MATEMÁTICA DEL ORDEN

Lección inaugural del curso académico 2002/2003
Pronunciada por el DR. D. ESTEBAN INDURAIN ERASO
Profesor Tutor de Ciencias Matemáticas

Con la venia.

Excelentísimo Sr. Presidente del Gobierno de Navarra.
Excelentísimas a Ilustrísimas autoridades.
Queridos compañeros y alumnos.
Amigos.

Es todo un honor para mí hacerme cargo de la lección magistral que inagurará el Curso Académico 2002-2003 en este Centro Asociado de la Universidad Nacional de Educación a Distancia en Pamplona.

El tema que he escogido para mi exposición ("Matemática del Orden") corresponde a una parcela de mi actual actividad investigadora, en Matemática Pura y Aplicada. No pretendo aquí, sin embargo, hablarles a ustedes de aburridos y quizá incomprensibles teoremas fruto de horas y horas de reflexión, sino presentar en forma sencilla alguno de los problemas que esta teoría trata de abordar, así como sus enormes posibilidades de aplicación.

Entrando en materia, comenzaré diciendo que en la partición que hacemos los matemáticos de las distintas ramas propias de nuestro estudio aparecen temas clásicos y tópicos (Algebra, Análisis Matemático, Geometría, Topología, Lógica, Estadística, etc.), pero no es frecuente encontrarse con un tema específico cuya etiqueta diga "Orden". No aparece ninguna asignatura con ese título, que a mí me conste, en ninguno de los planes de estudio de la licenciatura de Ciencias Matemáticas en ninguna facultad de nuestro país. Así, las cuestiones que tienen que ver con estructuras ordenadas se reparten entre otras disciplinas, como las que he citado anteriormente.

El porqué de esta distribución es discutible, y se basa quizá en razones de tradición a la hora de presentar y clasificar nuestro quehacer matemático. No obstante, cabe decir aquí que en la formación de los conceptos matemáticos, que empieza en nuestra más tierna infancia desde el momento en que podemos pensar, conceptos relativos a "orden" se adquieren en una etapa muy anterior a otros conceptos matemáticos con los que estamos mucho más familiarizados (un ejemplo son aquellos conceptos que emanan de la necesidad de realizar operaciones aritméticas sencillas, como "sumar" y "restar").

Para apoyar esta afirmación, valga la siguiente anécdota, que es real y bien reciente:

La maestra trataba de explicar a la pequeña el concepto de suma y resta. A tal fin, le proponía sencillas cuestiones como la siguiente:

<<Si yo te doy cinco caramelos y a tu hermanito menor le doy tres, ¿quién de los dos come más caramelos?>>.

Y después la maestra le realizaba la misma pregunta cambiando los datos, siendo el pequeño el que recibiría ahora cinco caramelos, mientras que la mayor recibiría ahora tres.
La respuesta de la niña era invariablemente la misma:

<<Yo como más>>.

Se le pregunta por qué, y responde:

<<Yo mayor, yo quito al hermano>>.

Obviamente, en esa niña conceptos de jerarquía (de "ordenación", claramente) como "mayor" o "menor" aparecen mucho antes que el concepto de "suma" o "resta".

De la misma manera, conceptos como "alto" o "bajo", "cerca" o "lejos", "grande" o "pequeño", etc., corresponden también al sustrato común de "orden" o de "estructura ordenada".

Nos podemos preguntar ahora si resulta fácil o difícil ordenar cosas. Y, ante todo, ¿qué significa ordenar?

Técnicamente, un matemático nos dirá tal vez que *"ordenar es definir una relación de orden"* (lo que, por supuesto, nos dejará igual que estábamos). Tal vez nos hable de otros tipos de relaciones que, en su jerga, se encuadran en el mundo de las ordenaciones que se pueden definir sobre un conjunto, y emplee expresiones como "preorden", "semiorden", "orden intervalo", etc. O puede que nos hable de "relacionoes binarias en un conjunto", y que nos diga que pueden ser "reflexivas o irreflexivas", "simétricas o asimétricas (y, a veces, antisimétricas)", "transitivas o intransitivas", "completas o incompletas", y que, por ejemplo, *"una relación de orden total ha de ser reflexiva, antisimétrica, transitiva y completa".* (Quizá en este momento estaremos ya, probablemente, al borde del colapso).

No quiero marearles con tanto concepto técnico, así que no les aburro más con esta nomenclatura.

Intentando ser algo más ameno, voy a articular mi exposición de hoy proponiéndoles cinco *ejemplos ilustrativos.*

Con tales ejemplos pretendo darles una pequeña idea de lo que la "teoría matemática del orden puede llegar a estudiar", así como de su amplio abanico de aplicaciones.

EJEMPLO PRIMERO:

Hablando de parentescos entre personas, la relación "ser descendiente de" es transitiva y antisimétrica, por citar alguna de sus propiedades.

La relación "ser padre de", claramente irreflexiva y asimétrica, no es tampoco transitiva (el padre de tu padre, no es tu padre, sino tu abuelo).

La relación "ser padre o padrastro de" podría dar lugar a curiosos ciclos que rompieran su antisimetría, si pensamos para ello en la rara circunstancia de una abuela que casara en segundas nupcias con su propio nieto, y lo hiciera en vida de su hijo, el cual (a este hijo me refiero) pasaría así a ser padre (luego "padre o padrastro") de su padrastro (luego "padrastro o padre"). El nieto, a su vez, pasaría a ser padrastro (y, por tanto, "padrastro o padre") de su padre (y, por ende, "padre o padrastro").

EJEMPLO SEGUNDO:

Pensemos ahora en los que estamos aquí presentes. Entre nosotros, podemos establecer una serie de jerarquías (que son "ordenaciones", en definitiva): Si dos personas trabajan en la misma empresa, y una de ellas tiene más rango que la otra, decimos que la persona de más rango es (en este sentido, que pretende ser políticamente correcto y no ofender a nadie) "superior" a la otra. Si, trabajando en la misma empresa, dos personas tienen exactamente el mismo rango, las declaramos "indiferentes". Finalmente, si dos personas trabajan en distintas empresas, las declaramos "incomparables". No decimos que ninguna de ellas sea "superior", ni siquiera "indiferente", a la otra. Simplemente, en este ejemplo que les propongo no comparamos empresas distintas.

Podemos pensar, dado un número de personas n , en el número J(n) de jerarquías distintas posibles sobre ese conjunto de n elementos.

Pues bien, el número J(n) no se conoce siquiera, salvo para valores muy pequeños de n. Y el problema de calcular tal número (enormemente grande, por otra parte), es un problema abierto de la Combinatoria Matemática. No se ha encontrado todavía un algoritmo eficaz para calcular tales números J(n). Podemos concluir que no sólo ordenar, sino incluso "contar" puede ser algo extremadamente difícil.

EJEMPLO TERCERO:

Supongamos ahora que hubiese unas elecciones aquí mismo, presentándose a las mismas un cierto número de candidatos. Supongamos que a cada votante se le pide que ordene de más preferido a menos preferido esa lista de candidatos. Una vez que todos los votantes han hecho tal cosa, recogemos sus papeletas de voto. Después, tratamos de aglutinar sus pareceres y opiniones, intentando llegar a una lista que refleje "lo que la sociedad (como tal) prefiere, a la vista de las preferencias individuales de sus miembros". Para confeccionar tal "lista indicadora de la preferencia social global" utilizaremos criterios de puro sentido común. Por ejemplo, si hay un cierto candidato que fuera el primero en las listas de preferencias de todos y cada uno de los votantes, parece claro que la "lista social" también debe colocarlo en primer lugar (a esto, técnicamente, se le llama "respeto de la unanimidad"). Pues bien, siguiendo unos pocos criterios de sentido común del tipo que les acabo de mencionar, resulta que:

"En cuanto haya al menos tres votantes y al menos tres candidatos, no hay ninguna ordenación social que satisfaga todos los criterios a la vez".

Fue el neoyorquino Kenneth J. Arrow quien probó un tal resultado allá por 1951. En el año 1972 le fue concedido el premio Nobel de Economía.

Sus ideas han dado lugar al desarrollo de una teoría matemática de impresionante evolución y auge en el presente, y enormes posibilidades, con aplicaciones importantísimas en la Economía, o, en general, allí donde se toman decisiones colectivas basadas en opiniones individuales. Se denomina "Teoría Matemática de la Elección Social". Y, obviamente, toda ella descansa sobre propiedades de estructuras ordenadas.

EJEMPLO CUARTO:

Ordenar algo supone tener una "escala", herramienta mediante la cual podemos comparar elementos, determinando si uno de ellos es "anterior" o "mejor" a otro. En principio, estas escalas de ordenación son meramente "cualitativas". Queremos decir con esto que podemos determinar si un objeto es, ponemos por caso, "más grande que otro", o que una determinada galaxia está "más alejada que otra", o que un diamante es "más caro" que una bolsa de palomitas de maíz, o que una evolución de un sistema físico es "más plausible que otra" (nos costaría aceptar que si colocamos juntas dos manzanas encima de la mesa, al cabo de un rato una se queme y otra se congele, a menos, por supuesto, de que sobre la mesa haya un brasero y una nevera, o, en definitiva, actúe algún agente externo y consumidor de energía).

Una "vara de medir" (una cinta métrica, ponemos por caso) es algo que va mucho más allá de la simple ordenación de las cosas. Una "vara de medir" es una escala cuantitativa, que nos traduce a números los datos aportados por una escala cualitativa. Así, no sólo podemos decir que Zaragoza está más cerca de Pamplona que Madrid, sino que podemos asignar a Pamplona el número 0, a Zaragoza el número 175 y a Madrid el número 405, que "cuantifican" la distancia a Pamplona (en kilómetros, en este caso).

La pregunta del millón surge ahora de manera natural:

¿Podemos cuantificar cualquier escala cualitativa?

¿Es posible encontrar una representación numérica (preservando el orden, se entiende) para cualquier estructura ordenada?

La trascendencia y alcance de esta cuestión son tremendos, impresionantes. Para los físicos, supondría tener lo que en su lenguaje se denomina "función de entropía". Para los psicólogos supondría disponer de métodos cuantitativos para medir "coeficientes de inteligencia". Para los economistas, si la respuesta a la cuestión anterior fuese afirmativa, quedaría automáticamente resuelto el problema de "asignar precios a las cosas": un objeto más preferido que otro no sólo pasaría a costar más, sino que tendríamos además determinado y fijado exactamente su precio. Un sistema de precios de mercado, escala cuantitativa donde las haya, reflejaría fielmente la máxima "tanto tienes, tanto vales".

Pues bien, ocurre que, lamentablemente (o afortunadamente quizás):

No toda escala cualitativa tiene asociada una escala cuantitativa.

Es decir, la traducción de que hemos hablado antes no siempre puede hacerse. Para tipos concretos de ordenaciones, como los órdenes totales o los preórdenes totales, se tienen resultados matemáticos que caracterizan completamente la accesibilidad de una escala cuantitativa, esto es, nos dicen cuándo ese paso de lo cualitativo a lo cuzantitativo puede hacerse y cuándo no. Se trata de un potente teorema de la teoría de representaciones numéricas de estructuras ordenadas (teoría a la que los economistas dan en llamar "Teoría de la Utilidad", y que los físicos utilizan cada vez que tratan de encontrar una función de entropía en Termodinámica Clásica).

Esta teoría está siendo actualmente objeto de serias y profundas investigaciones. Por ejemplo, puede ser importante clasificar completamente aquellas escalas cualitativas que no pueden ser cuantificadas, determinando cuántos tipos no isomorfos pueden aparecer.

EJEMPLO QUINTO Y ÚLTIMO:

Una empresa quiere contratar a dos personas entre un grupo de candidatos. Para ello les realiza un examen individual, que consta de diez preguntas. Cada pregunta corresponde a una tarea que el candidato debe ser capaz de realizar. A la vista de las puntuaciones obtenidas en el examen, ¿podemos deducir que la empresa contratará a los candidatos que hayan obtenido las dos mejores notas?

La respuesta, quizá sorprendente, es que, en general, no.

De hecho, incluso podría darse el caso de que uno de los contratados haya obtenido la peor nota del examen.

La razón es que lo que a la empresa le interesa es que todas las tareas se realicen. Si ocurriera que, entre las diez tareas, una consiste en hablar la lengua arapahoe, puede muy bien ocurrir que candidatos muy cualificados respondan correctamente a las otras nueve pruebas (sin tener conocimiento de la lengua arapahoe), y que haya un individuo que la única tarea que es capaz de realizar, entre las diez que le han propuestas en el examen, es justamente la que corresponde a hablar tal lengua, de manera que tal candidato se muestra absolutamente incapaz de realizar las otras pruebas. Este individuo, sin embargo, sería contratado.

El problema matemático que aparece subyacente aquí consiste en tratar de extender una ordenación definida sobre los elementos de un conjunto (en este caso, los candidatos individuales) a otra ordenación definida sobre las familias de subconjuntos de ese conjunto (en este caso, nos interesan especialmente los subconjuntos de dos elementos), siguiendo ciertos criterios de racionalidad (en este caso, la realización de todas las tareas).

Estos problemas de extensión de ordenaciones resultan ser de una dificultad extrema, y están siendo objeto actualmente de múltiples investigaciones de alto nivel.

Y pongo aquí el punto final, que podría ser cambiado por otro signo de puntuación: el paréntesis izquierdo. Quiero decir con esto que me muestro dispuesto a abrir paréntesis y atender gustosamente a cualquier consulta que quieran, en cualquier momento, hacerme sobre el particular. (Pondré después el paréntesis derecho y el punto final, finalmente).

Espero que el tema les haya resultado, cuando menos, entretenido.

Arratsalde on eta mila esker guztiei etortzeagatik. Buenas tardes y muchas gracias a todos por su asistencia y atención.

He dicho.

APÉNDICE BIBLIOGRÁFICO COMENTADO

Para el lector curioso, que quiera profundizar sobre temas relativos a Matemática del Orden, incluyo aquí un apéndice bibliográfico en el que paso a comentar brevemente qué tipo de lecturas o referencias pueden serle de interés.

1. En España, estudios relativos a estructuras ordenadas pueden englobarse dentro del Análisis Real, que es una rama del Análisis Matemático. Si bien no puede decirse que haya actualmente una escuela clara y definida dedicada a estudiar temas de Matemática del Orden, sí puede decirse que ha habido al menos una gran figura dedicada a estos estudios. Se trata de Norberto Cuesta Dutari, catedrático que fuera de la Universidad de Salamanca, ya fallecido. Entre sus obras destacan no sólo las dedicadas a Matemática del Orden (aparecidas a lo largo de los años cuarenta y cincuenta), sino también las dedicadas a los fundamentos del Análisis Matemático, y en especial, la titulada *"La sinfonía del infinito. Y ya en el paraíso de Euler. (99 Lecciones de Análisis Matemático)"*, que data de 1981. Han trabajado también en estos temas alguno de los discípulos de N. Cuesta Dutari, como Pablo Carpintero Organero, catedrático de Análisis Matemático en la Universidad de Santiago de Compostela. También podemos decir que hay algún grupo o equipo de investigación, más o menos esporádico y aislado, que trabaja actualmente sobre el tema, como el dirigido por Carlos Hervés y Margarita Estévez, ambos catedráticos de Análisis Matemático en la Universidad de Vigo. En mi caso, soy investigador principal del proyecto PB98-0551 *"Estructuras Ordenadas y Aplicaciones"*, subvencionado por el Ministerio de Educación y Cultura. En tal proyecto, claramente englobado en el estudio de la Matemática del Orden, participan investigadores de las Universidades de Zaragoza, Salamanca y Valladolid, así como de la Universidad Pública de Navarra.

2. La anécdota que he referido antes de comenzar con los ejemplos que constituyen el núcleo de esta conferencia me la relató mi esposa, María Isabel Arboniés Jiménez, que es maestra de primaria especializada en Pedagogía Terapéutica (Educación Especial). Lo relatado le sucedió a ella misma con una niña que fue escolarizada tardíamente, y, por tanto, presentaba un cierto retraso en Matemáticas con respecto a sus compañeros de clase en la escuela. Ejemplos similares pueden verse en el texto *"El aprendizaje de las matemáticas"* , de Linda Dickson y otros, publicado en 1991 por el Ministerio de Educación y Cultura en colaboración con la editorial Labor, de Madrid.

3. A fecha de hoy (escribo esto el 9 de octubre de 2002) se conocen únicamente los valores de J(n) en los que $1 \leq n \leq 16$. El valor de J(16) ha sido "presentado en sociedad" muy recientemente, en un artículo de G. Brinkmann y B. D. Mckay que acaba de ser publicado en la revista *"Order"*. Además, no podemos decir que en los últimos diez años se haya avanzado demasiado en relación a este problema, ya que los valores hasta J(13) se conocían en 1992, siendo C. Chaunier y N. Lygerös quienes determinaron el valor de J(13) en tal fecha.

4. La referencia clásica donde se considera que fue demostrado por primera vez el denominado *"teorema de imposibilidad de Arrow"* es el libro *"Social Choice and Individual Values"*, publicado en 1951 por Cowles Foundation and Wiley, de Nueva York. Hay un texto divulgativo sobre estos temas, cuyos autores son K. J. Arrow y H. Raynaud, que ha sido publicado en castellano por Alianza Editorial, de Madrid, en 1989.

5. Para quien desee conocer los desarrollos modernos de la Teoría Matemática de la Elección Social, una introducción asequible, de alto valor didáctico y pedagógico, cuya lectura recomendamos encarecidamente, es el libro de Jerry S. *Kelly "Social Choice Theory"*, publicado en 1988 por Springer Verlag, de Nueva York.

6. Para el estudio genérico de relaciones binarias, recomendamos la consulta del primer capítulo del libro *"Infinite Dimensional Analysis: A Hitchicker's Guide"*, de Ch. D. Aliprantis y K. Border, publicado en 1999 por Springer Verlag, de Berlín.

7. Para quien desee conocer el aparato matemático subyacente a problemas relativos a representaciones numéricas de estructuras ordenadas, o al paso de escalas cualitativas a cuantitativas, tal y como se consideró en el ejemplo cuarto, recomendamos especialmente la lectura del *libro "Representations of Preference Orderings"*, cuyos autores son D. S. Bridges y G. B. Mehta. Destacamos sus tres primeros capítulos, que comienzan por algo tan básico como el estudio de

distintos tipos de relaciones binarias, y culminan con alguno de los más clásicos resultados de caracterización de la representabilidad de estructuras totalmente ordenadas. Si bien su lectura puede resultar dura para el no especialista, su conocimiento y puesta al día de los principales problemas matemáticos que aparecen en este tipo de estudios, y su gran riqueza de ideas, lo convierten en una referencia obligada para cualquier investigador actual sobre estructuras ordenadas.

8. Varias caracterizaciones de la representabilidad numérica de órdenes o preórdenes totales fueron obtenidas a finales de los años treinta, y a partir de entonces se han dado muchas más. Todas ellas suelen ser pruebas alternativas de un mismo resultado general. El lector puede ver alguna de estas pruebas en las referencias de Birkhoff, Milgram, Debreu, Bowen, o Jaffray, que citamos en la bibliografía, así como en los primeros capítulos del libro de Bridges y Mehta cuya referencia hemos dado en el párrafo anterior

9. Para el caso de órdenes intervalo se conocen caracterizaciones clásicas debidas a Doignon, Ducamp y Falmagne por un lado, y a P. C. Fishburn por otro lado, entre otros autores. Para el caso de semiórdenes, hay una caracterización reciente debida a Candeal, Induráin y Zudaire.

10. Beardon y otros han publicado recientemente, este año 2002, un artículo donde aparece una clasificación de los conjuntos totalmente ordenados que no admiten una representación numérica en la recta real.

11. El francés Gérard Debreu, premio Nobel de Economía en 1983, se percató ya al estudiar la hoy *denominada "Teoría del Valor"* (parte integrante de la Teoría de la Utilidad en Economía), de que no siempre iba a ocurrir que una "preferencia" (escala cualitativa) viniera representada numéricamente por una "función de utilidad" (escala cuantitativa). Proporcionó un ejemplo sencillo y clásico, basado en preferencias lexicográficas.

12. El uso de representaciones numéricas de estructuras ordenadas para interpretar procesos termodinámicos en Física, a través de la consideración de funciones de entropía, puede consultarse, por ejemplo, en los trabajos de J. L. B. Cooper publicados durante los años sesenta. La comparación de los principales logros de trabajo con resultados paralelos de la Teoría de Utilidad en Economía ha sido discutida en diversos artículos recientes de Candeal, De Miguel, Induráin y Mehta. Por otra parte, un libro clásico que presenta muchas de las líneas de aplicación de la teoría de estructuras ordenadas en Psicología es el texto de Krantz y otros titulado *"Foundations of Measurement"*, publicado en 1971 por Academic Press, de Nueva York.

13. Un ejemplo de artículo donde se muestran las dificultades de extender una ordenación, definida inicialmente sobre los elementos de un conjunto, al conjunto potencia de éste (conjunto de todos sus subconjuntos), ha sido recientemente publicado por J.R. De Miguel y otros en la Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Madrid. En las referencias que a su vez aparecen en ese artículo se comentan otros resultados previos de diversos autores, que ponen de manifiesto la dificultad que entraña el problema de la extensión de estructuras ordenadas de un conjunto a un conjunto mayor, y, en particular, de un conjunto a su conjunto potencia.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Aliprantis, Ch. D., y K. Border: "Infinite Dimensional Analysis: A Hitchicker's Guide". Springer Verlag. Berlin. 1999.

Arrow, K. J.: "Social choice and individual values". Cowles Foundation and Wiley. New York. 1991.

Arrow, K. J. y H. Raynaud: "Opciones sociales y toma de decisiones mediante criterios múltiples". Alianza Editorial. Madrid. 1989.

Beardon, A., Candeal, J. C., Herden, G., Induráin, E. y G. B. Mehta: "The Non-Existence of a Utility Function and the Structure of Non-representable Preference Relations". Journal of Mathematical Economics 37(1), 17-38. (2002).

Birkhoff, Garrett: "Lattice theory". (First edition). American Mathematical Society. Providence, RI. 1940.

Bowen, R. : "A new proof of a theorem in utility theory". International Economic Review 9 (3), 374. (1968).

Bridges, Douglas S. y Ghanshyam B. Mehta: "Representations of Preference Orderings". Springer Verlag. Berlin. 1995.

Brinkmann, G. y B. D. Mckay: "Posets up to 16 points". Order 19, 147-179. (2002).

Candeal, J. C., De Miguel, J.R., Induráin, E. y G. B. Mehta: "On a theorem of Cooper". Journal of Mathematical Analysis and Applications 258, 701-710. (2001).

Candeal, J. C., De Miguel, J.R., Induráin, E. y G. B. Mehta: "Utility and entropy". Economic Theory 17 (1), 233-238. (2001).

Candeal, J. C., Induráin, E. y M. Zudaire: "Numerical representability of semiorders". Mathematical Social Sciences 43 (1), 61-77. (2002).

Carpintero Organero, Pablo: "Potencia de varias familias de tipos topológicos". Revista Matemática Hispano-Americana 34 (4-5), 189-206. (1974).

Carpintero Organero, Pablo: "Sobre espacios topológicos sin homeomorfismos propios y conjuntos ordenados sin semejanzas propias". Revista Matemática Hispano-Americana 35 (5), 143-152. (1975).

Carpintero Organero, Pablo: "Sobre espacios topológicos sin homeomorfismos propios y conjuntos ordenados sin semejanzas propias (continuación)". Revista Matemática Hispano-Americana 35 (6), 197-212. (1975).

Chaunier, C. y N. Lygerös: "The number of orders with thirteen elements". Order 9 (3), 203-204. (1992).

Cooper, J. L. B. : "The foundations of Thermodynamics". Journal of Mathematical Analysis and Applications 17, 172-193. (1967).

Cuesta Dutari, Norberto: "Teoría decimal de los tipos de Orden (I)". Revista Matemática Hispano-Americana 3, 186-205. (1943).

Cuesta Dutari, Norberto: "Teoría decimal de los tipos de Orden (II)". Revista Matemática Hispano-Americana 3, 242-268. (1943).

Cuesta Dutari, Norberto: "Notas sobre unos trabajos de Sierpinski". Revista Matemática Hispano-Americana 7, 128-131. (1947).

Cuesta Dutari, Norberto: "Matemática del Orden (I)". Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Madrid 52, 147-321. (1958).

Cuesta Dutari, Norberto: "Matemática del Orden (II)". Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Madrid 52, 609-770. (1958).

Cuesta Dutari, Norberto: "Matemática del Orden (III)". Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Madrid 53, 33-190. (1959).

Cuesta Dutari, Norberto: "La sinfonía del infinito. Y ya en el paraíso de Euler. (99 Lecciones de Análisis Matemático)". Universidad de Salamanca. 1981.

De Miguel, J.R., Goicoechea, M.I., Induráin, E. y E. Olóriz: "Criterios de extensión al conjunto potencia de ordenaciones sobre un conjunto finito".

Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Madrid 94 (1), 83-92. (2000).

Debreu, Gérard: "Representation of a preference ordering by a numerical function", en *"Decission processes"*, pp. 159-166, editado por R. Thrall, C. Coombs y R. Davis. Wiley. New York. 1954.

Debreu, Gérard: "Theory of value". Wiley. New York. 1959.

Debreu, Gérard: "Continuous properties of Paretian utility". International Economic Review 5, 285-293. (1964).

Dickson, L. , Brown, M. y O. Gibson: "El aprendizaje de las matemáticas". M.E.C. y Editorial Labor. Madrid. 1991.

Doignon, Jean Paul; Ducamp, André y Jean Claude Falmagne: "On realizable biorders and the biorder dimension of a relation". Journal of Mathematical Psychology 28, 73-109. (1984).

Estévez, Margarita y Carlos Hervés: "On the existence of continuous preference orderings without utility representations". Journal of Mathematical Economics 24, 305-309. (1995).

Fishburn, Peter C. : "Interval representations for interval orders and semiorders". Journal of Mathematical Psychology 10, 91-105. (1973).

Fishburn, Peter C. : "Interval Orders and Interval Graphs". John Wiley. New York. 1985.

Jaffray, J. Y. : "Existence of a continuous utility function: an elementary proof". Econometrica 43 (5-6), 981-983. (1975).

Kelly, Jerry S. : "Social Choice theory". Springer Verlag. New York. 1988.

Krantz, D. ; Luce, R. D. ; Suppes, P. y A. Tversky: "Foundations of Measurement". Academic Press. New York. 1971.

Milgram, A. : "Partially ordered sets, separating systems and inductiveness". Reports of a Mathematical Colloquium (Second Series). University of Notre Dame, 18-30. (1939).

Milgram, A. : "Partially ordered sets and topology". Reports of a Mathematical Colloquium (Second Series). University of Notre Dame, 3-9. (1940).