GEOMETRÍA CON PAPEL: POLIEDROS

Covadonga Blanco García, Fernando Lazo Pérez, María Teresa Otero Suárez e José Ignacio Royo Prieto

LA PAPIROFLEXIA EN LA EDUCACIÓN MATEMATICA

ALGUNOS BENEFICIOS Y CUALIDADES

La papiroflexia puede ser una gran ayuda en la educación matemática, a continuación exponemos algunos beneficios y cualidades que podemos encontrar en esta disciplina.

Da al profesor de matemáticas una herramienta pedagógica que le permite trabajar con diferentes contenidos no solo conceptuales, sino también de procedimiento, desarrollando habilidades motoras finas y gruesas que a su vez permitirán al alumno desarrollar otros aspectos, como lateralidad, percepción espacial y psicomotricidad.

- Desarrolla la destreza manual y la exactitud en el desarrollo del trabajo, exactitud y precisión manual.
- Relaciona las matemáticas con otras áreas como las artes por ejemplo.
- Motiva al estudiante a ser creativo ya que puede elaborar sus propios modelos e investigar la conexión que tiene con la geometría no sólo plana, sino también espacial.

La papiroflexia no es solamente divertida sino que es un método valioso en la clase de matemáticas.

Estimula:

HABILIDADES DE COMPORTAMIENTO

Es un ejemplo de "aprendizaje esquemático". Para lograr el éxito, el alumno debe observar cuidadosamente, escuchar atentamente e interpretar unos diagramas con las instrucciones específicas que luego llevará a la práctica.

APRENDIZAJE EN GRUPO

La papiroflexia es muy adecuada para trabajar en el aula con 20 o más alumnos, tiende a eliminar las diferencias de conocimiento y muchos profesores han observado que los alumnos que no se destacan en otras actividades, son generalmente los más rápidos en aprender a hacer figuras geométricas en papel y ayudar a sus compañeros.

DESARROLLO COGNITIVO

A través del doblado, los alumnos utilizan sus manos y siguen un conjunto de pasos en secuencia que producen un resultado visible que es al mismo tiempo llamativo y satisfactorio. Los pasos se deben llevar a cabo en cierto orden para lograr el resultado buscado. Piaget sostenía que " la actividad motora en la forma de movimientos coordinados es vital en el desarrollo del pensamiento intuitivo y en la representación mental del espacio”.

CONTENIDOS MATEMÁTICOS trabajados con la papiroflexia en el aula.

Transformar un trozo de papel en una figura tridimensional, es un ejercicio único en la comprensión espacial. La papiroflexia es también importante en la enseñanza de la simetría, pues muchas veces al doblar, lo que se hace en un lado, se hace igual al otro lado. Esto es, por lo tanto, una regla fundamental del Álgebra que se muestra fuera del marco formal de una lección de Matemática.

Dentro del campo de la geometría, fomenta el uso y comprensión de conceptos geométricos, tales como diagonal, mediana, vértice, bisectriz etc. Además, el doblado de papel, también permite a los alumnos crear y manipular figuras geométricas como cuadrados, rectángulos y triángulos y visualizar cuerpos geométricos.

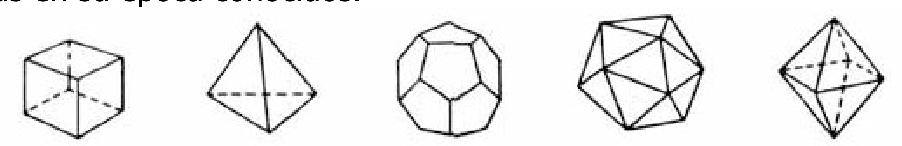
POLIEDROS

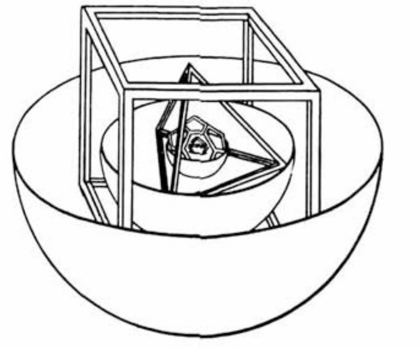
Un poliedro se puede definir como un conjunto conexo de formado por un número finito de polígonos planos que se juntan de una manera razonable. Razonable en el sentido de que cada polígono pertenece exactamente a otro polígono del poliedro y de manera que los polígonos que concurren en cada vértice forman un circuito simple.

Los poliedros más famosos son los llamados platónicos que no son mas que los cinco poliedros regulares que existen: tetraedro, cubo, octaedro, icosaedro y dodecaedro. La demostración de que sólo existen éstos se atribuye a Teeteto (425-379 a.C.) de la escuela de Platón. La demostración más elegante de este resultado se hace mediante la fórmula de Euler.

Platón en su libro Timeo (ap. 55-56) atribuye a cada uno de estos sólidos uno de los 4 elementos, en el pasaje en el que describe la creación del universo. El tetraedro es el fuego, el octaedro, el aire, el cubo, la tierra y el icosaedro las moléculas de agua. Concluye Platón que el Creador utilizó el dodecaedro para formar el universo.

También es interesante la visión de Kepler y su interpretación del sistema solar a partir de los sólidos platónicos a los que identificaba con los 5 planetas en su época conocidos.





SÓLIDOS PLATÓNICOS: PAPIROFLEXIA MODULAR

Los cinco poliedros regulares, cuyas caras son todas de la misma forma y tamaño, pueden parecer simples, pero, en realidad son muy difíciles de plegar utilizando una sola hoja de papel cuadrado. En especial, el dodecaedro regular, que está basado en el pentágono regular, es sumamente complicado. Kazuo Haga, profesor en la universidad de Tsukuba, abordó este problema y realizó una labor excelente para superar las dificultades. el método del profesor Haga es el único que se ha desarrollado hasta la fecha, para plegar los más difíciles, como el icosaedro y el dodecaedro a partir de una única hoja de papel.

Vamos a construir los sólidos platónicos utilizando la papiroflexia modular.

El módulo Sonobè puede considerarse el punto de origen de la papiroflexia modular. Su fundador, Mitsunobu Sonobè lo denominaba "caja de color", aunque hoy día el término empleado no es otro que módulo de Sonobè.

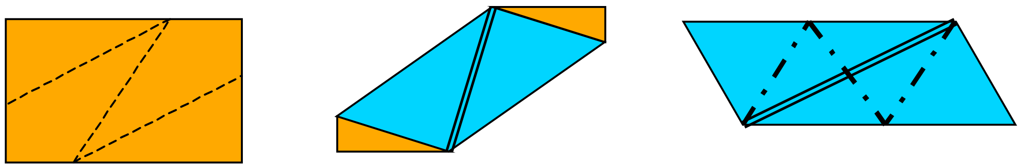
Utilizaremos módulos en la construcción de los sólidos platónicos.

HEXAEDRO O CUBO

Realizamos un cubo modular a partir de las caras. Para ello necesitamos seis módulos de idéntica forma y tamaño. El módulo empleado es una variación del módulo Sonobè tradicional y sigue su mismo esquema de montaje.

TETRAEDRO, OCTAEDRO E ICOSAEDRO.

La búsqueda de un módulo universal para la realización de todos los sólidos platónicos ha sido y sigue siendo un reto al que se enfrentan los matemáticos en el mundo de la papiroflexia. En el taller utilizaremos el mismo módulo para la construcción del tetraedro, del octaedro y del icosaedro. Es importante la utilización de módulos simétricos para el tetraedro y el icosaedro pero no para el octaedro.



DODECAEDRO

Ya hemos indicado que la construcción del dodecaedro con una sola hoja de papel entraña grandes dificultades y también como en el caso del tetraedro, octaedro e icosaedro recurrimos al origami modular para su construcción.

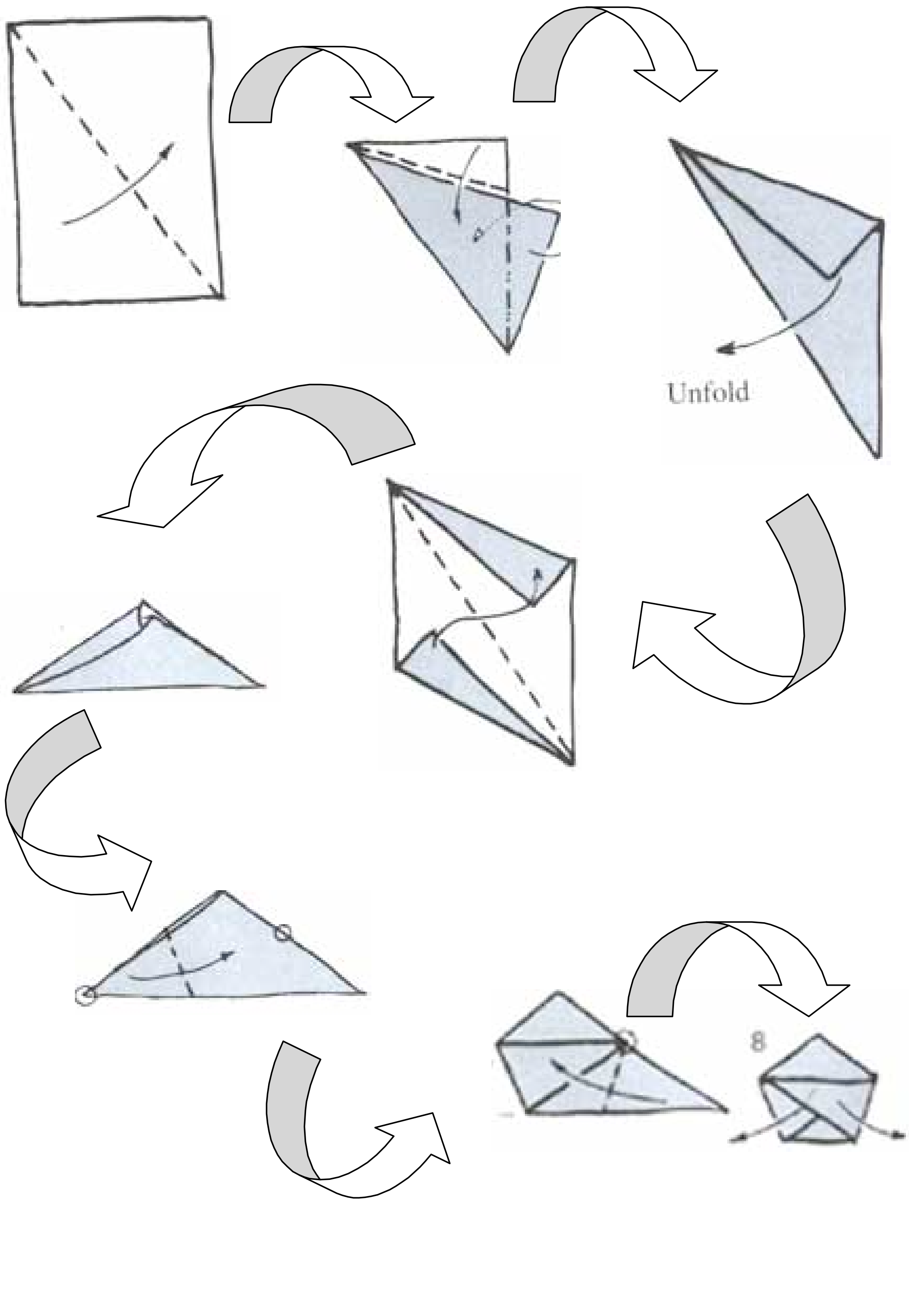
Para construir el dodecaedro es necesario un módulo que permita la aparición de caras pentagonales y que en cada vértice concurran tres aristas, vamos a realizar a continuación un estudio de varios módulos pentagonales que nos permiten otras tantas construcciones distintas del dodecaedro.

EL MÓDULO PENTAGONAL.

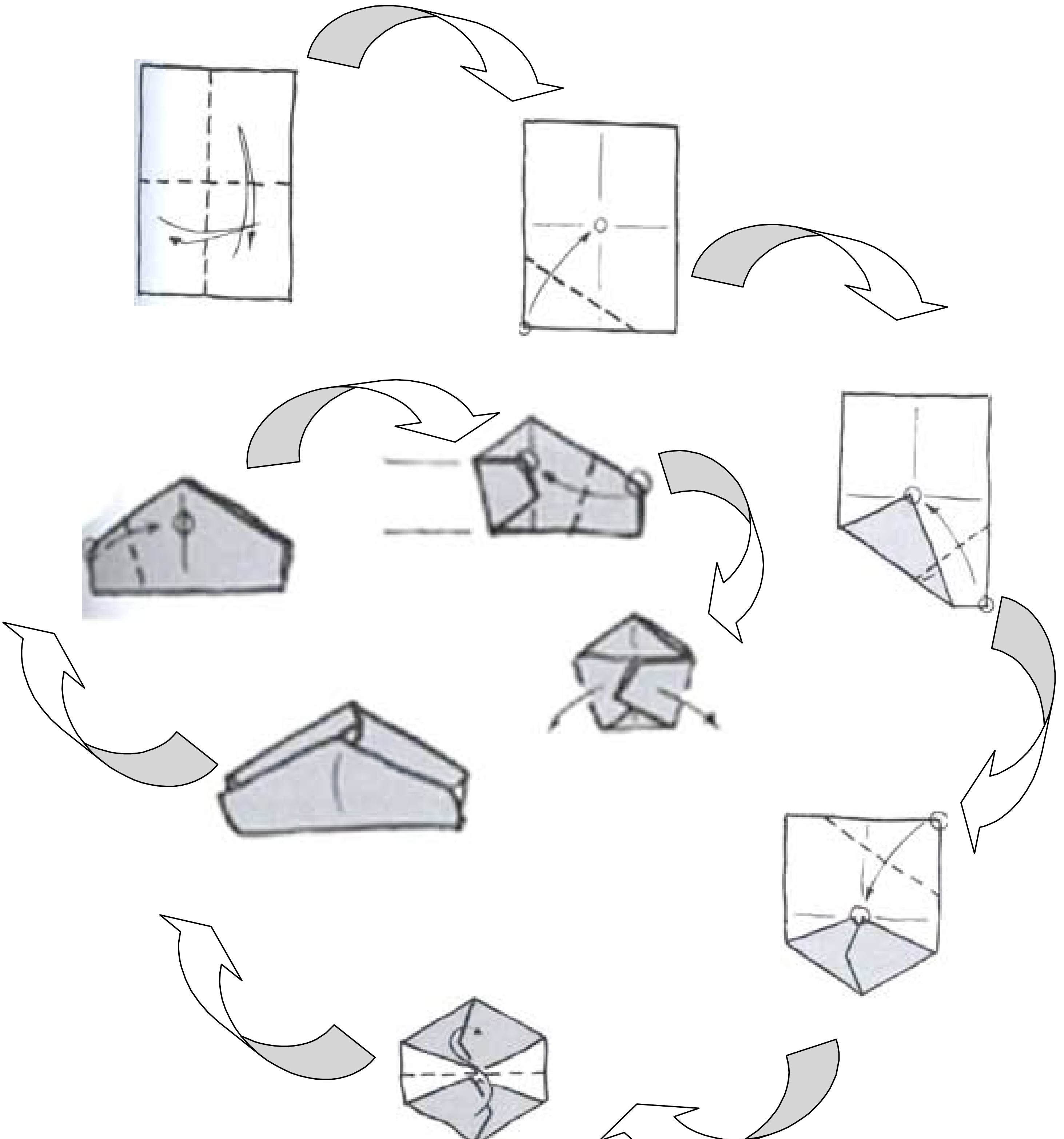
- Diversas maneras de obtener un módulo pentagonal:

Partiendo del papel más próximo a nosotros, es decir un **A4**, veamos cómo en un número mínimo de dobleces podemos obtener un pentágono.

Procedimiento 1 (David Brill):

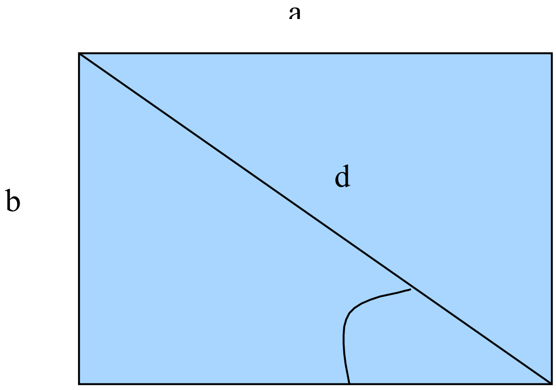


Procedimiento2 (David Brill):

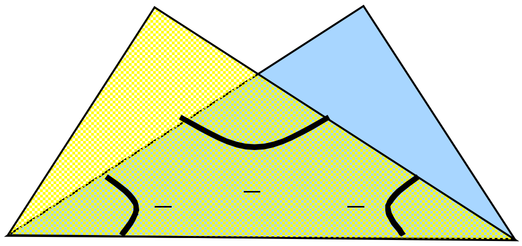


Estudio del ***procedimiento 1*** de David Brill:

- Comprobaremos si los pentágonos así obtenidos son regulares.
- ¿Qué dimensiones tendría que tener un rectángulo de papel para que los pentágonos resultantes sean regulares?



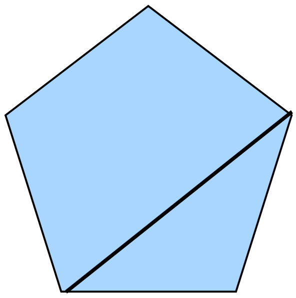
$tg\alpha = \frac{b}{a}$



Queremos que el ángulo ‘ **sea de 108º** , evidentemente ¨ **ha de ser de 36º.**

Por lo tanto, $tg\alpha = tg36^{o} = \frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2+\sqrt{5}}$.(*)

Aplicamos el teorema de los senos en el triángulo ABC.



$$\frac{d}{sen108^{o}} = \frac{l}{sen36^{o}}$$

$$\frac{d}{l} = \frac{sen108^{o}}{sen36^{o}} = \frac{sen72^{o}}{sen36^{o}} = \frac{2sen36^{o}.\cos 36^{o}}{sen36^{o}} = 2.\cos 36^{o}.$$

$$\cos 36^{o} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}.$$

$$tg^{2}36^{o}+1 = \sec^{2} 36^{o}$$

$$tg36^{o} = \sqrt{5-2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2+\sqrt{5}}$$

El ángulo ‘ **,** como ha de ser de 108º, cumple que : $tg\gamma = -3{,}07768...$

Por lo tanto el rectángulo que irremediablemente nos conduciría al pentágono perfecto sería el de proporción $\frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2+\sqrt{5}}$ =0,7265425...

Volvamos a nuestro A4, resulta que nuestro folio tiene la proporción

$\frac{1}{\sqrt{2}}$ = 0,7071067...

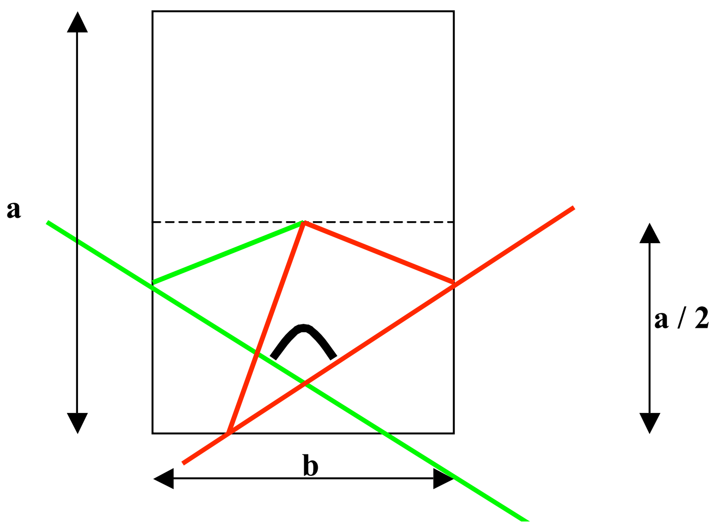
Por lo tanto, hay una diferencia inferior a dos centésimas.

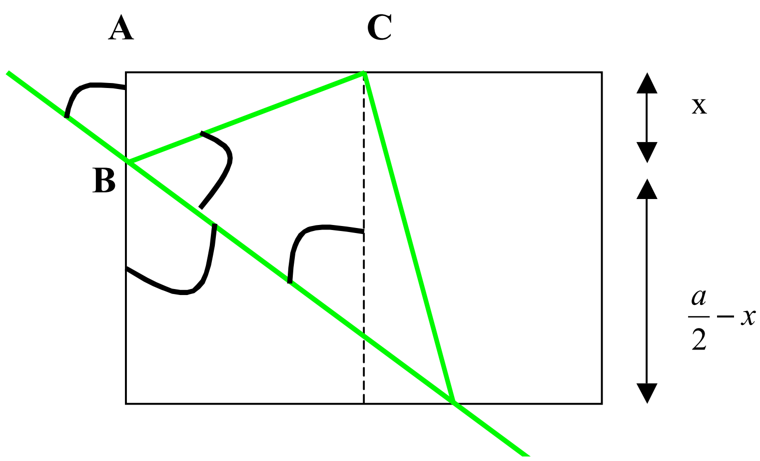
En resumen:

PROPORCIÓN RECTÁNGULO	ÁNGULO	ÁNGULO ‘	Tang ‘
$\frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2+\sqrt{5}}$	36º	108º	$-\frac{\sqrt{5-2\sqrt{5}}}{2-\sqrt{5}}$ =-3,00768...
$\frac{1}{\sqrt{2}}$	35º 15´ 51”	109º 28´	-2.$\sqrt{2}$ =-2,828427...

Estudio del ***procedimiento 2*** de David Brill:

El rectángulo de partida es un A4, es decir, $\frac{b}{a}=\frac{1}{\sqrt{2}}$. Hemos de comprobar que el ángulo obtenido, 2 , es de 108º.





Los cuatro ángulos son iguales,

Observemos el triángulo ABC; aplicando el Teorema de Pitágoras:

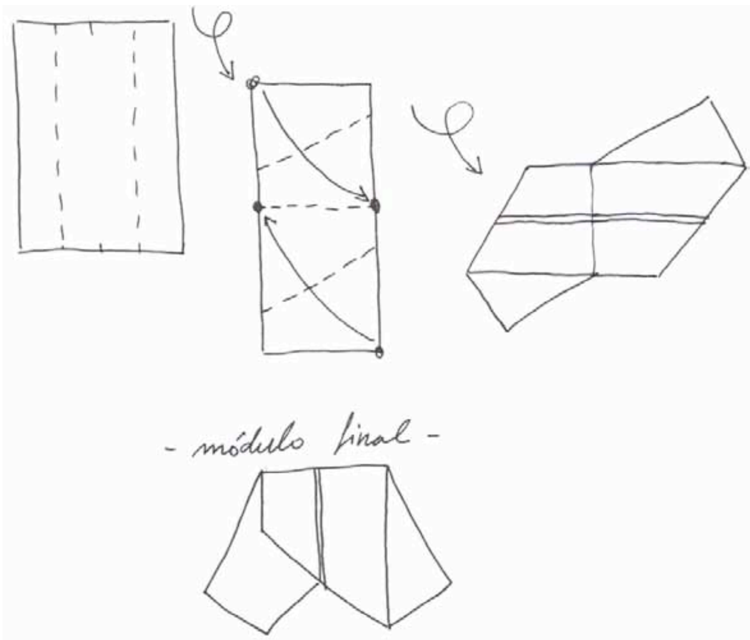
$$\left(\frac{a}{2}-x\right)^2 = x^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2, \qquad x = \frac{a^2-b^2}{4a}.$$

Teniendo en cuenta que a = b$\sqrt{2}$, resulta que: $x = \frac{\sqrt{2}}{8}.b$

Por último:

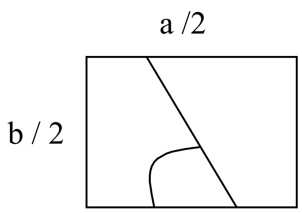
$$tg(180-2\alpha) = -tg2\alpha = -\frac{b/2}{\sqrt{2}.b/8} = -\frac{4}{\sqrt{2}} = -2\sqrt{2}$$

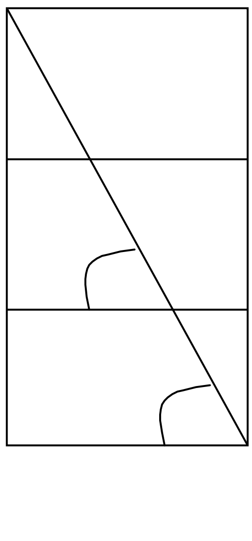
Procedimiento 3 (Silvana Mamino):



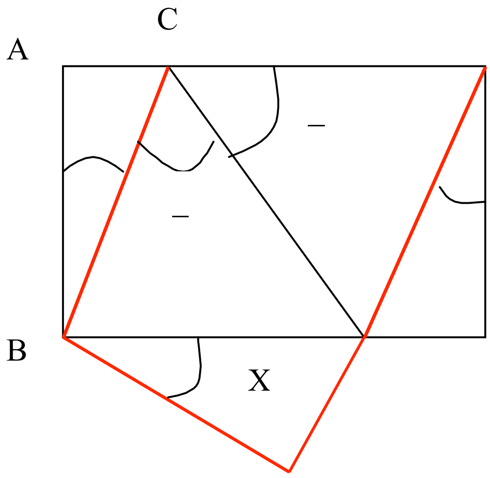
Estudio del ***procedimiento 3*** de Silvana Mamino:

Los rectángulos obtenidos son A6. Veamos que ángulos obtenemos al identificar dos vértices opuestos.





$$tg\alpha = \frac{3.\frac{b}{2}}{\frac{a}{2}} = \frac{3b}{a} = 3.\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad tg\alpha = 2{,}1213203... \Rightarrow \alpha = 64{,}760598...$$



En el triángulo ABC, calculamos el ángulo X:

X + 90 + 180 – 2 = 180,

X = 2 – 90.

tg X = - ctg 2 .

Por lo tanto:

$$-ctg2\alpha = \frac{-1}{tg2\alpha} = \frac{-1}{\frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}} = -\frac{1-tg^2\alpha}{2tg\alpha}$$

Teniendo en cuenta que: $tg\alpha = \frac{3}{\sqrt{2}}$.

Obtenemos que : X = 15º 22´ 31".

Una vez está calculado el ángulo X, no tenemos más que sumarle el ángulo de 90º, obteniendo que el ángulo del módulo pentagonal es de **105 º 22´.**

REFERENCIAS ÚTILES: IMPRESAS Y EN LA RED

BRILL, David. *Brilliant Origami*. Ed. Japan Publications (2001).

CLEMENTE, Eduardo. Papiroflexia. Ed. Plaza y Janés (1999)

DE LA PEÑA HERNÁNDEZ, Jesús. *Matemáticas y Papiroflexia.* Ed. Asociación Española de Papiroflexia (2001)

FUSÈ, Tomoko. *Multidimensional transformations. Unit Origami.* Ed. Japan Publications, Inc. (2000)

KASAHARA, Kunihito; TAKAHAMA, Toshie. *Papiroflexia para Expertos*. Ed. EDAF (2000).

MACCHI, Pietro; SCABURRI, Paola. *Nuevos Objetos de Papiroflexia*. Ed. de Vecchi (1997)

MULATINHO, Paolo. Origami. *Manualidades en papel.* Ed. Parramón (1997)

SIMONS,L. GURKEWITZ, R. ARNSTEIN, B. *Modular Origami Polyhedra*, Dover (1999).

Origami: geometría con papel. Paolo Bascetta

http://www.origami-cdo.it/articoli/artgeo.htm

Origami y construcciones geométricas

http://kahuna.merrimack.edu/~thull/omfiles/geoconst.html

Origami axiomático o las matemáticas del papel doblado

http://cgm.cs.mcgill.ca/~athens/cs507/Projects/2002/ChristianLavoie/maths.html

Página de Jose Ignacio Prieto Royo

http://xtsunxet.usc.es/royoprieto/

Página de la Asociación Española de Papiroflexia.

http://www.pajarita.org

Página de la Asociación inglesa de Papiroflexia.

www.britshorigami.org.uk

GALERÍA DE FOTOGRAFÍAS

SÓLIDOS PLATÓNICOS

- Figuras Realizadas por los ponentes
- Fotografía: José Luis Mosquera

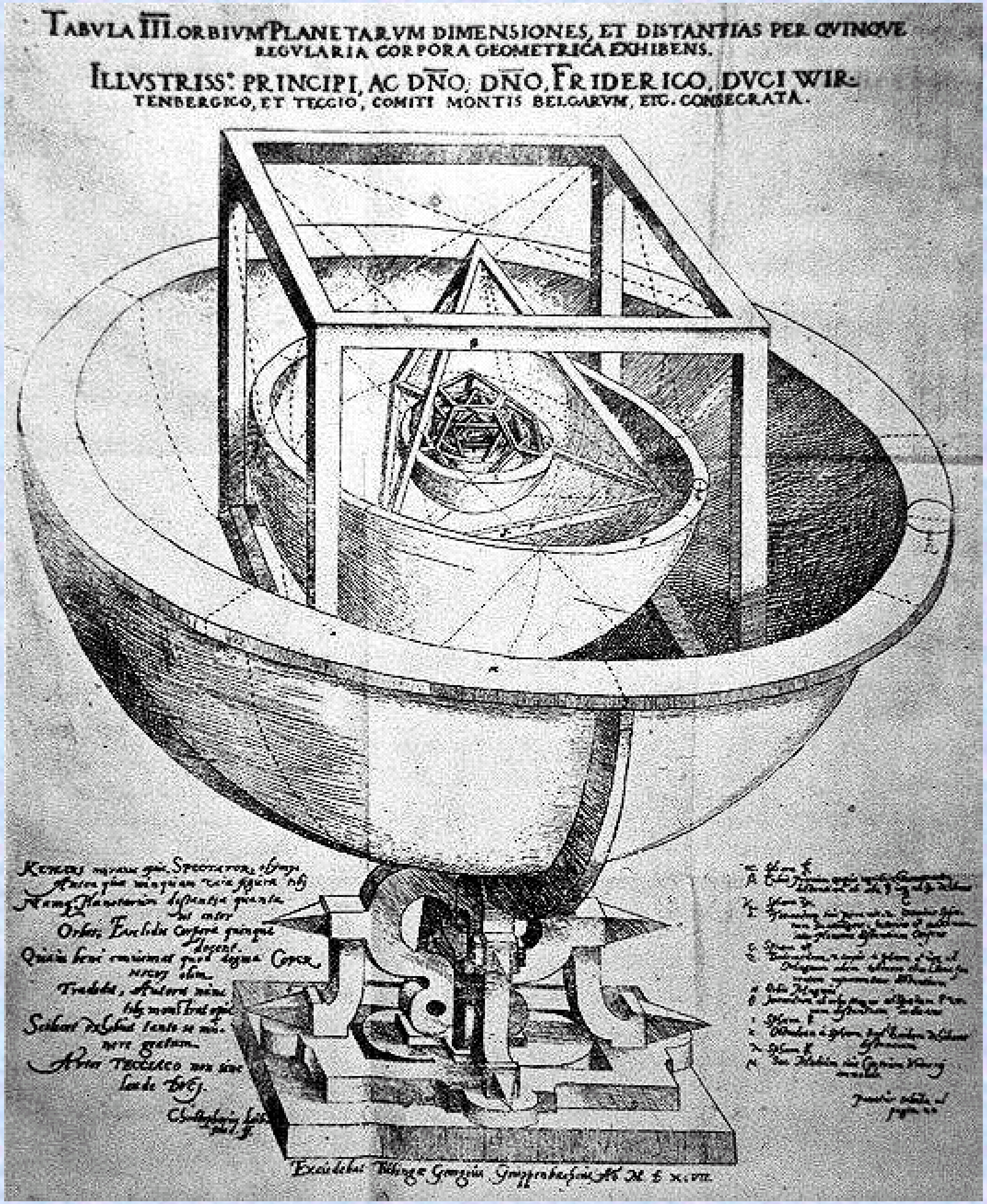
Los sólidos

Platónicos en la

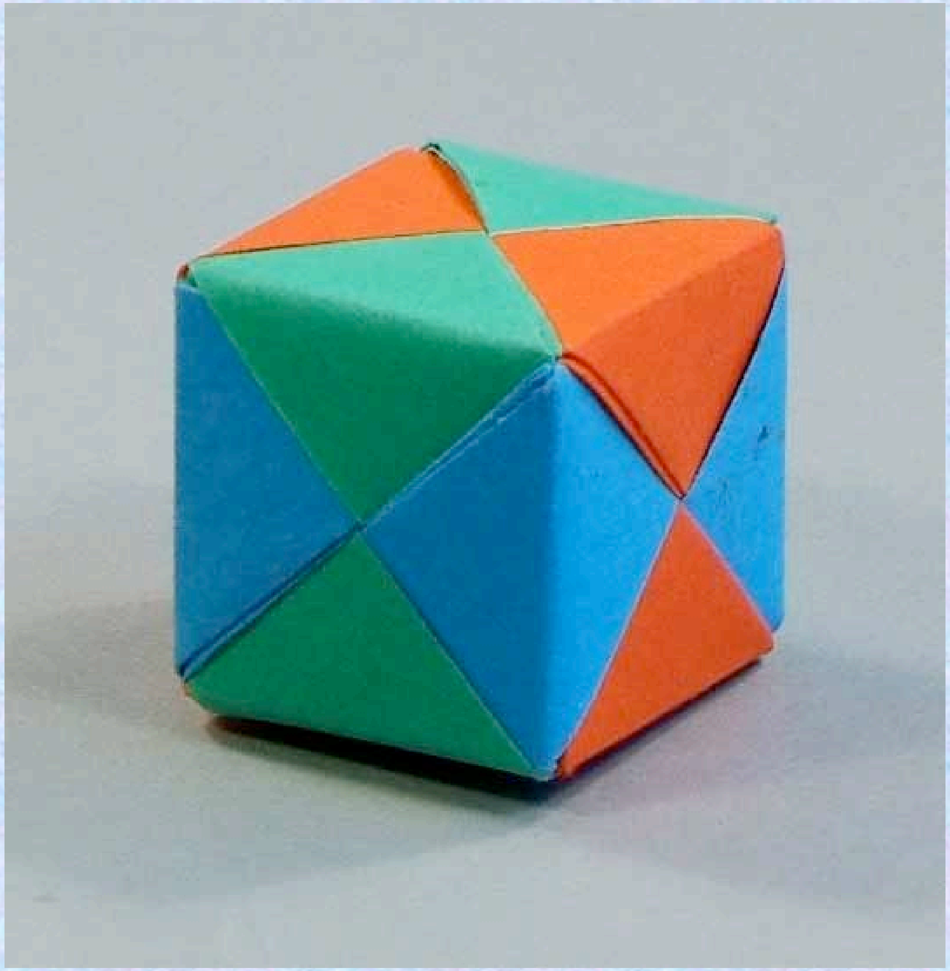
interpretación

de los planetas

de Keppler

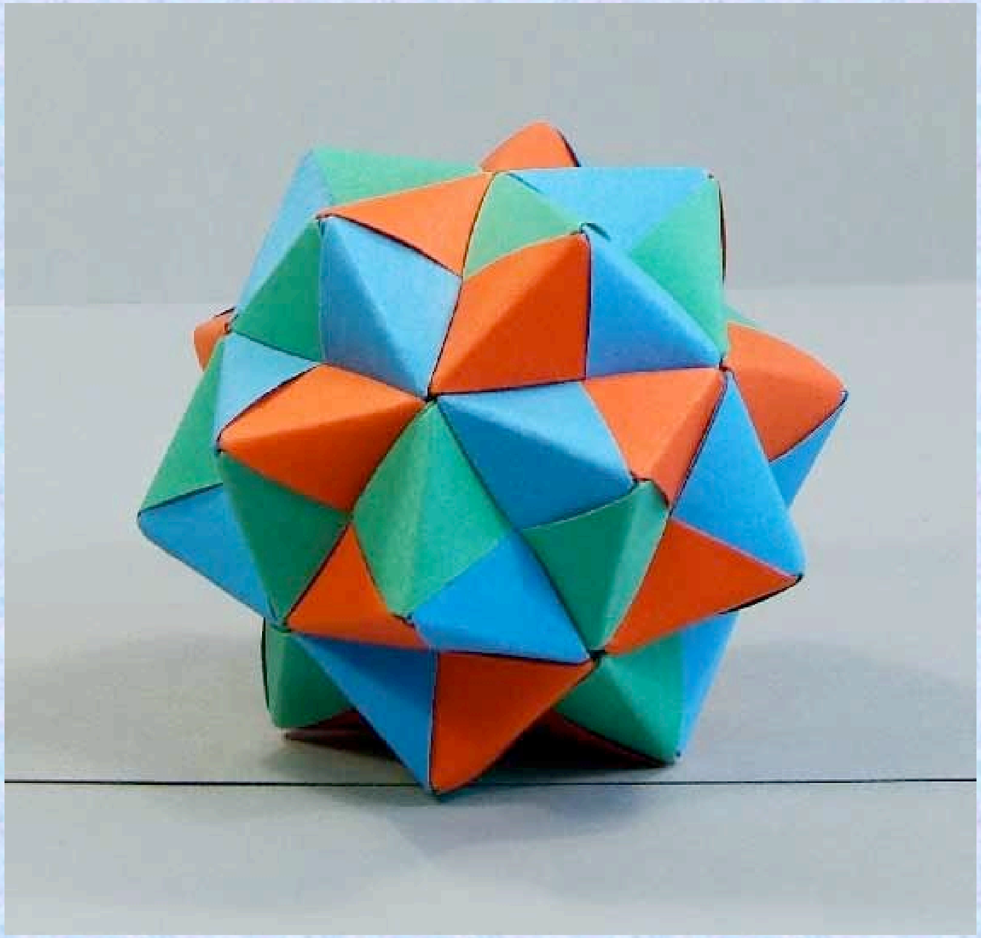


CUBO



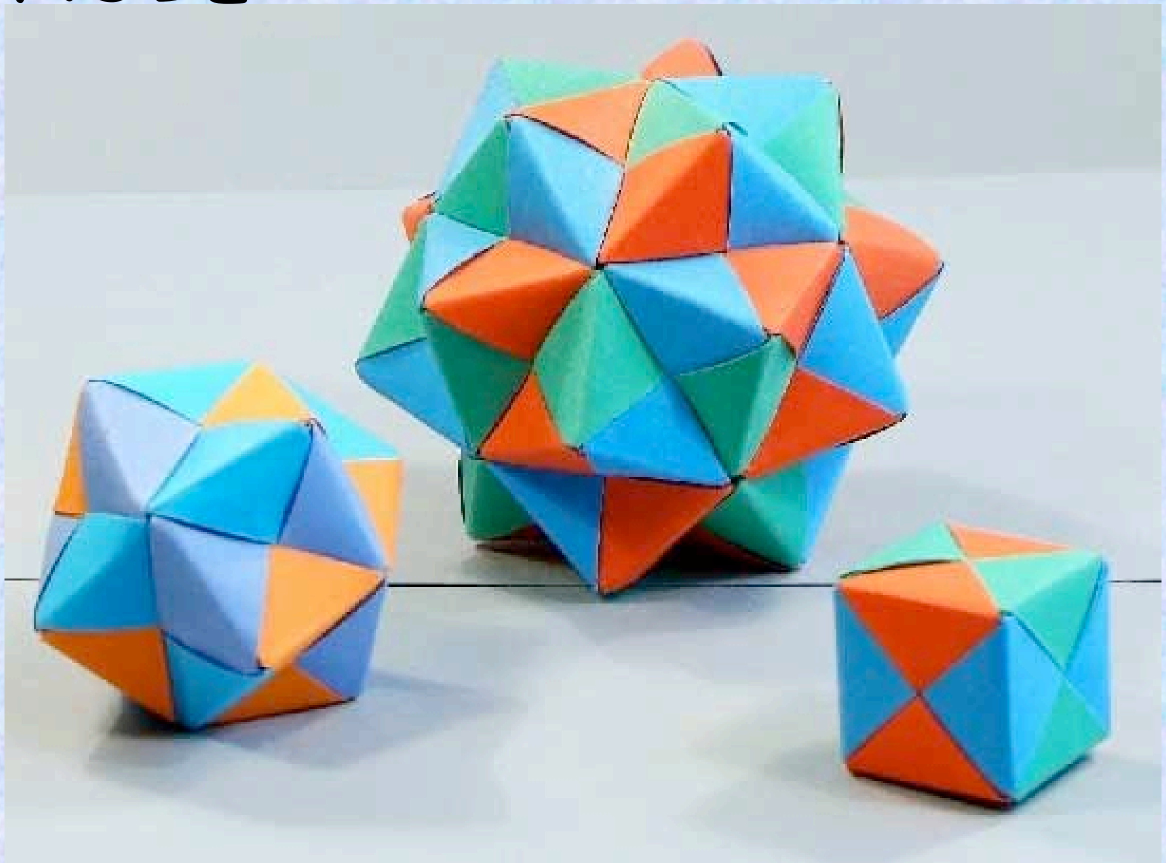
SONOBÈ 6 MÓDULOS

ESTRELLADO



SONOBÈ 30
MÓDULOS

COLECCIÓN SONOBÈ



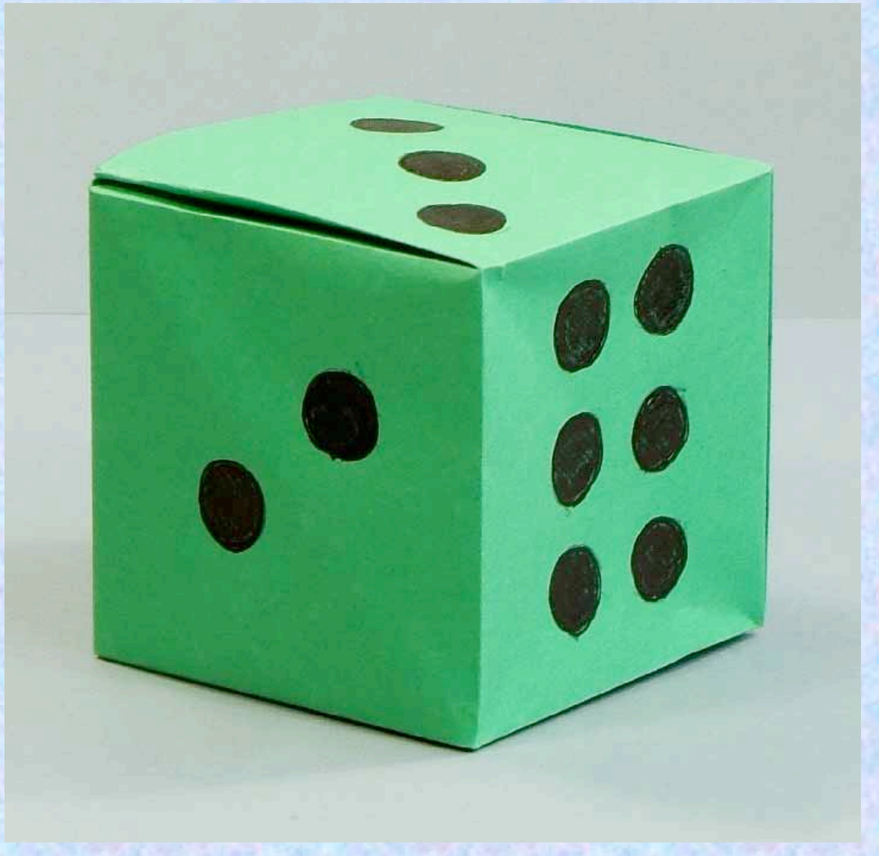
6,12,30 MÓDULOS

CUBO

VARIACIÓN SONOBÈ

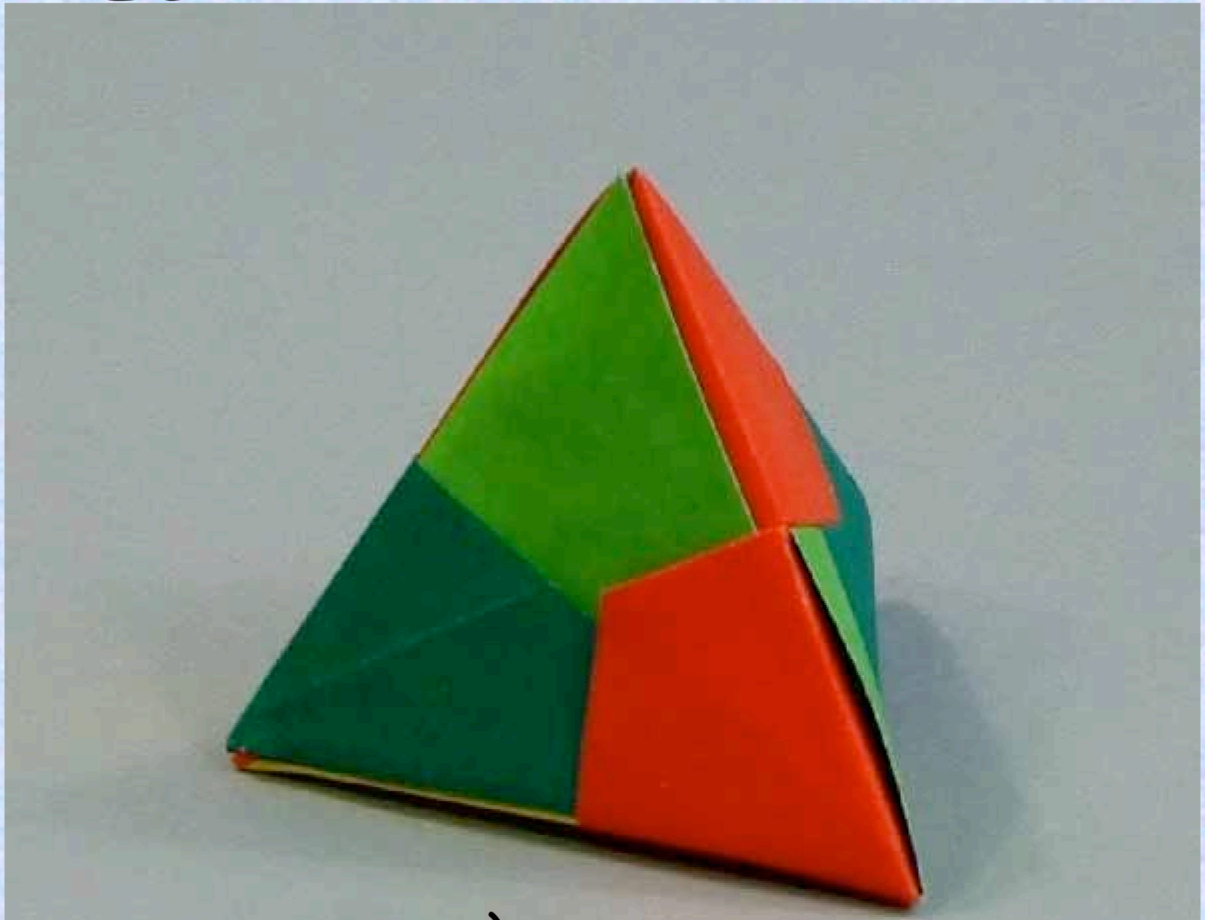
6 MÓDULOS

CUBO TRUCADO



KASAHARA

TETRAEDRO



TOMOKO FUSÈ

2 MÓDULOS

ICOSAEDRO

TOMOKO FUSÈ

10 MÓDULOS

COLECCIÓN

TOMOKO FUSÈ

DODECAEDRO

SILVANA MAMINO
30 MÓDULOS

DODECAEDRO

RAYAS

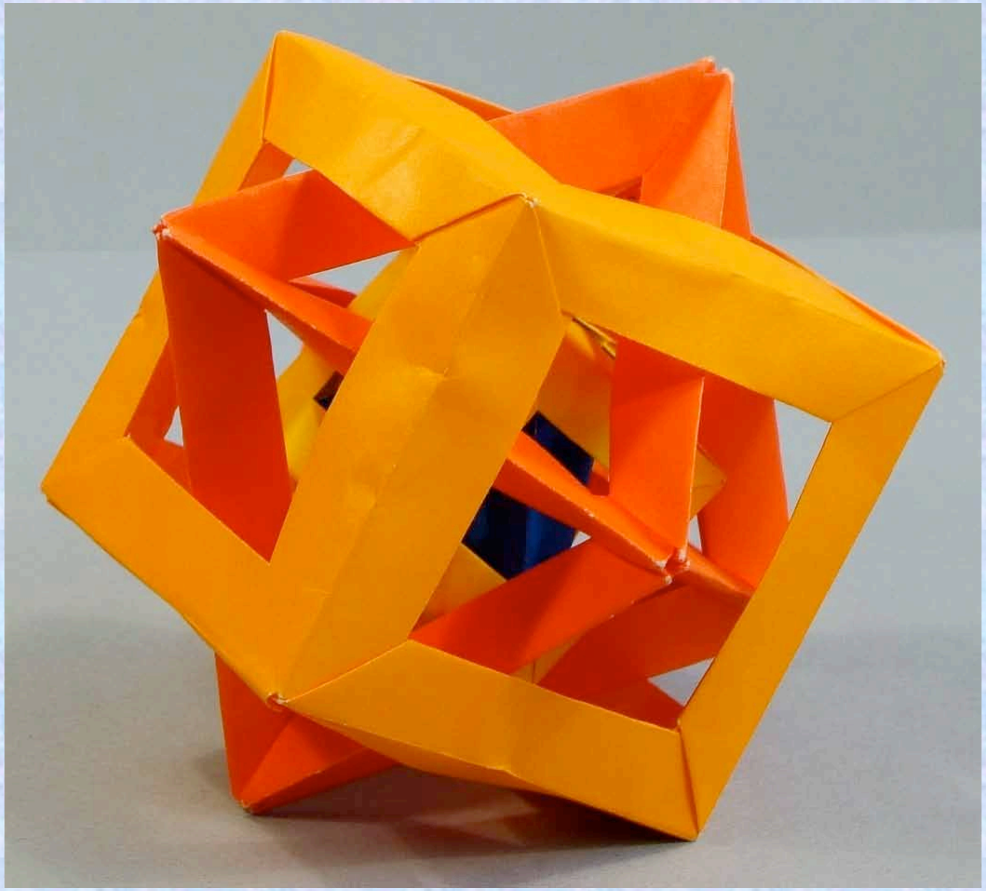
SILVANA MAMINO
30 MÓDULOS

TETRAEDRO

CUBO

OCTAEDRO

CUBO



TOMOKO FUSÈ

Construidos por aristas

En marzo florecen todos os campos......

Refraneiro popular