

Juan A. Garzón Heydt
Departamento de Física de Partículas
Universidade de Santiago de Compostela

Uno, dos..... infinito (O sobre algunos números en la Física)

Introducción

Hace muchos años George Gamow, científico famoso tanto por su calidad (su contribución a la astrofísica puede calificarse de excelente) como por su capacidad divulgativa (fue autor de varios libros de divulgación de gran calidad en una época en la que había una gran laguna en el tema) publicó una obra con el título "Uno, dos, tres... infinito" en la que, de una forma amena, repasaba un numeroso elenco de temas relacionados con los números tanto en las matemáticas como en las ciencias. Dicho libro era una ventana a un mundo donde los temas relacionados con la relatividad, la mecánica cuántica y la cosmología eran tratados con una simplicidad y rigor poco habituales. Todo eso en una época en la que dichos temas no eran tan comunes en el mundo divulgativo como lo son hoy en día.

Esta presentación trata de los grandes números y la física, no por desprecio de las otras ciencias sino porque la física es aquella ciencia a la que le ha correspondido estudiar y comprender los temas extremos del universo: el del microcosmo o el estudio de los componentes fundamentales de todo lo que nos rodea y del macrocosmo o el estudio del universo, su tamaño, origen y evolución. Son campos en los que pensamos que debemos de encontrarnos con números tanto extremadamente pequeños como extremadamente grandes. Es ahí donde nos damos cuenta de la enorme potencia que poseen los sistemas de numeración que utilizamos. Y, sobre todo, percibimos la poca intuición que poseemos para aprehender tanto los números muy grandes como los muy pequeños.

Efectivamente, cualquier persona se hace fácil idea de lo que suponen 100kms o un millón de euros. Le es más difícil intuir lo que son 300 000km (la distancia entre la Tierra y la Luna) y no digamos ?km, la distancia a la que se encuentra la estrella más próxima. En lo que respecta a las distancias pequeñas pocos pueden imaginarse algo más pequeño que una décima de milímetro. Prácticamente solo los que lo conocen saben el tamaño de una célula o de un átomo.

¿Cómo de grande es un número como 10^{100} o 9 elevado a 9^9 ? Hay algo que para ser contado requiera de números tan grandes? O ¿cómo de pequeños son sus respectivos inversos? ¿Cómo de pequeño es el átomo o

como de grande es el universo? O, ¿cuántos átomos puede haber en el universo? Todos ellos son números que se nos escapan.

Aún así hemos avanzado mucho en un camino apasionante que ha supuesto muchos años. G. Gamow cita en su libro un significativo cuento referido a unos aristócratas húngaros. Su historia es así:

Dos aristócratas húngaros decidieron jugar a ver quien era capaz de decir el número más alto.

- "Bien", dijo uno, "dí tu primero".

Después de pensarlo mucho, el aristócrata contestó

- "El tres"

Entonces le tocó el turno al primero. Después de pensarlo mucho rato al fin dijo

- "Tú has ganado"

La moralaja del cuento es que no siempre ha sido tan fácil como hasta ahora expresar números muy grandes ni siquiera el hombre ha tenido gran necesidad de hacerlo. De hecho hoy en día algunas tribus primitivas apenas tienen nombres para referirse a números más allá del tres y se limitan a decir "muchos".

Llegar al sistema de numeración que actualmente utilizamos ha sido una larga aventura. Desde las primeras notaciones, basadas posiblemente en pequeños trazos rectos verticales u horizontales (a cualquiera le es fácil percibir que en la representación que utilizamos el uno es una barra vertical, el dos y el tres constan respectivamente de 2 y 3 barras horizontales, el cuatro es un cuadrado deformado, el cinco se puede entender como un cuadrado cruzado por una diagonal dibujado muy deprisa y así sucesivamente..). Un paso posterior fue utilizar un mismo símbolo para diferentes cantidades dependiendo del contexto (así un babilonia tenían el mismo símbolo para el 1, el 60 y sus potencias) hasta llegar a la notación posicional con base 10 que conocemos hoy en día, y que solo es posible si se dispone de un símbolo para el cero. Así, por ejemplo, el número 309 se refiere en base 10 a 3 centenas, ninguna decena y 9 unidades. Utilizando potencias, el mismo número se puede escribir como $3 \cdot 10^2 + 9$.

Los grandes números

La notación de potencias permite escribir grandes cantidades de una forma cómoda y compacta. De esa forma para escribir, digamos cien mil millones de millones (cien mil billones), no necesitamos escribir un 1 seguido de 17 ceros, sino basta escribir 10^{17} . Ahora bien, ¿tienen algún sentido los números tan grandes? Necesitamos esos números para algo que no sea tan absurdo como expresar la distancia de la Tierra al Sol en micras (milésimas de milímetro) ?

Es bien conocida la historia que cuenta Gamow sobre el tablero de ajedrez. El rey Sirham, de la India, quería premiar a su gran visir Sisa Ben Dahir por haber inventado el juego del ajedrez.

-“Majestad”, dijo, “dadme un grano de trigo para ponerlo en la primera casilla, dos para la segunda, cuatro para la tercera y así, oh rey, duplicando el número para cada casilla, dadme granos suficientes para cubrir todo el tablero”
- “No pides mucho, mi fiel servidor” contestó el rey y ordenó que se le trajese un saco de trigo como pago.

Cuando comenzó el recuento, la bolsa se acabó antes de llegar a la casilla número 20, Trajeron mas sacos pero el numero de granos necesario aumentaba rápidamente y todo el trigo que producía el reino apenas era suficiente para cubrir la mitad del tablero! Si hacemos el cálculo veremos que el número de granos necesario sería:

$$N = 1+2+2^2+2^3+\dots+2^{63} = 18_3446744_2073709_1551615$$

que es aproximadamente 200 veces la producción mundial actual de trigo durante un año.

Algunos grandes números en la Física

Existen en Física algunas magnitudes que, hasta donde sabemos, son constantes universales: toman el mismo valor aquí y en otros puntos del universo. Entre ellas están la velocidad de la luz, la carga eléctrica del electron, la constante de Planck y el número de Avogadro. Todas dichas magnitudes son o muy grandes o muy pequeñas para nuestra escala cotidiana y sus primeras medidas fueron en su momento importantes retos. Veamos algunos de esos casos:

El número de Avogadro: Representa el número de átomos o moléculas de una cierta sustancia en un mol-gramo de dicha sustancia (1g de H, 4g He, 56g deFe.). Su inverso es, pues, la masa en gramos de un átomo o molécula de dicha sustancia). Su valor actual es:

$$N_A = 6.022142 \cdot 10^{23}$$

A. Avogadro propuso en 1811 que los mismos volúmenes de gases diferentes a la misma temperatura, contienen un número igual de moléculas. Mas tarde S. Cannizzaro usó la hipótesis de Avogadro para desarrollar un grupo de pesos atómicos para los elementos conocidos, comparando las masas de igual volumen de gas. Sobre la base de este trabajo, un profesor de secundaria austríaco llamado Josef Loschmidt, calculó el tamaño de una molécula en cierto volumen de aire, en 1865, y dió una estimación para el número de moléculas en un volumen dado de aire.

En relación con dicho número es significativo el siguiente ejemplo: Si vertemos en el mar el agua contenida en un vaso y dejamos que se mezcle completamente, cuando llenemos de nuevo el vaso habremos recogido unas 100 moléculas del agua que vertimos inicialmente.

La carga eléctrica fundamental: Es la carga del electron y toda carga eléctrica es un múltiplo entero suyo. Su valor actual es

$$Q_e = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ Coulombs}$$

.Se puede determinar de forma indirecta mediante la electrolisis. En esta es posible medir que son necesarios 96500 Coulombs para liberar un mol de cualquier ión de carga unidad (por ejemplo, los iones cloro- y sodio+ en el caso de una disolución de sal común). Si en un mol hay N_A iones, la carga resultante es aproximadamente la indicada arriba.

Sin embargo, la primera medida directa la hizo R. Millikan en un experimento que ha quedado como uno de los mas bonitos de la historia. Para su medida Millikan cargo eléctricamente gotitas de aceite producidas mediante un pulverizador radiándolas con rayos X. Posteriormente las introdujo en un campo eléctrico y midió su velocidad de caída para diversos valores del campo. A partir de los resultados pudo medir la carga eléctrica de cada gotita. Observó que todas las gotitas tomaban valores enteros de la carga fundamental, obteniendo un valor muy próximo al actual. Para realizar el experimento Millikan tuvo que desarrollar diversas técnicas nuevas en un buen ejemplo de rigor científico.

La velocidad de la luz: Las primeras medidas se realizaron con instrumentos muy rudimentarios (faroles, obturadores y telescopios) y mostraron que su velocidad era muy grande, si no infinita.

O. Roemer fue el primero en probar que su valor era finito en 1676. Para ello midió las variaciones en la duración de la ocultación de Io, una de las lunas de Júpiter, según que la Tierra se estuviese acercando a Júpiter o alejándose 6 meses después. Ambas medidas diferían en unos 22min debidos al diferente recorrido de la luz según que la Tierra se hubiese acercado o se hubiese alejado durante la ocultación. Obtuvo un valor relativamente pequeño ($v=2.1 \cdot 10^8$ m/s) debido sobre todo a un mal conocimiento del radio de la órbita de la Tierra alrededor del Sol.

Una medida mas precisa fue realizada por J. Bradley en 1728. Bradley fue el descubridor del efecto de la aberración en las estrellas, debido a la velocidad finita de la luz y de la tierra en su órbita alrededor del Sol (La aberración solar es el mismo efecto por el cual, cuando llueve, vemos incidir las gotas de agua con un mayor ángulo según mas corremos. Y corramos hacia donde corramos, la lluvia siempre cae en sentido contrario a nuestra carrera). Debido a su movimiento, la Tierra siempre va al encuentro de la luz de las estrellas. Esto falsea ligeramente la posición que se mide de una estrella que aparece ligeramente desplazada. Así, al cabo de un año, una estrella cuya posición se ha medido varias veces no aparece siempre en el mismo punto sino que ha descrito un recorrido aparente de forma elíptica en la esfera celeste. El tamaño de dichas elipses es independiente de la distancia e las estrellas y depende de la velocidades de la luz y de la Tierra. Conocida ésta,

es posible deducir aquella. Bradley obtuvo un valor de $v=3.1 \cdot 10^8$ m/s, mucho mas próximo al valor conocido.

Basándose en experimentos previos de Fizeau y Foucault con espejos rotatorios, en 1878 A. Michelson obtuvo medidas de gran precisión con hasta 6 cifras significativas. Las medidas más recientes fueron realizadas en un experimento dirigido respectivamente por P.T. Woods (en 1976) y por J.P. Monchalin (en 1977) mediante radiación láser. Llegaron a determinar la velocidad hasta con 10 cifras significativas. A partir de entonces, la medida de la velocidad de la luz quedaba limitada por la propia precisión con la que se conocía el metro patrón. Esto ha obligado a revisar por primera vez desde su origen la definición de metro patrón.

Hasta recientemente se definía el metro como la distancia entre dos líneas extremadamente finas grabadas sobre una barra de platino e iridio con forma de X y que se guarda en la Oficina Internacional de Pesos y Medidas de París. A partir de 1983 se define como "la distancia recorrida por la luz en el vacío en $1/299,792,458$ segundos". Es decir, desde ese momento la velocidad de la luz es una constante y cualquier nueva medida más precisa de la misma llevará a un cambio en el concepto de metro.

Una idea más intuitiva de una cantidad tan grande la da el hecho de que la luz tarda aproximadamente 1s en recorrer la distancia entre la Tierra y la Luna, unos 8 min en llegar del Sol hasta nosotros y aproximadamente 5 horas y media en salir del sistema solar. La luz de la estrella más cercana, alfa-Centauro, tarda en llegar a nosotros 4.35 años! A la distancia recorrida por la luz en un año se la denomina año-luz (a.l). En esta unidad, el radio de nuestra galaxia es de unos 50000 a.l. La galaxia de Andrómeda, la más cercana de las grandes galaxias, está a unos 2 millones de a.l y las galaxias más lejanas observadas hasta el momento pueden estar a unos 10 mil millones a.l.

Sin embargo, las dudas respecto a la luz no acababan en conocer su valor. La luz es una onda electromagnética (igual que las ondas de radio, los rayos X..) y quedaba la duda sobre qué es lo que la sustenta en el espacio. J. Maxwell propuso la existencia del éter como un medio físico que transporta las ondas electromagnéticas y da cierto sustento al concepto del campo. Pero el problema del éter estaba relacionado con otro aspecto de la teoría de Maxwell: la aparente necesidad de un espacio absoluto.

A. Michelson y E. Morley se propusieron medir la velocidad de la Tierra respecto al éter comparando las velocidades de la luz cuando se mueve en la misma dirección que la Tierra y cuando se mueve en sentido transversal. El resultado fue sorprendente pues no se observó ninguna diferencia entre las dos medidas, indicando que la Tierra no se mueve respecto al hipotético éter. ¡Nunca un fracaso sería tan importante!

La nueva Física

En el año 1900, W. Thomson (Lord Kelvin) resumió el estado de la Física en aquel momento en una frase para la posteridad:

“Quedan dos nubes que oscurecen la belleza y la claridad de la teoría en el horizonte de la Física del siglo 20:

- Los fallos de cualquier teoría por explicar el espectro de radiación del cuerpo negro contradicen las predicciones de la termodinámica.
- Los resultados inexplicables del experimento de Michelson y Morley, que contradicen la relatividad de Newton.

Las dos nubes de lord Kelvin ocultaban dos de las grandes revoluciones científicas del siglo XX, la Teoría de la Relatividad y la Mecánica Cuántica

LA TEORIA DE LA RELATIVIDAD:

El experimento de Michelson y Morley llevó a A. Einstein rechazar la idea del éter y proponer la constancia de la velocidad de la luz en cualquier sistema de referencia como una de las bases de la Teoría de la Relatividad. Hoy en día la teoría está plenamente comprobada y aceptada. Su validez se percibe solo para velocidades próximas a las de la luz (en el laboratorio y a grandes escalas en el Universo).

La constancia de la velocidad de la luz en dos sistemas de referencia que se mueven uno respecto al otro lleva a resultados sorprendentes y paradójicos. Uno de ellos es la revisión del concepto de simultaneidad. Es muy fácil verlo. Supongamos un reloj que se basase en dos espejos planos entre los cuales se refleja continuamente un estrecho pulso de luz. El pulso va sucesivamente de un espejo al otro marcando una cadencia constante dada por el tiempo que tarda el pulso, cuya velocidad es constante, en recorrer la distancia, también constante, entre los espejos.

Pensemos en dicho reloj colocado de forma que la luz realiza un trayecto siempre vertical hacia arriba y hacia abajo. Y pensemos en un observador que ve el reloj desde un sistema de referencia que se mueve horizontalmente a gran velocidad respecto del primero. Este observador cuando mira el reloj ve que el pulso de luz realiza trayectos inclinados pues desde que sale de un espejo y llega al otro, el reloj a realizado un cierto trayecto horizontal. Ve, por consiguiente, que la luz realiza trayectos ligeramente mayores que la distancia entre espejos y, dado que la velocidad de la luz es constante, observa que dicho reloj marca intervalos de tiempo mayores que otro reloj similar que él pudiera tener. Es decir, ve el tiempo transcurrir de forma mas lenta en el otro sistema de referencia que en el suyo propio.

Mas paradójico parece que otro observador que se moviese con el primer reloj observase que para él el reloj que se retrasa es el que tiene el primer observdor. Son hechos que chocan con nuestra intuición debido a que

se hacen despreciables para las velocidades típicas de los fenómenos que observamos alrededor.

Una prueba de la dilatación del tiempo está en los rayos cósmicos que inciden sobre la superficie terrestre y que nos atraviesan continuamente a razón de unos 200 por metro cuadrado y por segundo. La mayoría de ellos son una particular fundamental llamada muón. Se forman en las capas altas de la atmósfera y su vida del orden de dos millonésimas de segundo. Aún moviéndose a una velocidad próxima a la de la luz apenas podrían recorrer una centena de metros. Sin embargo el efecto relativista de la dilatación del tiempo nos permite apreciar como recorren decenas de kilómetros (vistos desde nuestro sistema de referencia externo a ellas).

LA MECANICA CUANTICA:

La explicación por parte de M. Planck del espectro del cuerpo negro a finales de 1900 fué el primer paso de lo que llegaría a ser la Mecánica Cuántica.

Qué es un cuerpo negro y ¿dónde radica su interés? Un cuerpo negro es una abstracción ideal y corresponde a un cuerpo que absorbe toda la radiación que le llega. El cuerpo negro perfecto no existe pero existen buenas aproximaciones para estudiarlo en el laboratorio (la forma habitual es una esfera metálica de gran tamaño con una pequeña abertura por la que puede entrar la radiación pero a la que tras muchas reflexiones le cuesta encontrar la abertura de salida),. Una consecuencia de aquella definición es que un cuerpo negro también emite y su espectro emisión (es decir en qué frecuencias y longitudes onda emite y con qué intensidad) depende únicamente de su temperatura. En general, valga la paradoja, las estrellas se consideran buenos cuerpos negros y las propiedades conocidas de éstos se utilizan para el estudio de aquellas.

Y ¿cuál es su interés? Basicamente las dificultades en explicarlo acrecentaron el mismo, aunque había una razón mas profunda. Un cuerpo negro emite radiación electromagnética cuando se calienta y ésta es independiente de su composición. Ahora bien, la temperatura era sabido ya en siglo XIX que tiene un origen "mecánico" o "cinético" y que es una medida del movimiento de la partículas (átomos o moléculas) que constituyen el medio. Sin embargo, la radiación tiene una naturaleza electromagnética. El cuerpo negro constituía pues el laboratorio ideal para entender como ambos mundos conviven.

Después de muchos intentos de numerosos investigadores por explicar el espectro del cuerpo negro en base a argumentos de la termodinámica clásica, M. Planck hizo una hipótesis que a él mismo le llevaría muchos años asumir plenamente: La energía de los osciladores que forman el cuerpo negro (suponía al cuerpo negro como un conjunto muy grande de osciladores armónicos que "convivían" en su interior en equilibrio con la radiación) no podían tener cualquier energía sino solamente aquellas que eran un múltiplo de su frecuencia de vibración (al igual que un resorte o un péndulo, cada oscilador tenía una frecuencia característica). A la constante de

proporcionalidad entre la energía y la frecuencia se la denomina constante de acción de Planck. Se la denomina habitualmente por el símbolo h .

Se puede entender más fácilmente el sentido de dicha constante a partir del concepto de acción. En Física, la acción es una magnitud que tiene dimensiones de energía por tiempo o de cantidad de movimiento por espacio (en notación científica decimos que $[h]=ML^2T^{-2}$). En todo sistema físico, cada vez que hay un cambio en él hay un cambio de acción. El mínimo cambio de acción posible está dado por la constante de Planck que vale:

$$h = 6.62 \cdot 10^{-34} \text{ Joules/s}$$

Tras la hipótesis de Planck el mundo dejaba de ser continuo y pasaba a ser un tanto "granulado" y los cambios de energía, de acción o el movimiento en general tienen lugar "a saltos".

¿Por qué no percibimos ese comportamiento discontinuo en nuestra vida diaria? Veámoslo con un sencillo ejemplo: Supongamos el volante de un reloj mecánico que tuviese una masa de 0.1g, un radio de 3mm y una velocidad angular de 1radian/s. Podemos estudiar la acción típica de dicho volante estudiando su momento angular, que es una magnitud física que tiene las dimensiones de acción. Su valor para dicho volante es, aproximadamente, ¡ $10^{24} h$! (Recordemos el sentido que tenía un número tan grande cuando vimos la constante de Avogadro). A dicha escala, ganar o perder cantidades del orden de h no tienen ningún efecto apreciable.

Los efectos cuánticos son observables directamente a escalas atómicas o moleculares escalas en los que los cambios típicos son del orden de la constante de Planck

El número mas grande

EL UNIVERSO

En el universo la masa observada se agrupa principalmente en estrellas, éstas se agrupan en galaxias, éstas a su vez en cúmulos de galaxias y estos, hasta donde sabemos por el momento, en supercúmulos de galaxias. Las estimaciones están sujetas a un gran error pero podemos asumir que nuestra galaxia, la vía lacteal, consta de unos cien mil millones de estrellas de masa media similar a la del Sol. Respecto al número de galaxias en el Universo, algunas estimaciones apuntan hacia otras cien mil millones.

El espectro de las galaxias mas lejanas nos permiten estimar su distancia. En ellas se observa que sus espectros están enrojecidos y que las líneas espectrales que se observan en el laboratorio para algunos elementos, en aquellos, se encuentran desplazadas hacia la zona roja del espectro. Es una consecuencia del efecto Doppler que indica que se alejan de nosotros.

El estudio sistemático de las galaxias muestra que su velocidad de alejamiento es proporcional a su distancia a nosotros. Rebobinando la película hacia atrás, de las observaciones actuales se deduce que, en algún momento, todas las galaxias estuvieron en el mismo punto. Eso ocurrió hace unos 10^{10} años, momento en el que se debió de producir una gran explosión (el big-bang) que dió lugar a la expansión actualmente observada. Como consecuencia estamos en un universo finito cerrado sobre sí mismo en una cuarta dimensión.

Un problema candente en la actualidad es el que se refiere a la materia y a la energía oscura. Las observaciones más detalladas realizadas recientemente muestran una cierta aceleración de las galaxias más lejanas como repelidas por una energía cuyo origen se desconoce. Tampoco la materia observada es capaz de explicar el comportamiento atractivo de las galaxias y desde hace tiempo se sospecha que existe una llamada "materia oscura" (también de naturaleza desconocida) y que puede suponer un factor 10 veces la materia ordinaria.

EL ATOMO

La estructura atómica es bien conocida desde principios del siglo XX. El experimento de Rutherford mostró como los átomos están formados por un núcleo que tiene la mayor parte de la masa del átomo y una envoltura con electrones. Por otro lado, experimentos de difracción en cristales muestran que la distancia interatómica en un sólido común es de unos 10^{-10} m. El tamaño de un núcleo atómico es sensiblemente menor, unos 10^{-15} m.

EL NUMERO MAS GRANDE

Todos los datos proporcionados anteriormente permiten hacernos una pregunta acerca de lo que puede ser el número más grande. ¿Cuántos átomos hay en el Universo? Este número es posible estimarlo a partir de la masa observada y suponer la materia oscura formada también por átomos. Se trata sobre todo de un ejercicio mental para saber de qué orden de magnitud estamos hablando de 10^{100} , de 10^{1000} ? (Un dato necesario, dado que se ha utilizado el Sol como estrella media de referencia es que su masa es de $2 \cdot 10^{30}$ kg. Se puede tomar como átomo unidad el átomo de hidrógeno. Su masa se puede deducir a partir del número de Avogadro).

Se puede encontrar una cota superior al número de átomos, pensando en un número aún más grande. El volumen del universo en unidades atómicas o número de átomos que cabrían en el universo si este fuese macizo. El problema radica en ¿cuál es la forma del universo? Por simplificar se puede tomar una esfera de 10^{10} a.l. de radio, aunque nada más lejos de la realidad. Como se ha dicho más arriba el universo se cierra sobre sí mismo y no tiene fronteras en el espacio de tres dimensiones. Si siguiésemos una línea recta volveríamos al punto de partida, lo mismo que ocurre sobre la superficie terrestre.