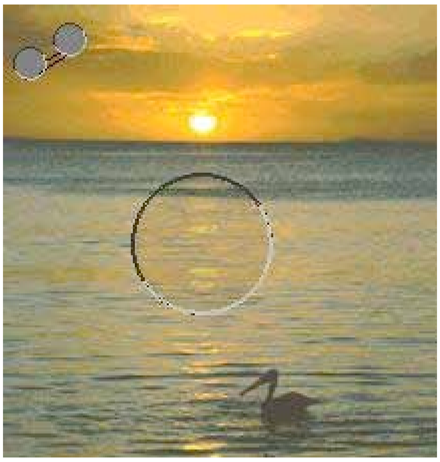
***Práctica 3*: observación de la luz transmitida por uno o dos polarizadores en función del ángulo de observación.**

Dijimos antes que la luz emitida por el sol era luz natural, en el sentido de la polarización (LN). Sin embargo, si observamos el cielo con un polarizador lineal, veremos que la intensidad de la luz transmitida depende del ángulo de observación. ¿Cómo se explica esto?









Aunque la luz emitida por el sol es LN, en la atmósfera ocurren fenómenos, fundamentalmente de dispersión, que polarizan, eso sí parcialmente, la luz del cielo. Parte de la luz que observamos en el cielo está linealmente polarizada, por lo que la luz observada a través de un polarizador varía de intensidad según el ángulo dado al eje de transmisión del mismo, siendo máxima para la dirección en que vibra esta parte de la luz que observamos (vemos el máximo cuando el eje de transmisión del polarizador coincide con la dirección privilegiada de vibración de la parte de la luz del cielo que está linealmente polarizada).

Un *retardador* es un elemento que retrasa en fase una de las componentes ortogonales del campo, de modo que a la salida del mismo la fase relativa de las dos componentes es distinta a la que era antes de atravesarlo, y el estado de polarización puede cambiar.

En el caso del papel de celofán, el retardo depende de la longitud de onda, de modo que además de conseguir luz a la salida del segundo polarizador insertando un papel de celofán entre ambos, esta luz estará coloreada, y el color (la longitud de onda que se transmite) varía cambiando la orientación de un polarizador.

Además, si se dobla el celofán, o bien se arruga, el espesor del mismo varía con la posición, por lo que la longitud de onda transmitida será diferente en distintas zonas, obteniéndose un figura multicolor.

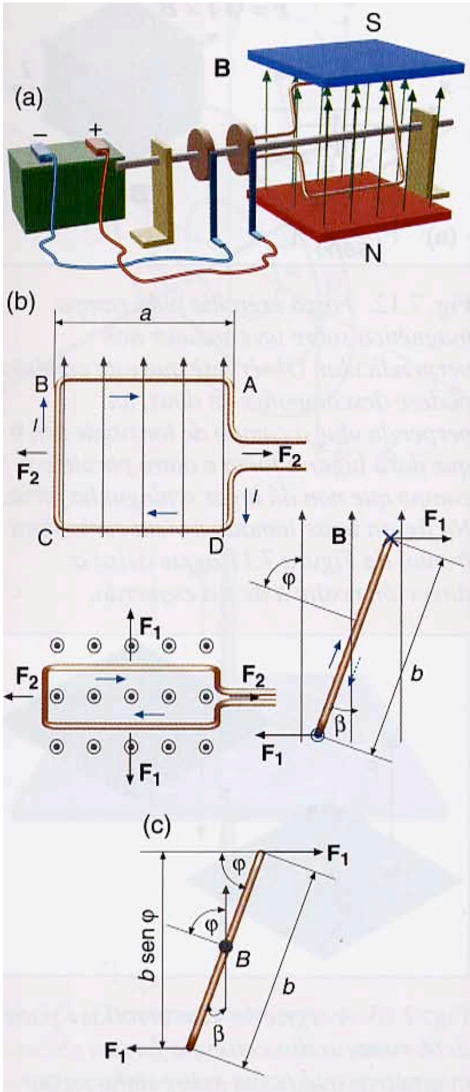
Apéndice: Fundamento de los motores eléctricos. Fuerza y momento sobre una espira.

Supongamos una espira rectangular por la que circule una corriente de intensidad I situada en un campo magnético de inducción $\vec{B}$ uniforme y constante (al que supondremos en la dirección Z). Supongamos la espira colocada como se ve en la figura (la normal al plano de la espira forma un ángulo _ con el campo magnético).

La fuerza resultante sobre la espira es nula, pero no lo es así el momento.
Los lados BC y AD forman un ángulo _ con el campo $\vec{B}$ y sobre ellos aparecen fuerzas de la misma dirección y sentido contrario, de valor:

$$F_2 = bIBsen\beta$$

aplicadas en el centro del tramo correspondiente, y que tienen la dirección del eje sobre el que está apoyada la espira (lo suponemos a lo largo del eje X); por tanto, la resultante de las fuerzas es nula y estas fuerzas no producen momento: no tienen efecto sobre el movimiento de la espira.



Los lados AB y CD son perpendiculares al campo y sobre ellos aparecen fuerzas de igual módulo, de la misma dirección y sentido contrario, de valor:

$$F_1 = aIB$$

La resultante de estas fuerzas es nula, pero no así su momento: tal y como se ve en la figura de la derecha (parte inferior derecha de la parte (b) de la figura adjunta) esta fuerza se descompone en una componente en el plano de la espira (que no produce momento) y una componente normal a la misma, de valor:

$$F_{1n} = F_1 \cos\beta$$

que, dado que _ y _ son complementarios, se puede escribir:

$$F_{1n} = F_1 sen\varphi = aIBsen\varphi$$

Calculando el momento de estas fuerzas respecto al centro de la espira, resulta:

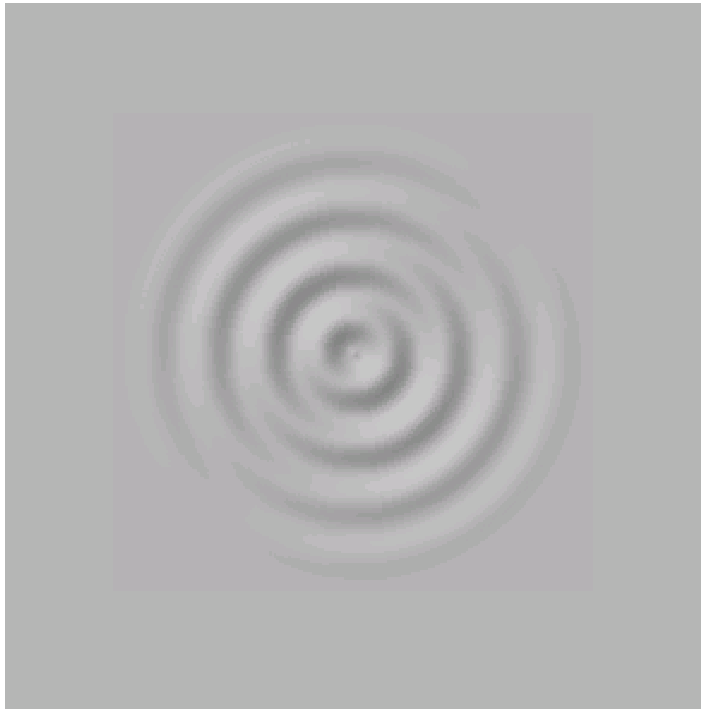
$$\vec{M} = \frac{b}{2} aIB \operatorname{sen}\varphi\vec{i} - \frac{b}{2} aIB \operatorname{sen}\varphi\left(-\vec{i}\right)$$
$$= abIB \operatorname{sen}\varphi\vec{i}$$

Este resultado nos indica la dirección y el sentido con el que gira la espira (alrededor del eje X y en sentido antihorario).

Bibliografía.

1. "Demostraciones sobre ondas estacionarias con materiales sencillos", A. Cortel, Revista Española de Física, Volumen 16, número 1, 2002.
2. Óptica; Hecht-Zajac; Addison-Wesley Iberoamericana, 1986 (versión en español).
3. Física 2º Bachillerato; J. Barrio Gómez; Oxford University Press, 2004.
4. Conceptos de Física; Paul G. Hewitt; Ed. Limusa, 1996.
5. Todo vai (III) ¡Funciona!; Ramón Vilalta López; Baía Edicións, 2002.
6. Matemáticas 3º B.U.P.; Adolfo Negro, César Benedicto; Ed. Alhambra, 1992.
7. Física; Pyshical Science Study Commitee; Ed. Reverté, 2ª Ed., 1966
8. Física para Ciencias de la vida; David Jou, Josep Enric Llebot, Carlos Pérez García, McGraw-Hill, 2002

¿TE GUSTA LA FÍSICA?
LA MAGIA DE LAS ONDAS.

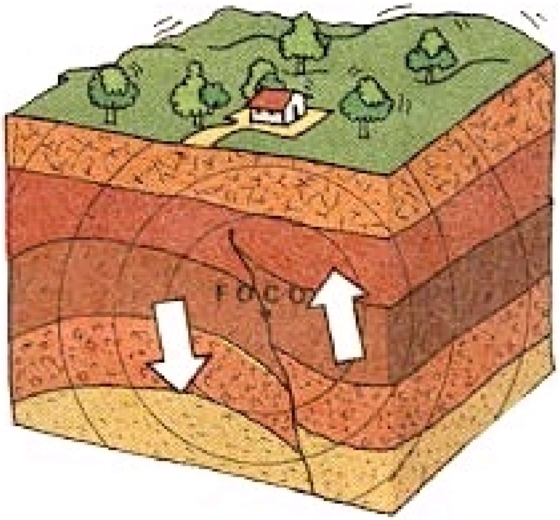


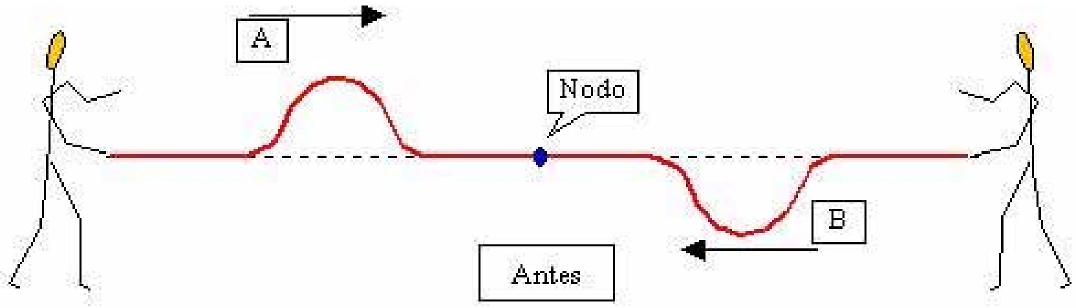
José Luis Martín Iglesias
Profesor de Tecnoloxía no
I.E.S. nº1 de Ordes (A Coruña)

Andaina Matemática
24 de abril de 2006

ONDAS: PERTURBACIONES

ONDAS MECÁNICAS

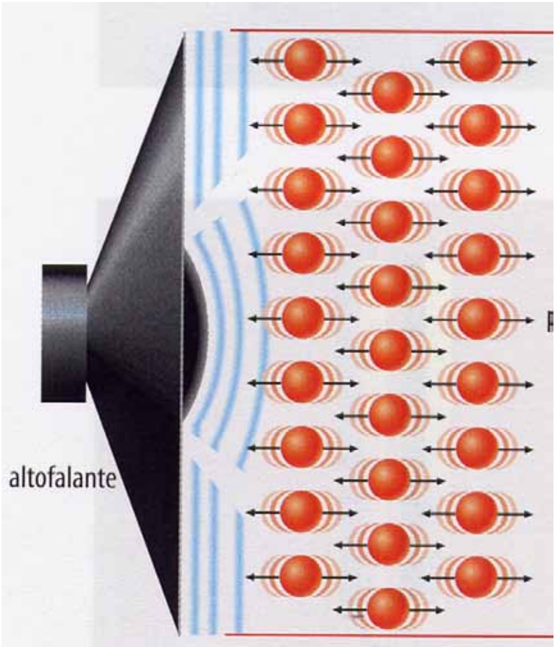


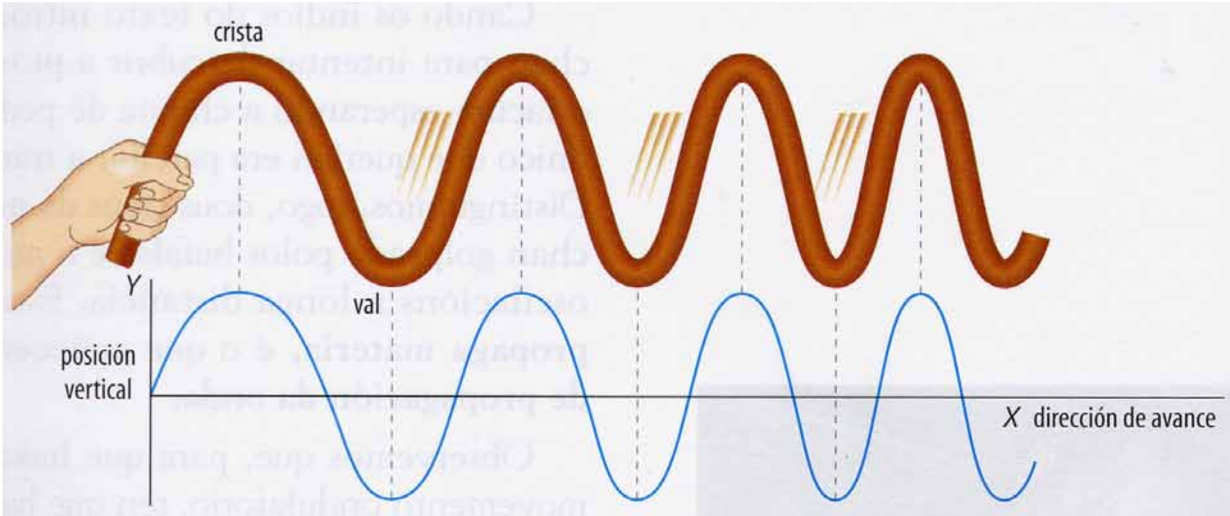


Elementos necesarios para producir una onda:

-una *fuente*
-un *medio material*
-una *conexión física*

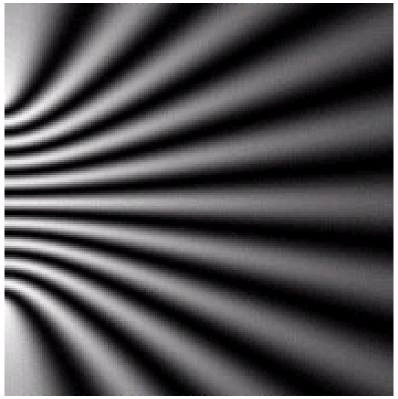
http://www.maloka.org/f2000/waves_particles/stadium_wave.html

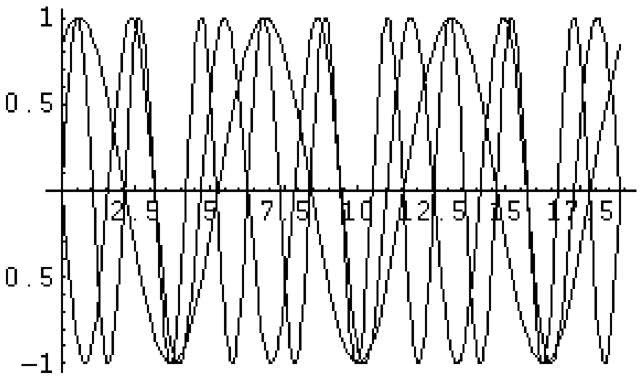


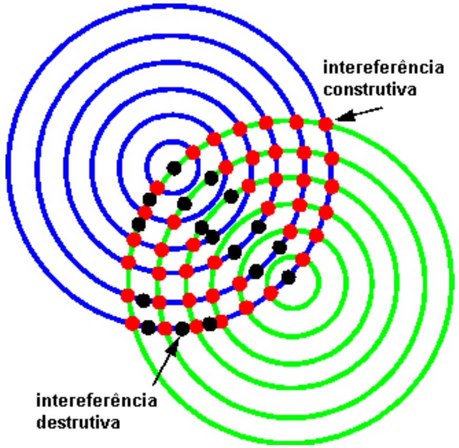


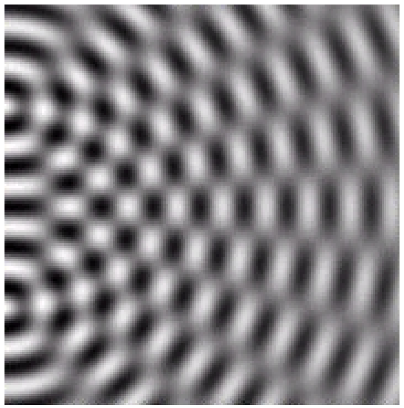
La característica fundamental de las ondas es que transportan energía sin transportar materia.

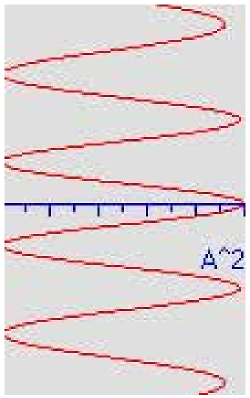
Forma de una onda:

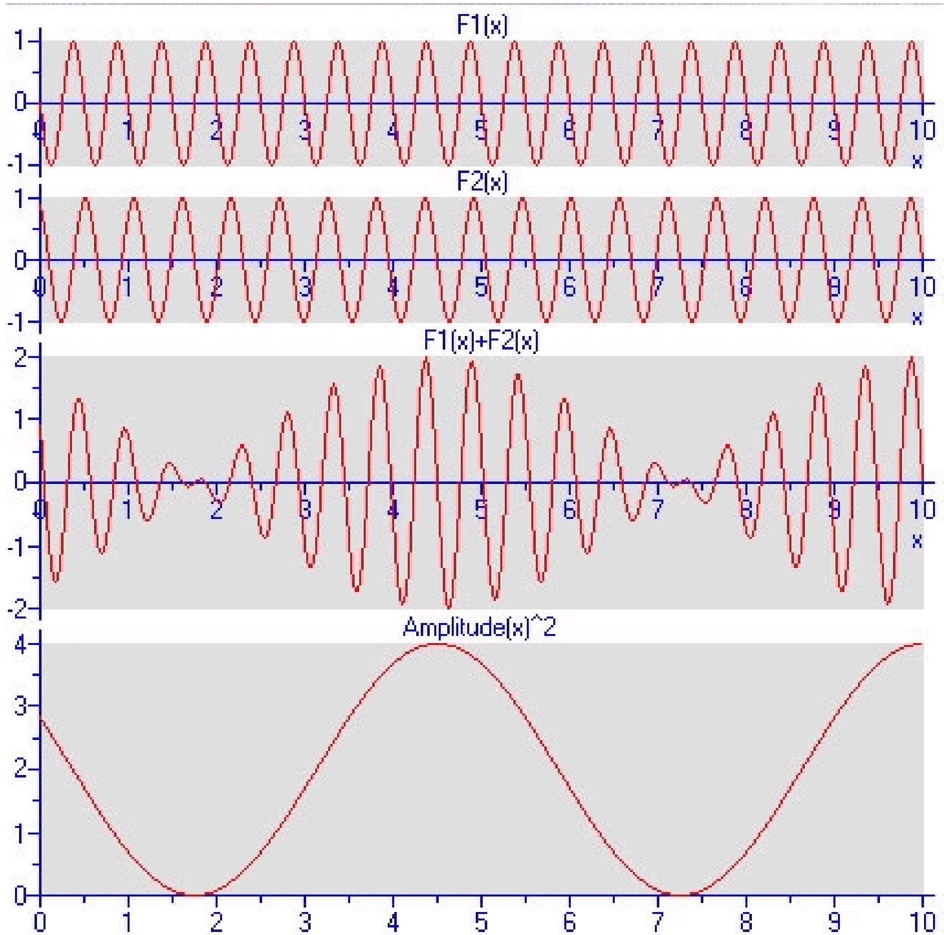








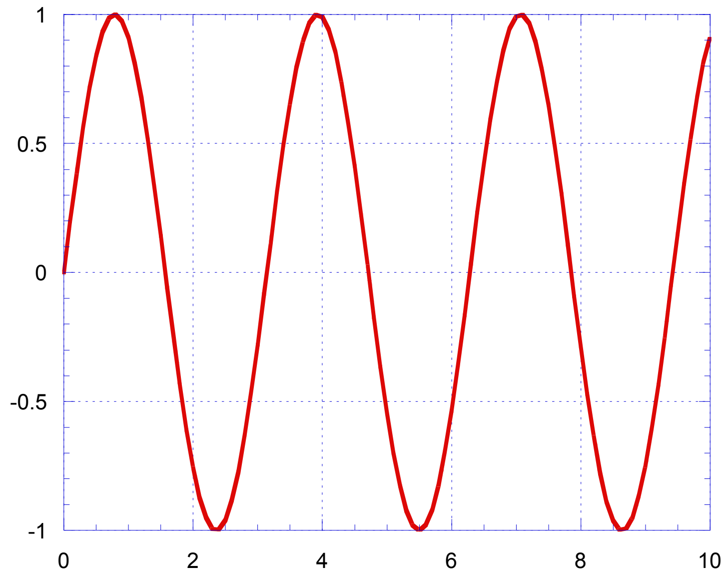




Representación de la perturbación

$$\psi = f(x,t)$$

Funciones armónicas

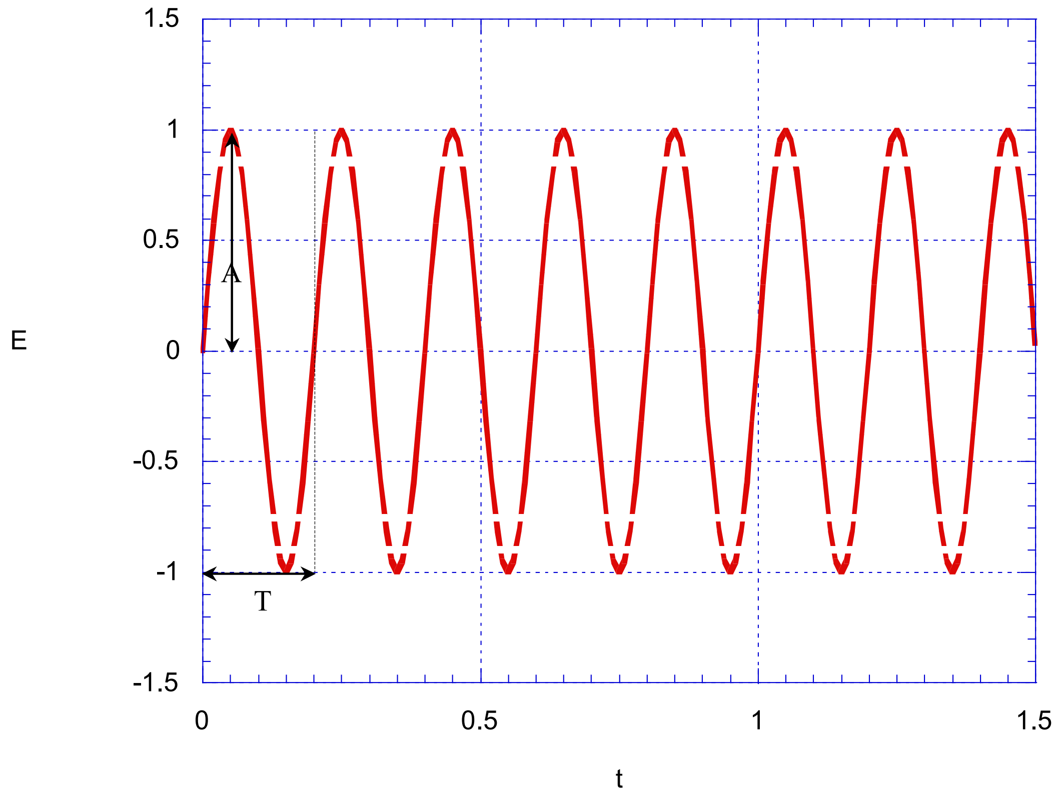


Los parámetros que las definen son:

- Amplitud (A)

- Frecuencia (f)

- Período (T)



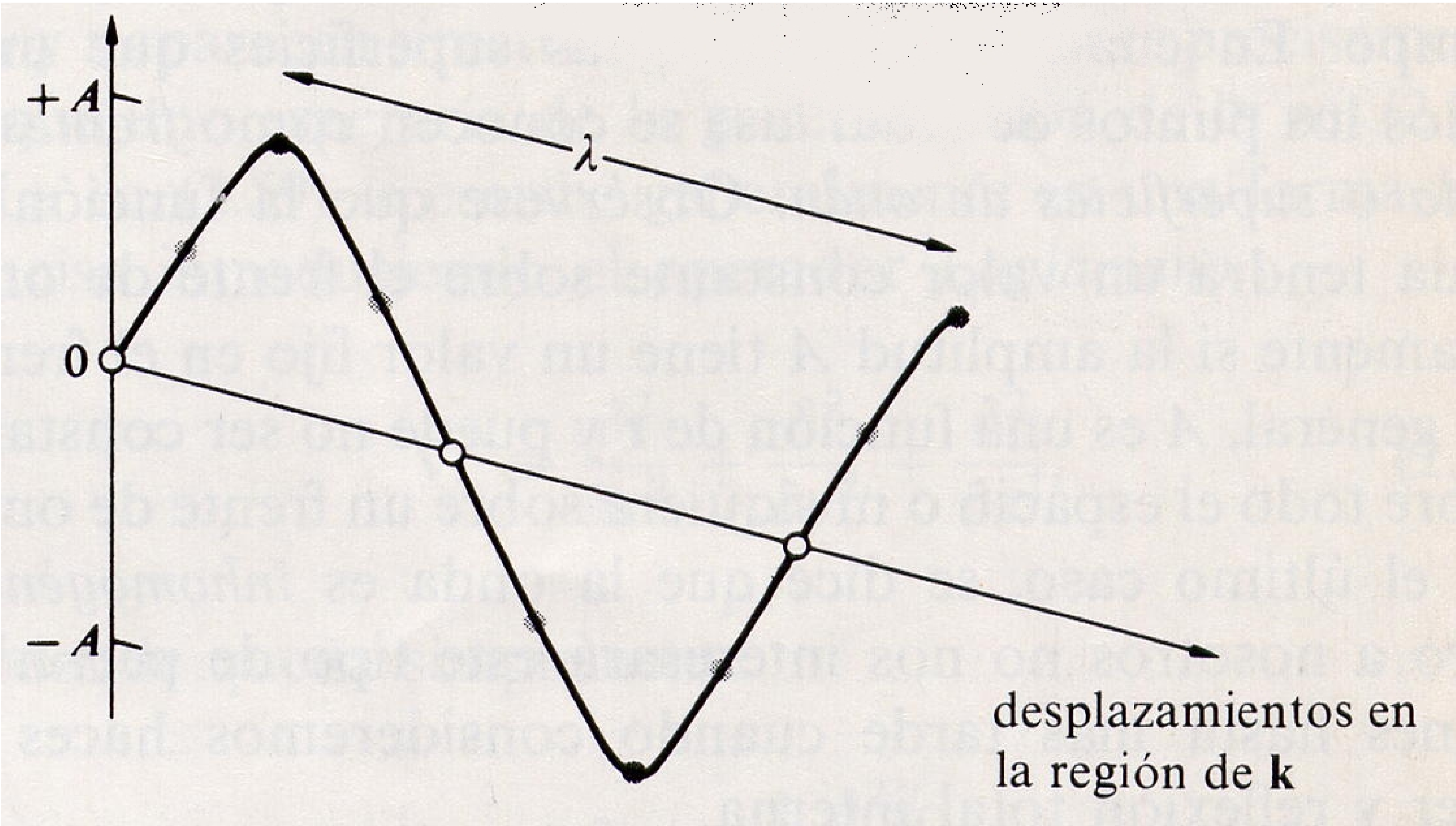
La frecuencia y el período son inversos:

f=1/T

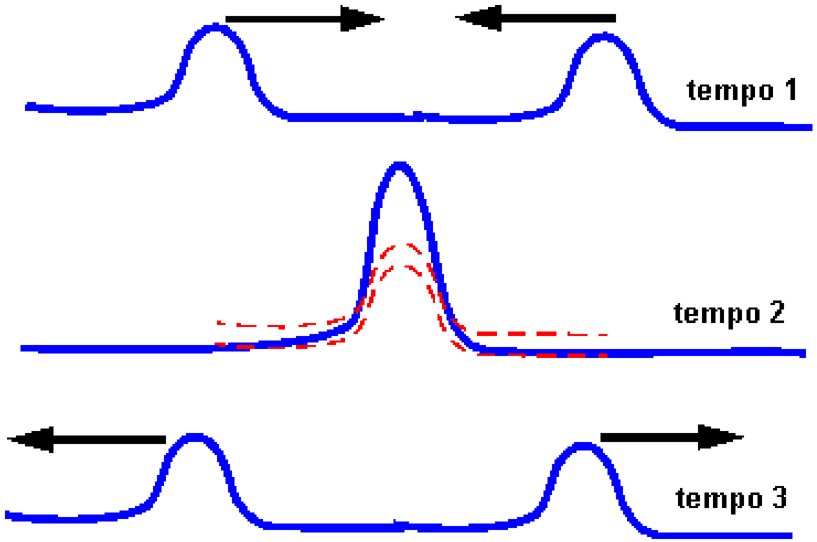
La frecuencia angular es:

w=2πf

Ondas electromagnéticas



Pulsos



Periodicidad temporal

$$\psi = f\left(x - vt\right) = f\left(x'\right)$$

Deducción de la ecuación de ondas

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x'}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial t} = -v\frac{\partial f}{\partial x'}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -v\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x'^2}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x'}\left(-v\frac{\partial f}{\partial x'}\right)\frac{\partial x'}{\partial t} = -v\frac{\partial^2 f}{\partial x'^2}\left(-v\right) = v^2\frac{\partial^2 f}{\partial x'^2}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = v^2\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

Ecuación escalar de ondas

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0$$

Principio de superposición

$$\psi = Af\left(x + vt\right) + Bf\left(x - vt\right)$$

Caso de ondas armónicas: $\psi(x,0) = A\cos\left(kx\right) = f(x)$

Por construcción $\psi(x,t) = A\cos\left(k\left(x - vt\right)\right) = A\cos\left(kx - wt\right)$

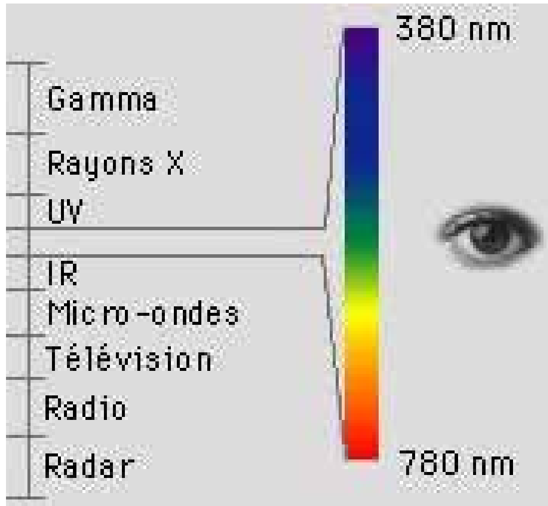
Frecuencia espacial $\dfrac{k}{2\pi}$ **Período espacial** $\lambda = \dfrac{2\pi}{k}$

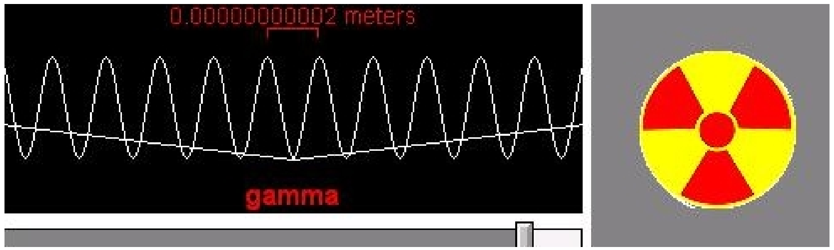
Frecuencia temporal $\dfrac{kv}{2\pi} = f$

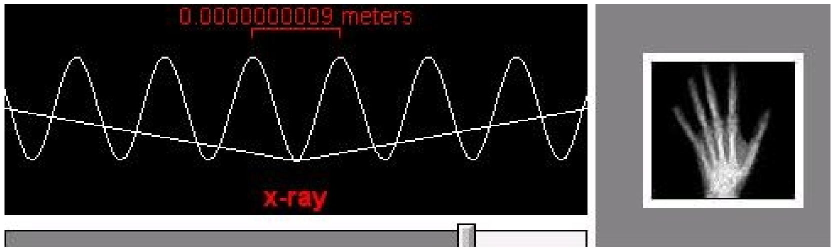
Relación entre ellas: $\lambda = \dfrac{2\pi}{k} = \dfrac{v}{f} \Rightarrow \lambda f = v$

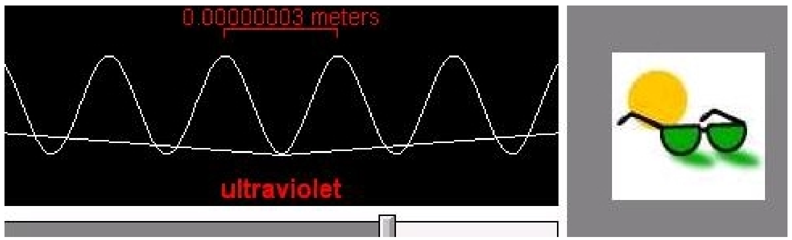
Clasificación de las ondas electromagnéticas (OEM) en función de la frecuencia

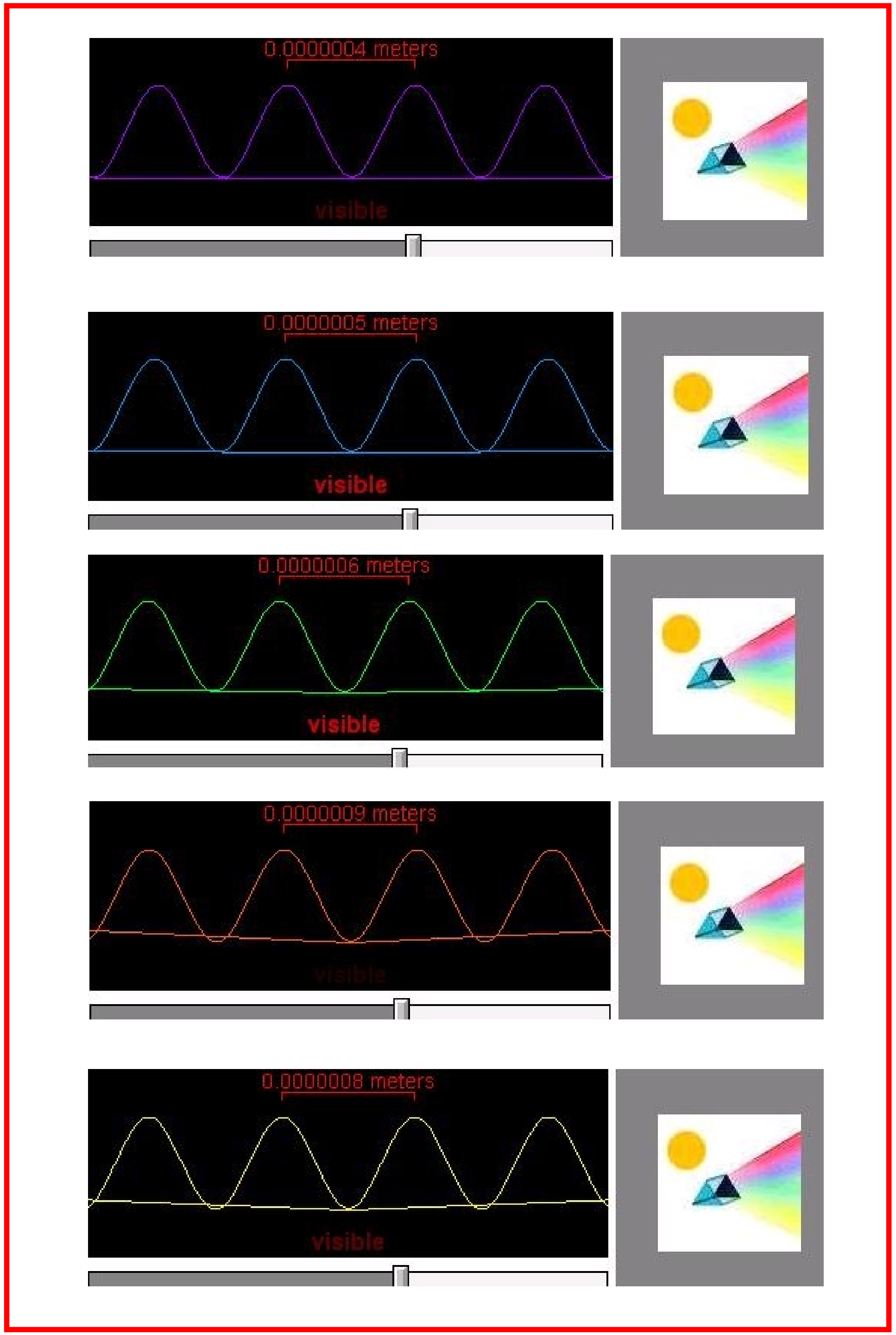
Tipo de radiación	Frecuencia (Hz)	Longitud de onda (m)
Rayos gamma	10^{21}	10^{-12}
Rayos X	10^{18}	10^{-10}
UV	10^{16}	10^{-8}
Visible	10^{15}	10^{-6}
Infrarrojo	10^{13}	10^{-5}
Microondas	10^{10}	10^{-2}
Radar	10^{9}	10^{-1}
TV	10^{8}	10
Radio	$<10^{8}$	>10



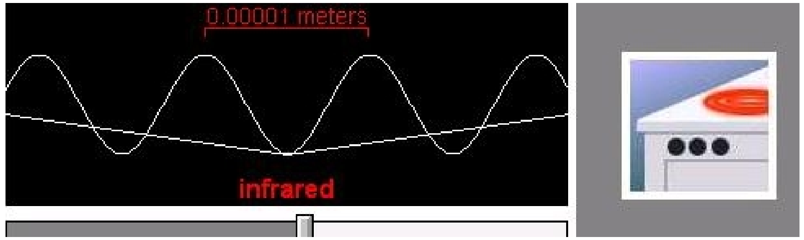


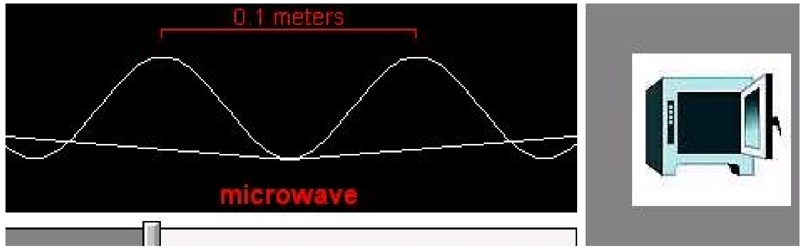


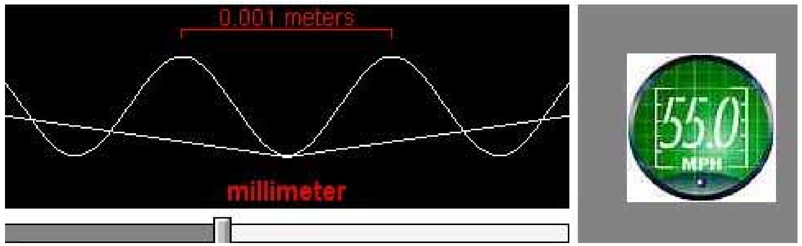


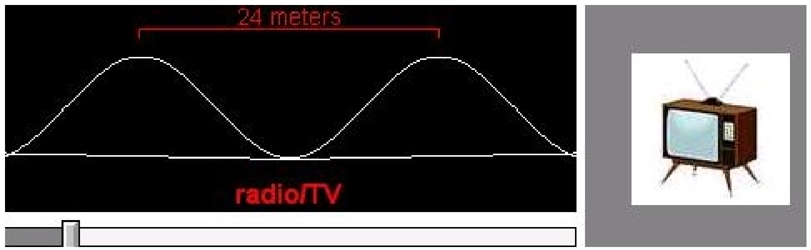

0.0000004 meters
visible
0.0000005 meters
visible
0.0000006 meters
visible
0.0000009 meters
visible
0.0000008 meters
visible

Visible


0.00001 meters
infrared

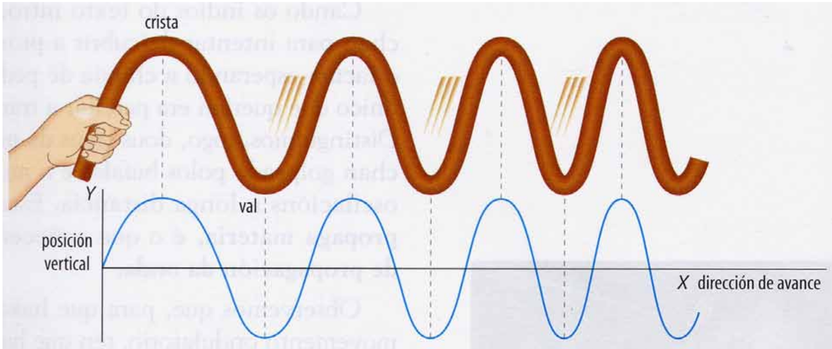

0.1 meters
microwave

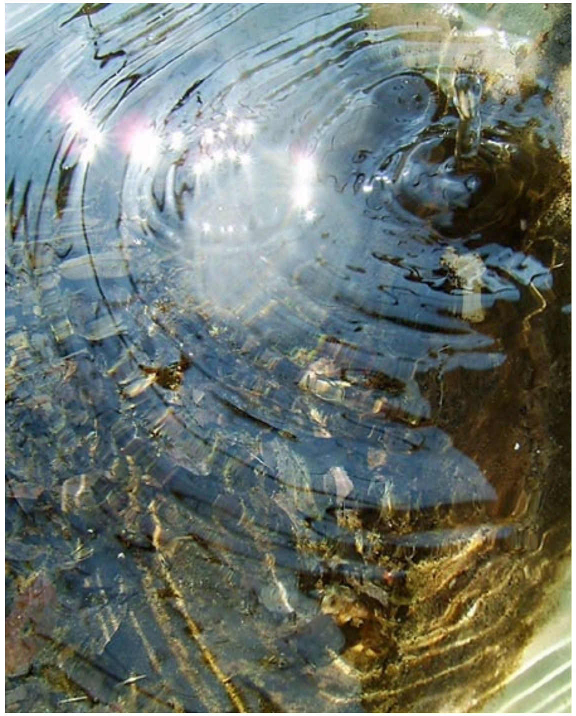

0.001 meters
millimeter
55.0
MPH


24 meters
radio/TV

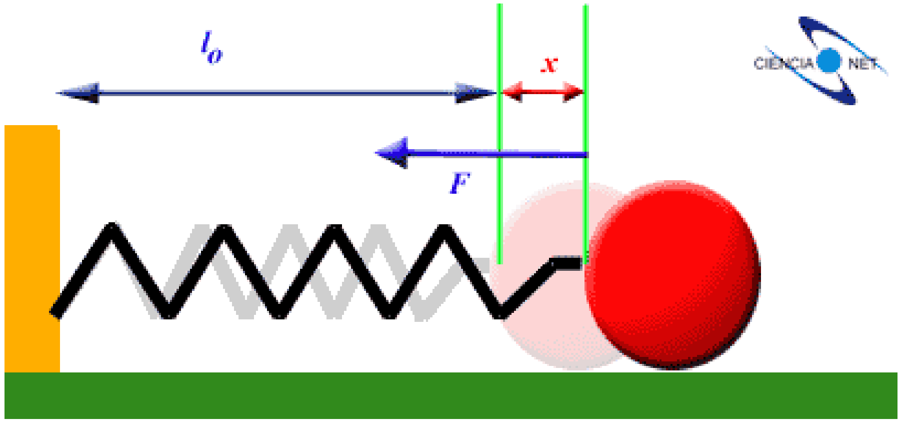
Clasificación según la relación entre las direcciones de vibración y propagación

Transversales





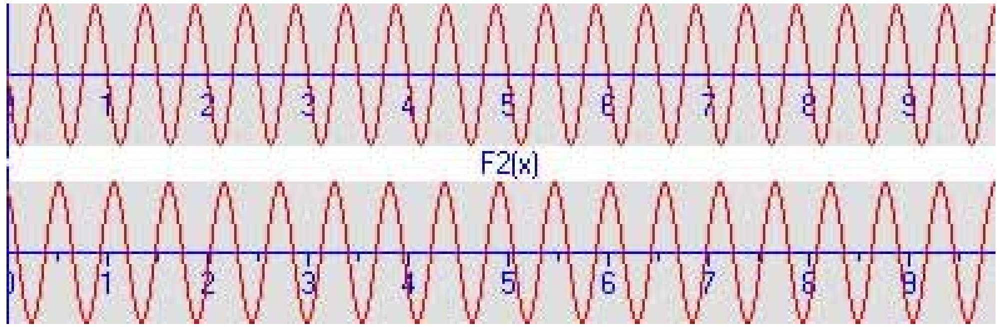
Longitudinales



Interferencia entre ondas armónicas.

$$\psi_1(x,t) = A\cos\left(kx - wt\right)$$

$$\psi_2(x,t) = A\cos\left(kx - wt + \varepsilon\right)$$



Empleando la relación:

$$\cos a + \cos b = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

se obtiene:

$$\psi_1(x,t) + \psi_2(x,t) = 2A\left[\cos\left(\frac{2kx - 2wt + \varepsilon}{2}\right)\cos\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \psi = 2A\cos\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\cos\left(kx - wt + \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

Ondas en fase: interferencia constructiva

$$\varepsilon = 0 \Rightarrow A' = 2A$$

Ondas en oposición de fase: interferencia destructiva

$$\varepsilon = \pi \Rightarrow A' = 0$$

ONDAS ESTACIONARIAS

Caso particular de ondas de igual amplitud, frecuencia y fase, pero con sentidos de propagación contrarios:

$$\psi_1(x,t) = A\cos(kx - wt)$$

$$\psi_2(x,t) = A\cos(kx + wt)$$

Se obtiene:

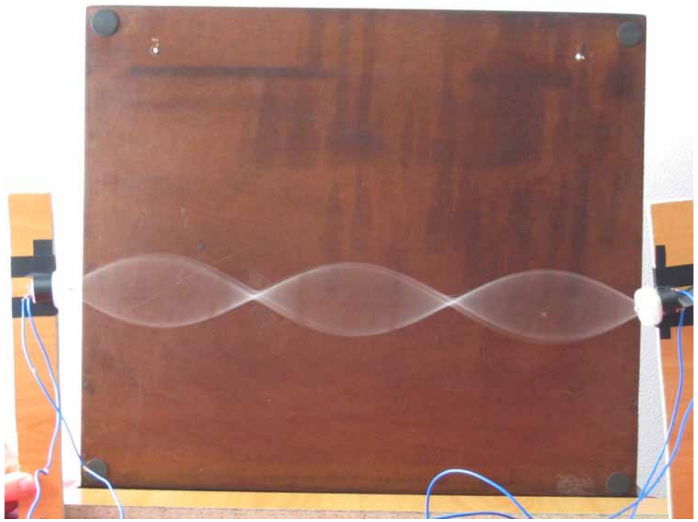
$$\psi_1(x,t) + \psi_2(x,t) = 2A\left[\cos\left(\frac{2kx}{2}\right)\cos\left(\frac{-2wt}{2}\right)\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \psi = 2A\cos(kx)\cos(wt)$$

La amplitud depende de la posición:

- puntos donde la amplitud es máxima: crestas

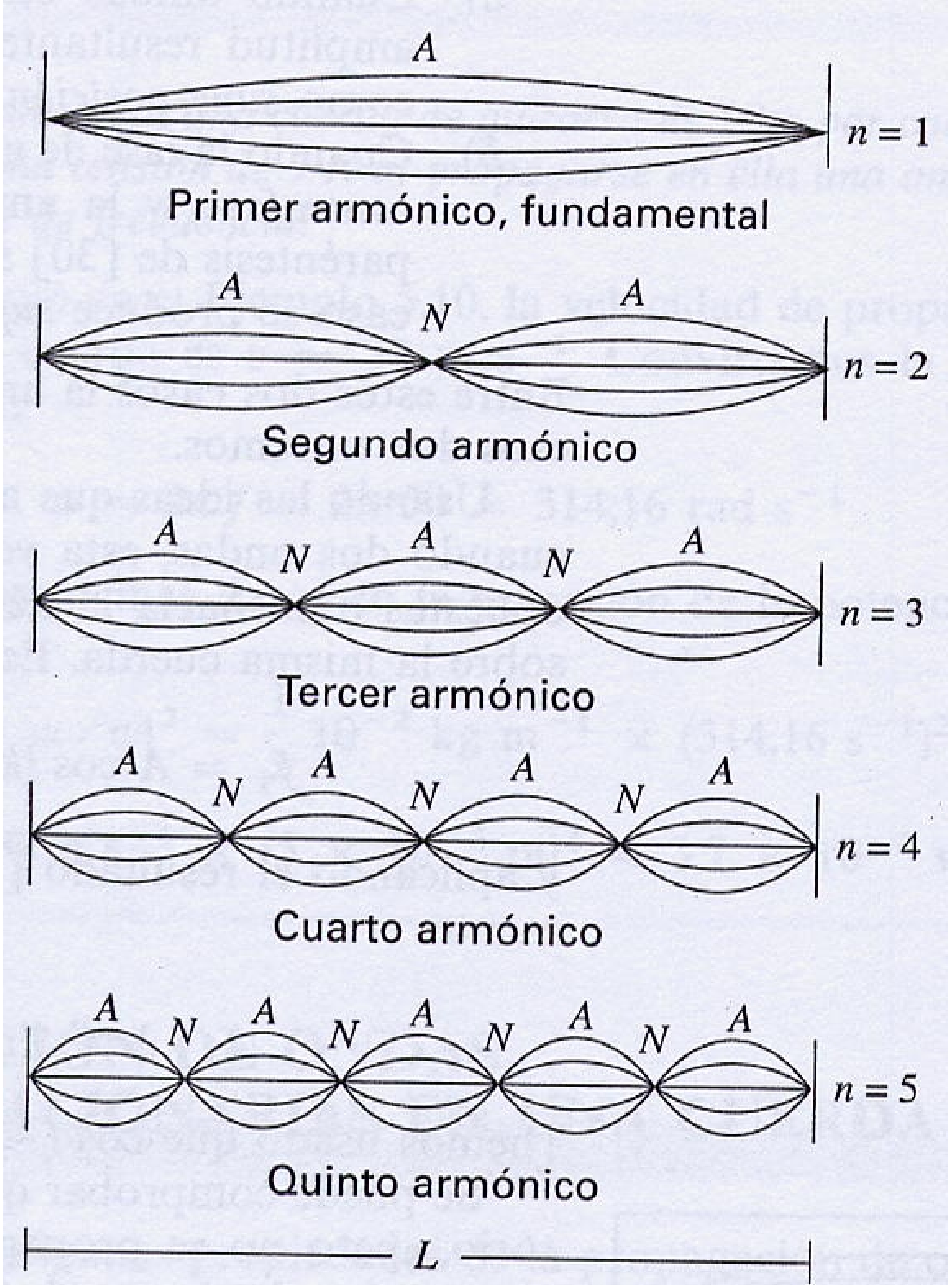
- puntos donde la amplitud es nula: nodos



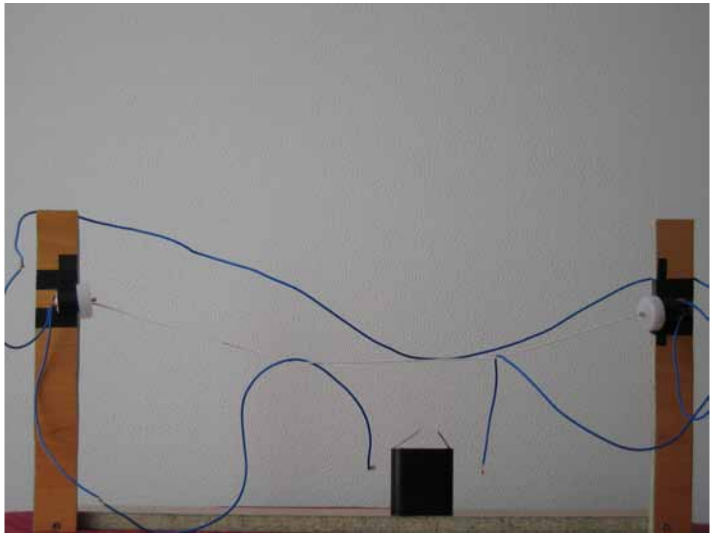
Las únicas ondas estacionarias que se pueden generar en una cuerda son aquellas cuya longitud de onda verifique:

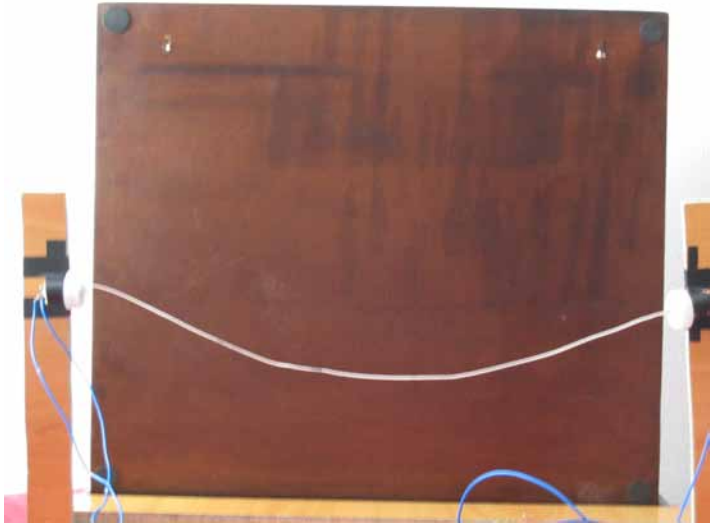
$$\lambda = 2\frac{L}{n}$$

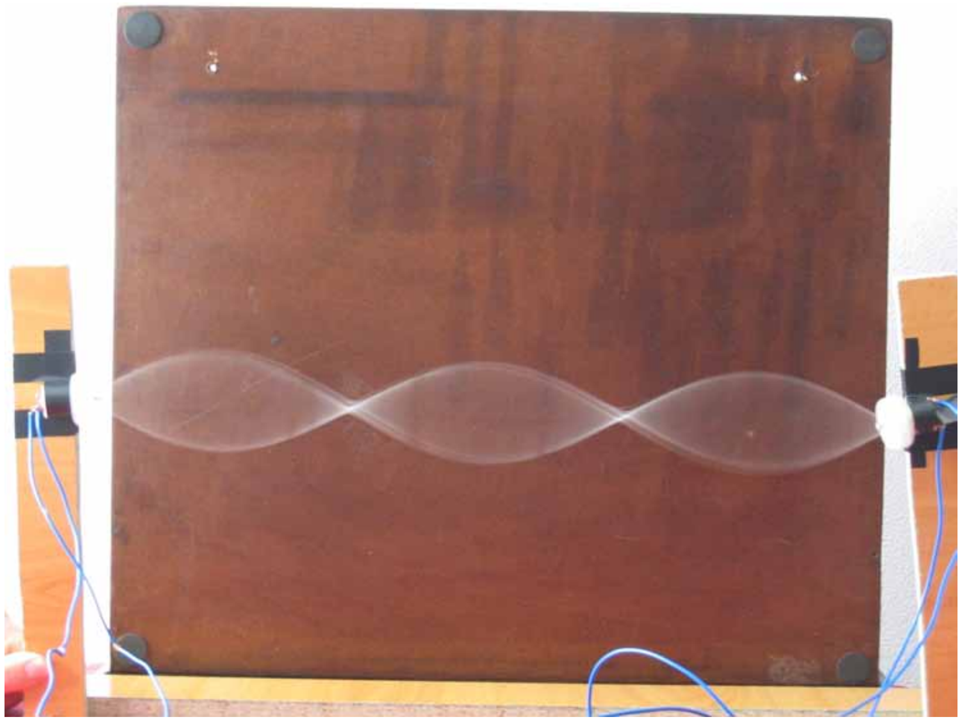
Las longitudes de onda posibles están cuantizadas

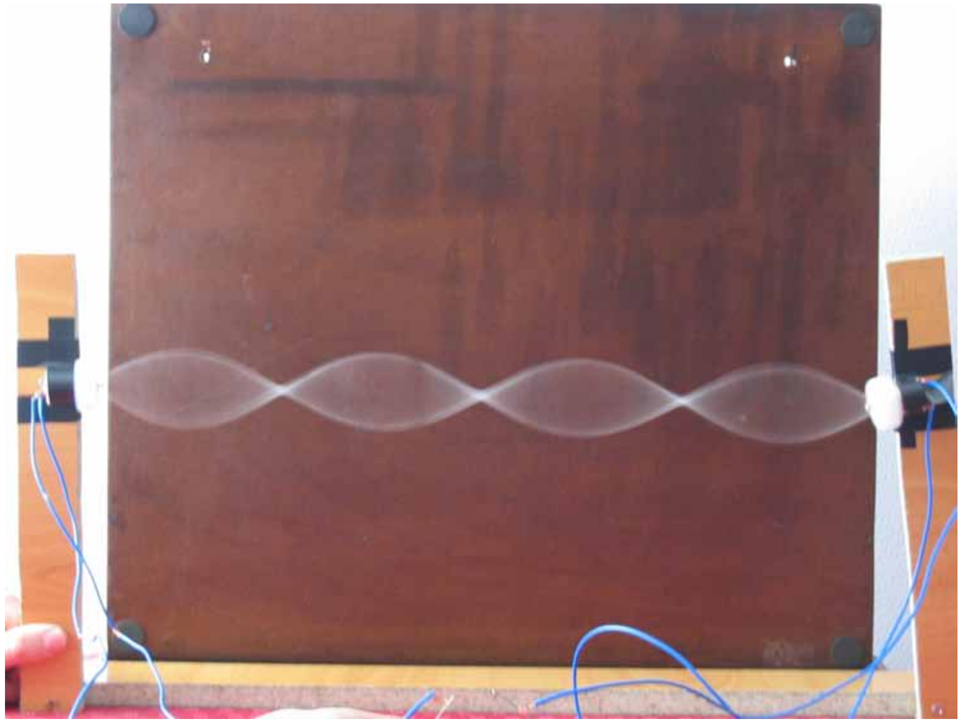


Práctica 1: observación de ondas estacionarias en una cuerda

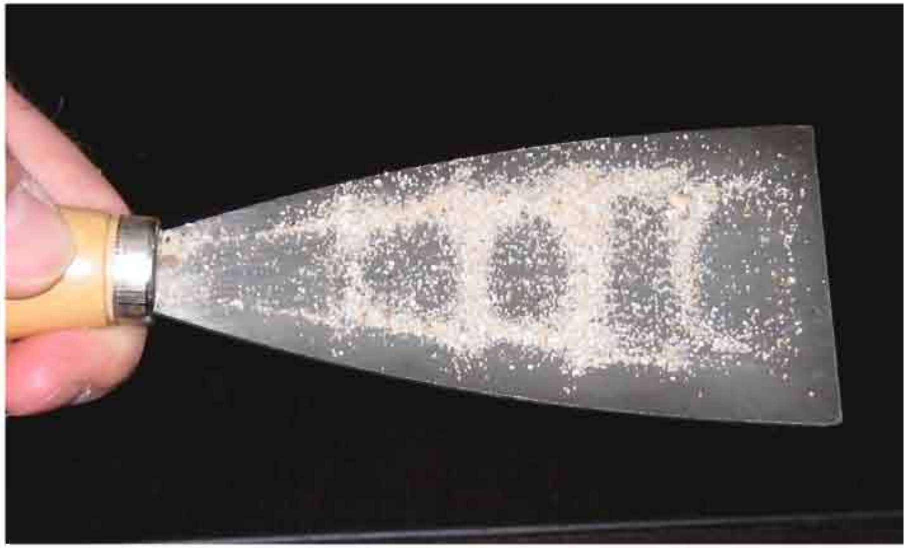








Práctica 2: observación de ondas estacionarias en superficies metálicas





Las OEM son ondas transversales y se propagan en el vacío

Ecuaciones de Maxwell

$$\vec{\nabla}\vec{D} = \rho$$ **(ley de Gauss)**

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \qquad \vec{D} = \varepsilon\vec{E} \qquad \vec{\nabla}\vec{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = div\vec{D}$$

$$\vec{\nabla}\vec{B} = 0$$ **(ley de Gauss magnética)** $\vec{B} = \mu\vec{H}$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = -\dot{\vec{B}}$$ **(ley de inducción de Faraday)**

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = \left(\frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial Ez}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x}\right)\vec{k} = rot\vec{E}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{j} + \dot{\vec{D}}$$ **(ley de Ampére-Maxwell)**

Caso óptico: muy lejos de las fuentes

(las densidades de carga y corriente son nulas)

$$\vec{j} \approx 0; \rho \approx 0$$

$$\vec{\nabla}\vec{D} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla}\vec{E} = 0$$

$$\vec{\nabla}\vec{B} = 0$$

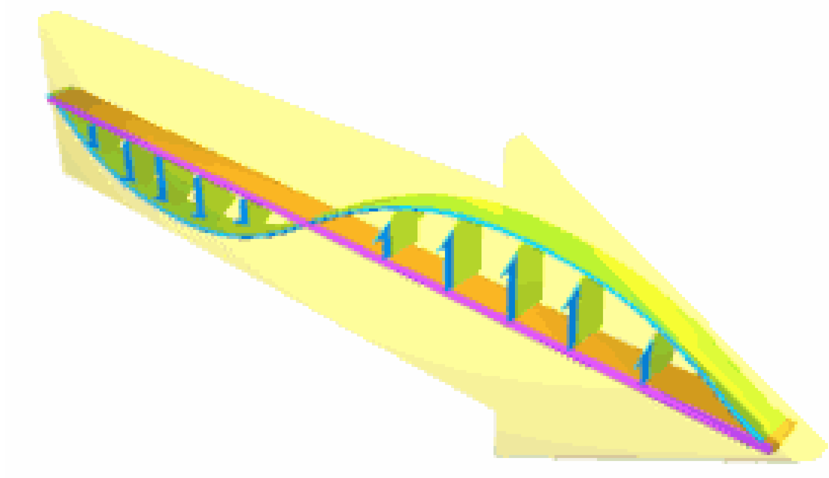
$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\dot{\vec{B}}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \dot{\vec{D}}$$

La expresión vectorial de una onda plana es:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos\left(kx - wt + \varepsilon\right)$$

El campo es necesariamente transversal



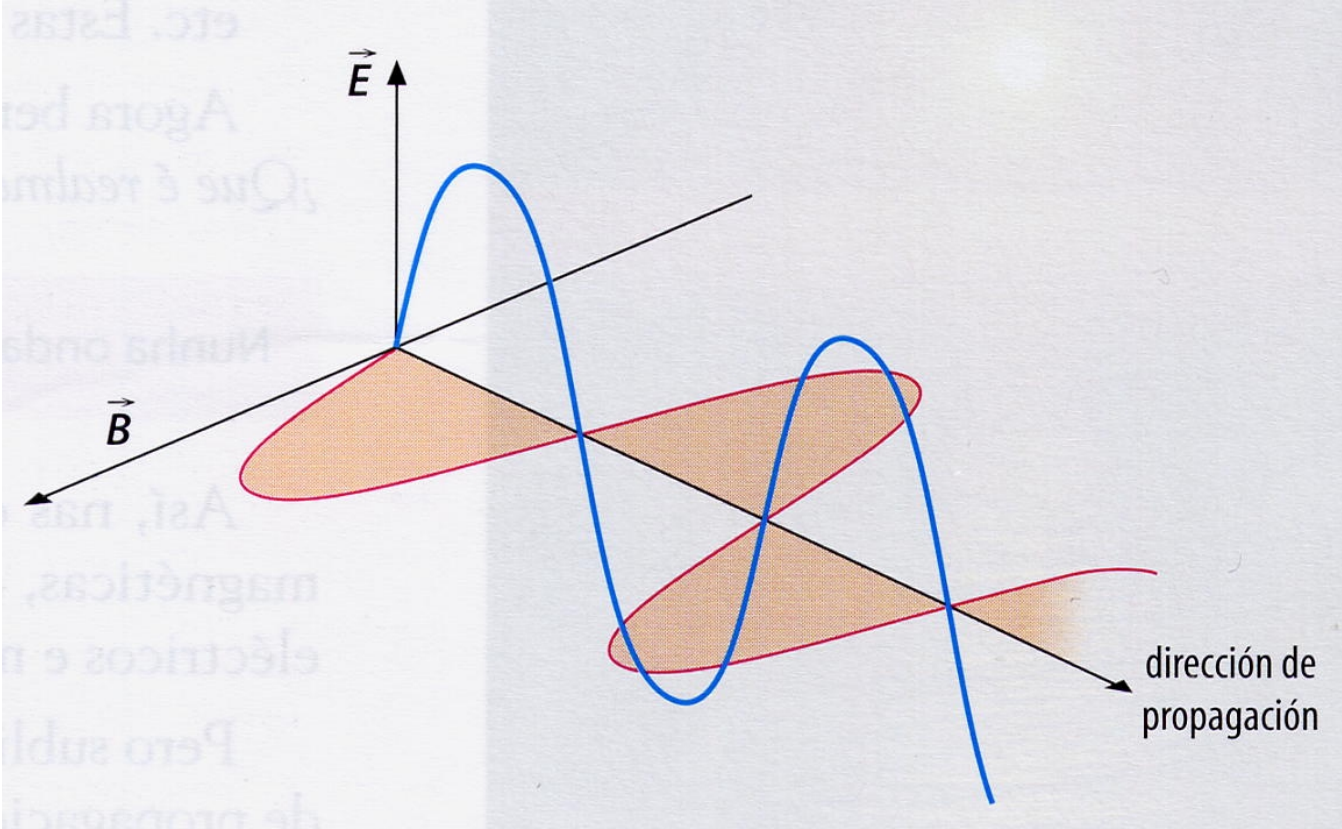
El triedro del campo electromagnético

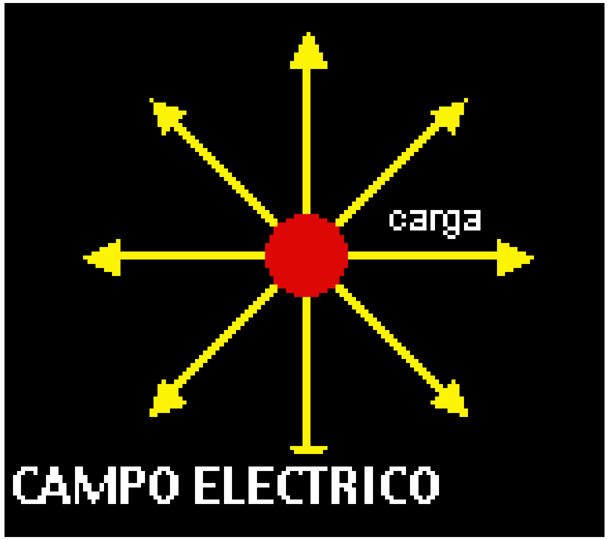
$$\vec{\nabla}\vec{D} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla}\vec{E} = 0$$

$$\vec{\nabla}\vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\dot{\vec{B}}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \dot{\vec{D}}$$





Además, el campo se autosustenta

Polarización:

propiedad de las ondas transversales

Luz natural (LN): la distribución de la dirección de vibración es simétrica o equiprobable

Cualquier alteración de esta distribución => fenómeno de polarización

Dos ondas planas armónicas de igual frecuencia propagándose en la dirección OZ, desfasadas y con direcciones de vibración ortogonales entre sí:

$$\vec{E}_1(x,t) = E_{0x}\cos(kx - wt)\hat{u}_x$$

$$\vec{E}_2(x,t) = E_{0y}\cos(kx + wt + \varepsilon)\hat{u}_y$$

Tomando módulos:

$$E_1(x,t) = E_{0x}\cos(kx - wt) \Rightarrow \frac{E_1}{E_{0x}} = \cos(kx - wt) \Rightarrow \operatorname{sen}(kx - wt) = \sqrt{1 - \left(\frac{E_1}{E_{0x}}\right)^2}$$

$$E_2(x,t) = E_{0y}\cos(kx + wt + \varepsilon) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{E_2}{E_{0y}} = \cos(kx - wt)\cos\varepsilon - \operatorname{sen}(kx - wt)\operatorname{sen}\varepsilon = \frac{E_1}{E_{0x}}\cos\varepsilon - \sqrt{1 - \left(\frac{E_1}{E_{0x}}\right)^2}\operatorname{sen}\varepsilon$$

Tomando cuadrados y reorganizando términos

$$\left(\frac{E_2}{E_{0y}} - \frac{E_1}{E_{0x}}\cos\varepsilon\right)^2 = \left[1 - \left(\frac{E_1}{E_{0x}}\right)^2\right]\mathrm{sen}^2\,\varepsilon$$

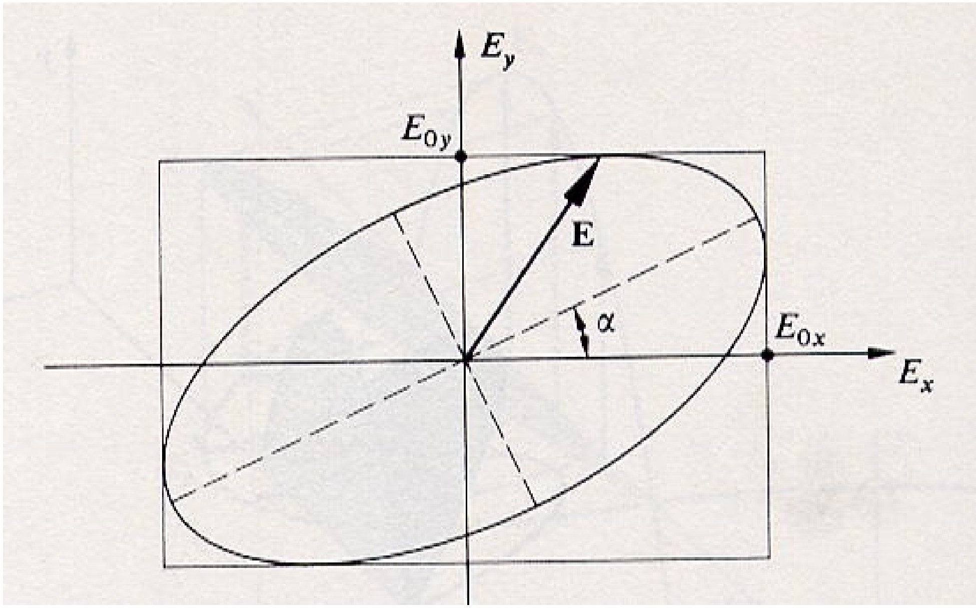
$$\left(\frac{E_2}{E_{0y}}\right)^2 + \left(\frac{E_1}{E_{0x}}\right)^2 - 2\frac{E_1 E_2}{E_{0x}E_{0y}}\cos\varepsilon = \mathrm{sen}^2\,\varepsilon$$

La ecuación obtenida es la de una elipse que forma un ángulo α con el eje OX tal que:

$$\mathrm{tg}(2\alpha) = \frac{2E_{0x}E_{0y}\cos\varepsilon}{E_{0x}^{\ 2} - E_{0y}^{\ 2}}$$

Elipse de polarización

(no está orientada conforme a los ejes de vibración de las ondas de partida)



La dirección de la vibración del campo eléctrico varía de forma definida con el tiempo

El sentido de giro del campo depende del desfase relativo entre las ondas superpuestas

$$\frac{\partial E_2}{\partial t} = wE_{0y}\,\mathrm{sen}(kx - wt + \varepsilon)$$

para x=0, t=0

$$\left[\frac{\partial E_2}{\partial t}\right]_{x=0,t=0} = wE_{0y}\,\mathrm{sen}\,\varepsilon$$

ε entre 0 y π: luz elíptica levógira

ε entre π y 2π: luz elíptica dextrógira

Casos particulares

Luz circular (LC): Los semiejes de la elipse han de ser iguales

Si las ondas tienen igual amplitud:

$$\left(\frac{E_2}{E_0}\right)^2 + \left(\frac{E_1}{E_0}\right)^2 - 2\frac{E_1 E_2}{E_0^{\ 2}}\cos\varepsilon = \operatorname{sen}^2\varepsilon$$

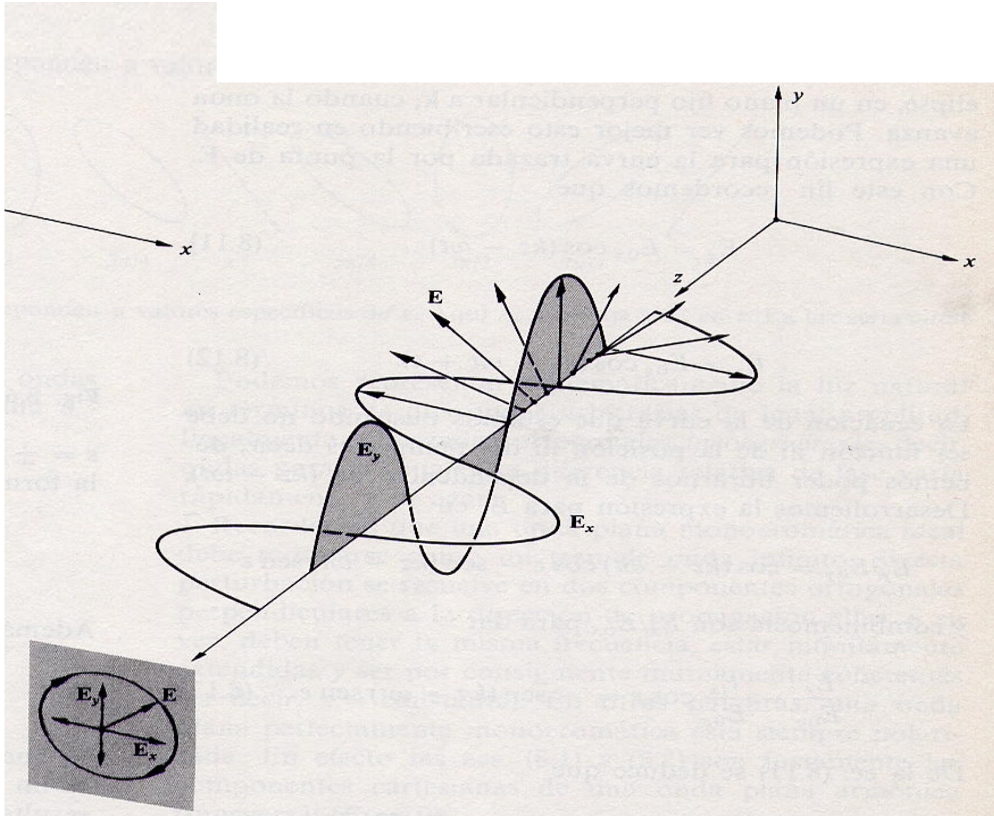
$$E_1^{\ 2} + E_2^{\ 2} - 2E_1E_2\cos\varepsilon = E_0^{\ 2}\operatorname{sen}^2\varepsilon$$

Además, si

$$\varepsilon = (2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in Z$$

estará orientada según los ejes X,Y:

$$E_1^{\ 2} + E_2^{\ 2} = E_0^{\ 2}$$



Luz lineal (LL):

Caso en que uno de los semiejes sea nulo: la elipse puede degenerar en una recta

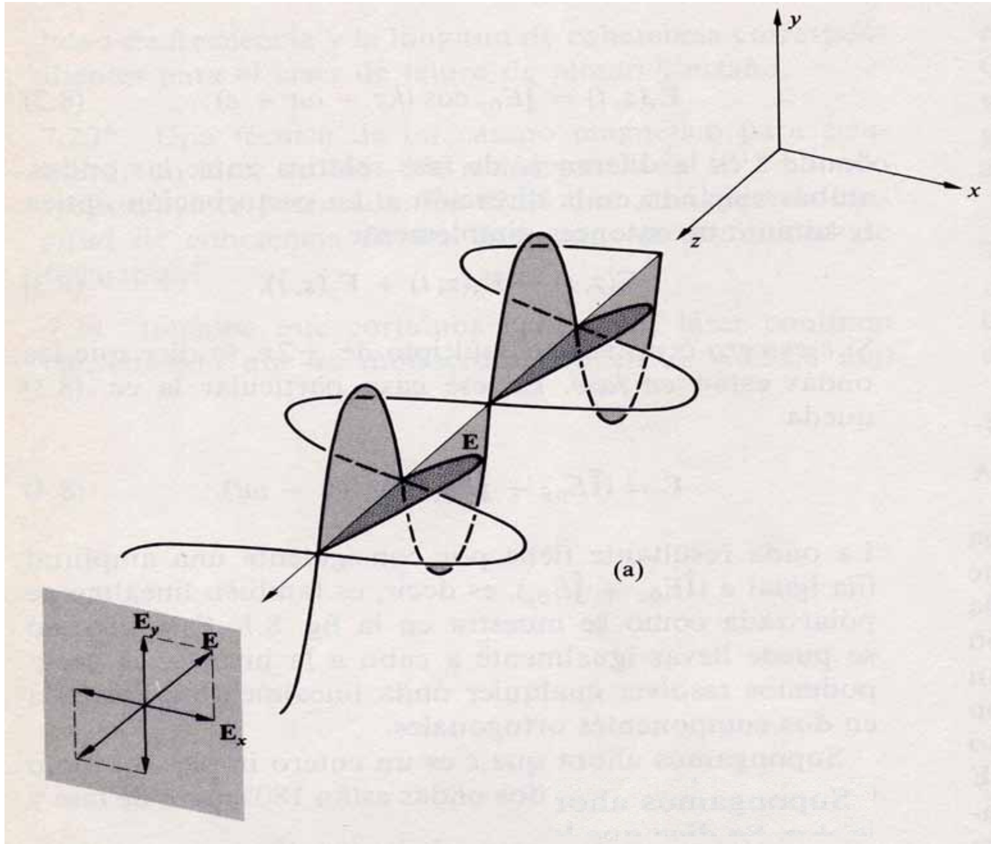
Si $\varepsilon = n\pi, n \in Z$

entonces

$$\frac{E_2^{\,2}}{E_{0y}^{\,2}} + \frac{E_1^{\,2}}{E_{0x}^{\,2}} \pm \frac{2E_1E_2}{E_{0x}E_{0y}} = 0$$

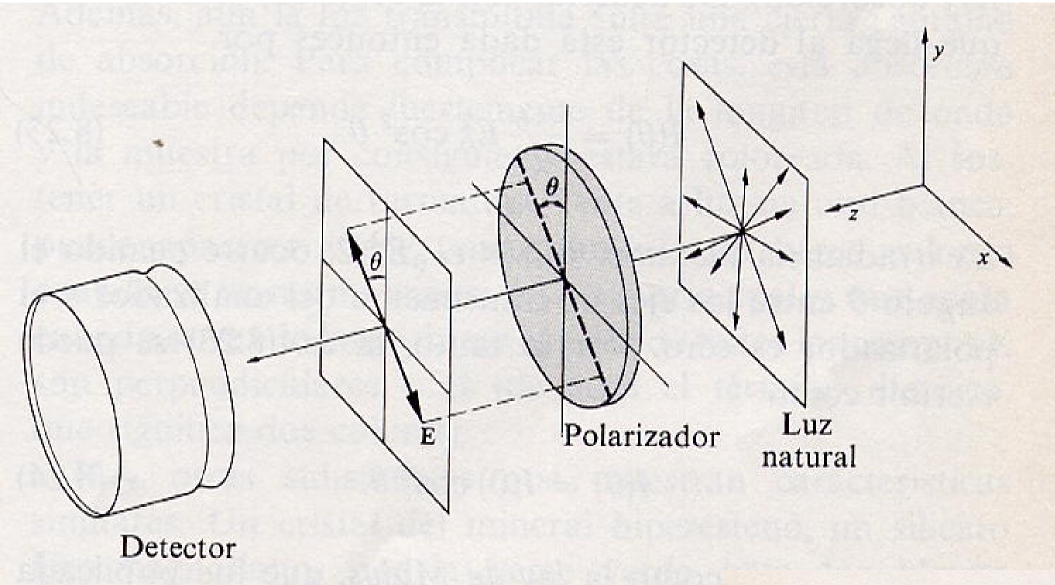
$$\left(\frac{E_1}{E_{0x}} \pm \frac{E_2}{E_{0y}}\right)^2 = 0$$

$$E_2 = \pm\frac{E_{0y}}{E_{0x}}E_1$$

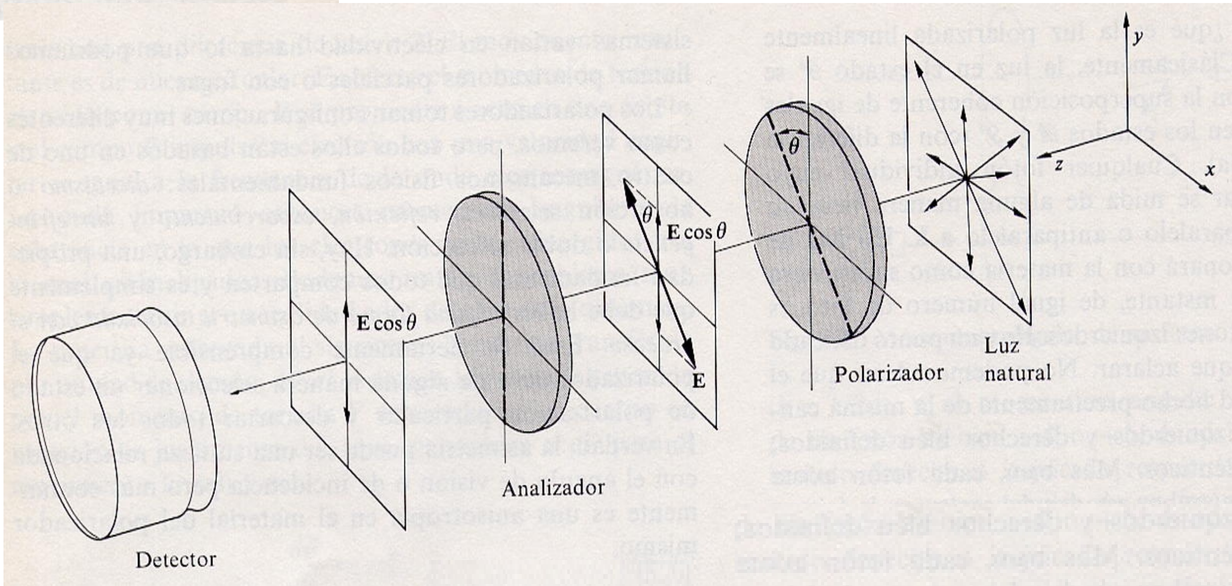


Polarizador lineal: tiene un eje privilegiado (eje de transmisión del polarizador)

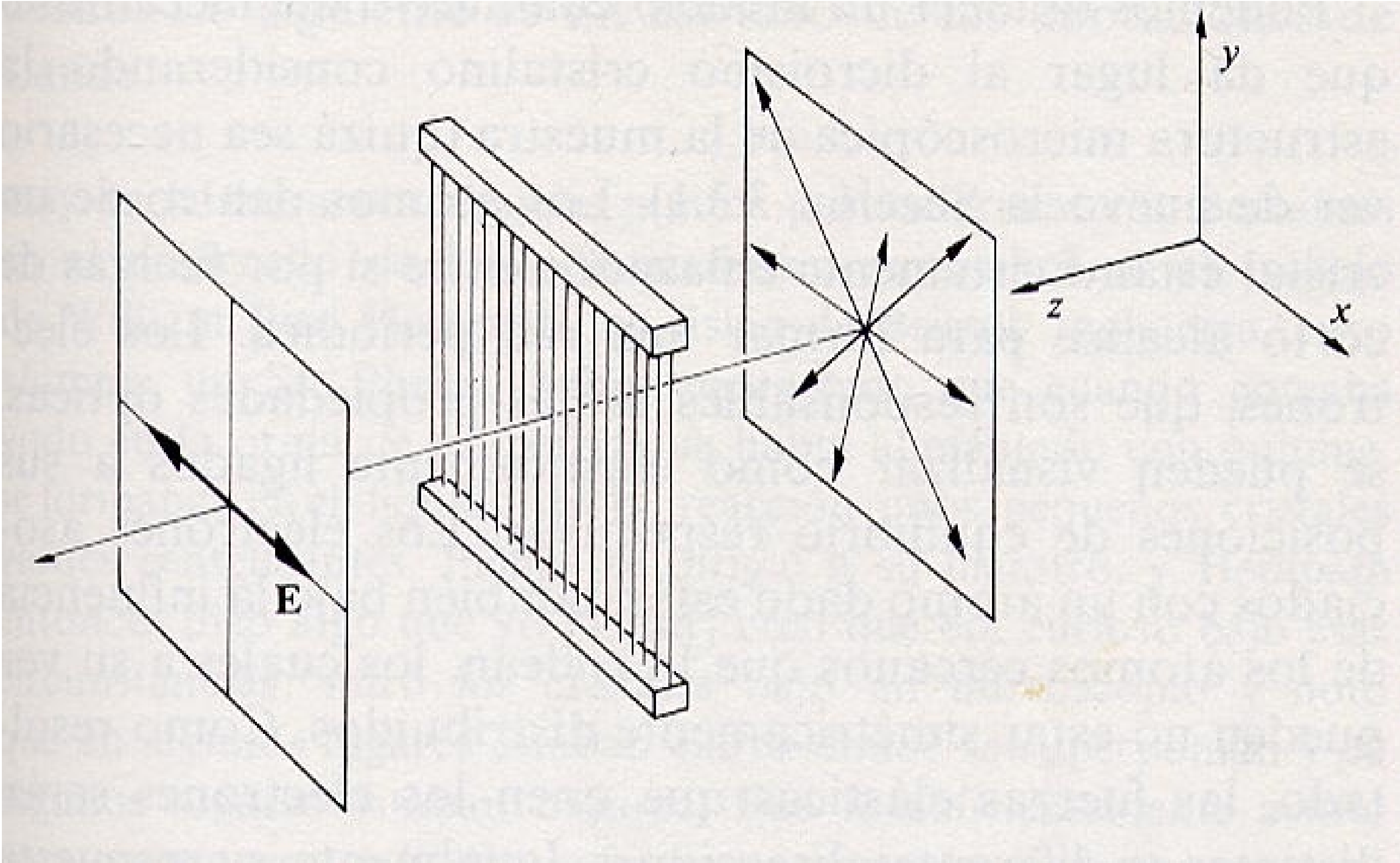
Sólo podrá atravesarlo aquella luz que tenga su dirección de vibración paralelo a dicho eje



Ley de Malus



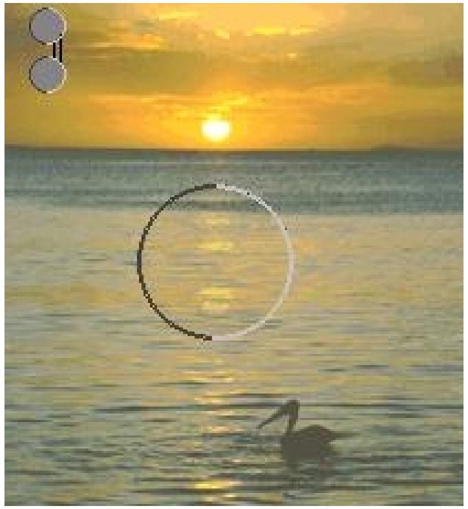
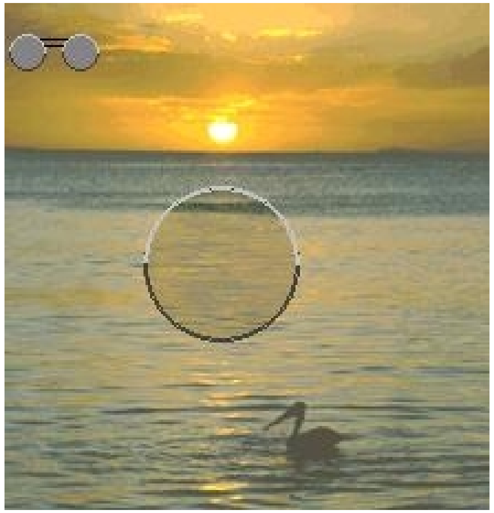
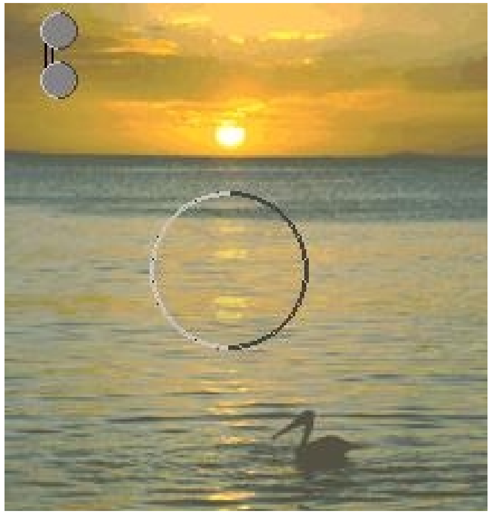
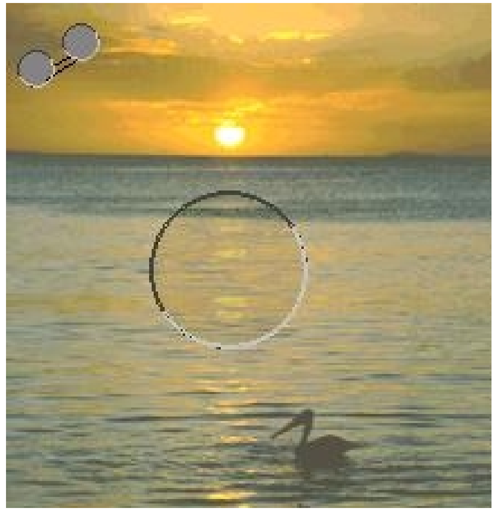
Rejilla polarizadora de alambre



http://www.maloka.org/f2000/polarization/molecular_view.html

Práctica 3: observación de la luz transmitida por uno o dos polarizadores en función del ángulo de observación

Parte de la luz que observamos en el cielo está linealmente polarizada

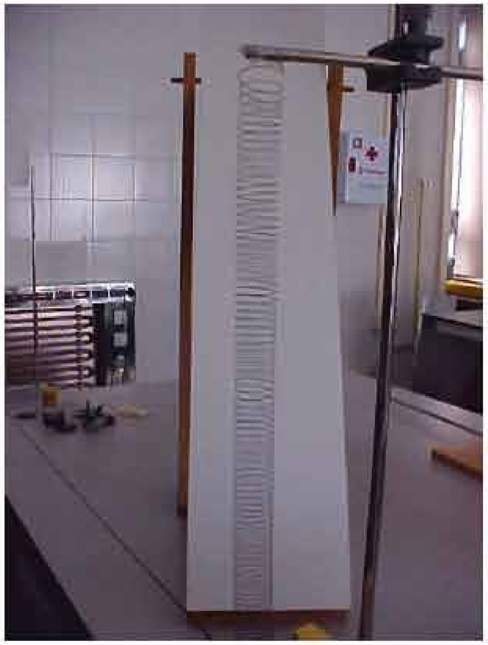

Retardador:
elemento que retrasa en fase una de las componentes ortogonales del campo

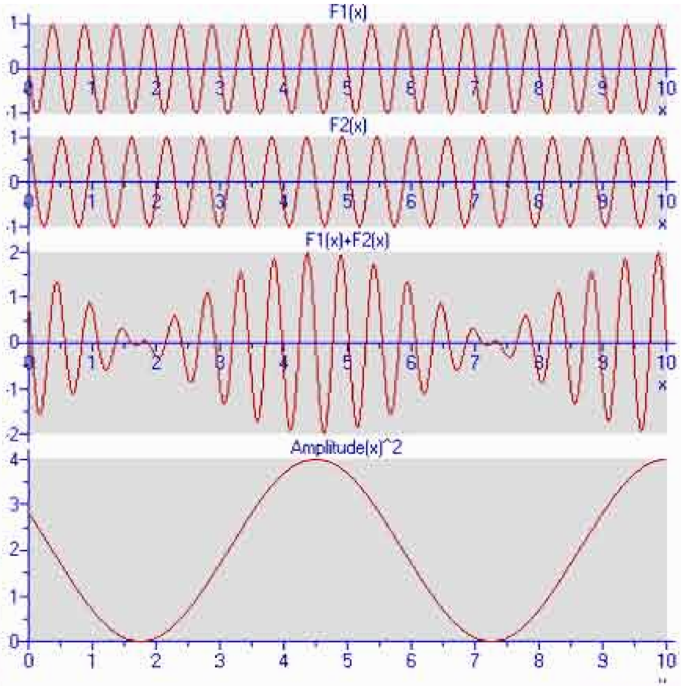
Ejemplo: Papel de celofán

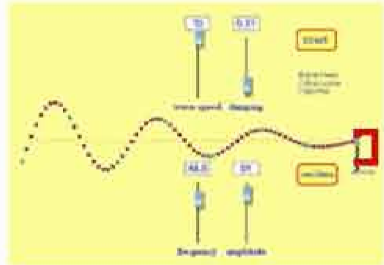
Bibliografía.

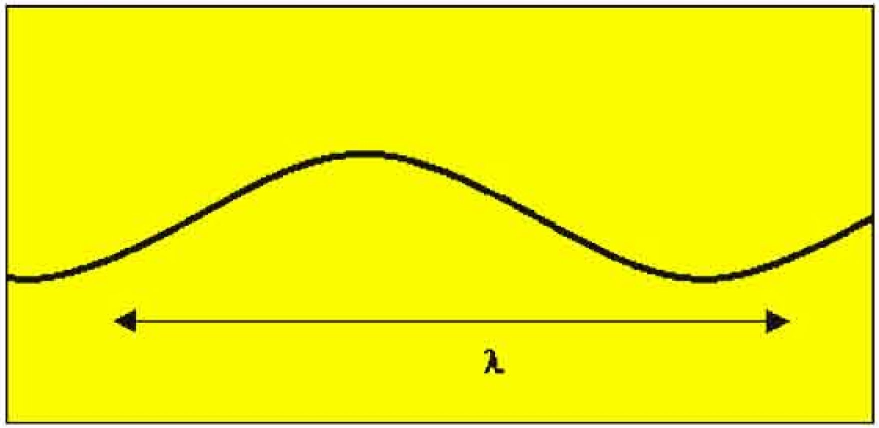
1. "Demostraciones sobre ondas estacionarias con materiales sencillos", A. Cortel, Revista Española de Física, Volumen 16, número 1, 2002.
2. Óptica; Hecht-Zajac; Addison-Wesley Iberoamericana, 1986 (versión en español).
3. Física 2º Bachillerato; J. Barrio Gómez; Oxford University Press, 2004.
4. Conceptos de Física; Paul G. Hewitt; Ed. Limusa, 1996.
5. Todo vai (III) ¡Funciona!; Ramón Vilalta López; Baía Edicións, 2002.
6. Matemáticas 3º B.U.P.; Adolfo Negro, César Benedicto; Ed. Alhambra, 1992.
7. Física; Pyshical Science Study Commitee; Ed. Reverté, 2ª Ed., 1966
8. Física para Ciencias de la vida; David Jou, Josep Enric Llebot, Carlos Pérez García, McGraw-Hill, 2002

http://usuarios.lycos.es/explorar/ondas/ondas-es.htm




F1(x)
F2(x)
F1(x)+F2(x)
Amplitude(x)^2
x




λ