Lección Magistral

sobre

Lo cotidiano, lo recreativo, y la matemática empresarial

pronunciada
por

Dr. D. Esteban Indurain Graso

en el
Acto de Apertura del Curso Académico 1989-90
en los
Centros Universitarios de Pamplona

Pamplona, VI, oct. MDCCCCLXXXVIIII

Excmo. Sr. Rector Magnífico,
Excmas. e Ilmas. Autoridades,
Queridos Compañeros y Alumnos,
amigos todos :

Es todo un honor para mí el hacerme cargo de la lección magistral que inaugurará el Curso Académico 1989-90 en los centros navarros de la Universidad de Zaragoza.

El título que he escogido para mi exposición ("Lo cotidiano, lo recreativo, y la matemática empresarial") puede sorprender a más de uno, que se habrá preguntado ... ¿qué tiene de cotidiano y/o de recreativo la matemática empresarial?, o, quizá equivalentemente,... ¿qué tiene que ver la velocidad con el tocino?

> *(¡Digamos de pasada que la velocidad sí que tiene algo que ver con el tocino! Pensemos que cuanto más tocino coma uno, menos velocidad tendrá al intentar correr después. Por la misma regla de tres, algo de recreativo, o de cotidiano, tendrá la Matemática Empresarial).*

El objetivo que pretendo en mi exposición es puramente **didáctico**.

Entiendo que en la enseñanza de la Matemática hacia "colectivos no matemáticos", esto es, hacia alumnos que no han de dedicarse a ella, aunque la utilicen con más o menos frecuencia en su futura vida profesional, es un **problema abierto**, que debe interesar a todo profesional de la educación matemática.

El problema a resolver es siempre el mismo: **cómo llegar a los alumnos**, cómo **hacer de la matemática una herramienta útil**, y sobre todo, **viva** .

En este sentido reconozco que el lenguaje matemático es propio, distinto del cotidiano de cualquier otra rama de la ciencia, y quizá, bastante alejado de la "vida diaria". Así, en frase de Bertrand Russell (véase [NEW], vol 1, p. 343):

> *"La matemática es aquella ciencia en la que no sabemos de qué estamos hablando, ni mucho menos, si lo que estamos diciendo es verdad"* .

No obstante, habrá de admitirse también que no es menos cierto que hoy día las Ciencias Sociales (y tanto la Economía, como las Ciencias Empresariales se verían incluidas aquí) avanzan paralelamente a una gradual matematización de sus contenidos . Así , en frase de John Ziman (Véase [ZIM], pp. 15-16):

> *"Para que ciertas disciplinas reciban el título de «Ciencias Sociales» deben tener el lenguaje formal de la teoría y el simbolismo matemático"* .

Quedándome a mitad de camino entre estas dos opiniones , voy a dar una bella cita de T. H. Huxley (véase [BOY], p.741), quien dice :

> *"Podemos comparar a la Matemática con un molino fabricado con precisión exquisita, que puede moler harina de cualquier grado de finura que uno quiera; pero lo que se obtenga de él depende, sin embargo, de lo que se le eche ; y de la misma manera que el mejor molino del mundo no dará harina de trigo de cáscaras de guisantes, así también páginas y páginas de fórmulas no permitirán obtener ningún resultado concreto a partir de datos imprecisos"* .

Como intento pedagógico para que esa matemática que explicamos "llegue mejor" al alumno, presento aquí una lista de ejemplos , aplicaciones o entretenimientos curiosos, entresacados de la vida "cotidiana" (quizá entendiendo ésta en su sentido más amplio), que pueden servir como instrumento.

Podría añadirse que, por desgracia, esas aplicaciones no suelen aparecer a menudo en los libros de texto ... **¡ y sin embargo esas aplicaciones y ejemplos están ahí, listos para ser aprovechados !**

La idea aparece ahora clara : por medio de estos ejemplos más "cotidianos", más "reales", o más "entretenidos" que la mayoría de los ejemplos "técnicos e incomprensibles" que el alumno de Ciencias Empresariales puede encontrar en cualquier libro de texto standard, dicho alumno "evoca" mejor (eso esperamos) alguna idea matemática clave .

En mi exposición empezaré con algún ejemplo que recoge "ideas generales" en el aprendizaje de la matemática; después, la mayoría de ejemplos que daré serán "de álgebra", quizá porque tales ejemplos abunden menos en la literatura que aquellos que tienen que ver con funciones, variaciones de cantidades, etc. (ejemplos "de análisis").

NOTA: Varios de los ejemplos que presentamos aquí fueron ya expuestos en un artículo titulado "Ejemplos curiosos para matemática empresarial" , que presenté en una reunión de Matemática Aplicada a la Empresa que tuvo lugar en Zaragoza, en Noviembre de 1987. (Véase [IND]).

Miscelánea de ejemplos y aplicaciones

EJEMPLO 1: "Niños superdotados".

A menudo no nos damos cuenta, cuando leemos un texto matemático, de la importancia que puede tener el disponer de dos o más procedimientos que resuelvan una misma cosa.

El profano suele razonar así "¿si ya tenemos un método para resolver tal problema, ... para qué queremos otro, sino para complicarnos más la vida?

Sin embargo, es útil tener salidas, soluciones "alternativas".

En este sentido,veamos un bonito ejemplo que proviene de una prueba de inteligencia para niños superdotados que suele realizarse en los colegios de U.S.A. con adolescentes de unos 13-14 años: La prueba en cuestión consistía en lo siguiente :

> *"Le damos a usted un barómetro. Explique como medir con él la altura del edificio <<Empire State>> ".*

La respuesta más común fue :

> *"Mido la presión tanto en el hall del edificio como en la terraza superior. La diferencia de presión es directamente proporcional a la altura, ergo, la altura es la constante de proporcionalidad por la diferencia de presión"*

Una interesante respuesta alternativa fue :

> *"He aquí como medir la altura, con una sola medición : Subo a la terraza superior, y dejo caer el barómetro hasta que se estrelle contra el pavimento. Cuento el tiempo que tarda en estrellarse. La altura, o , en definitiva, el espacio recorrido, es la velocidad inicial (en nuestro caso, cero) por el tiempo más un medio de la aceleración de la gravedad por el tiempo al cuadrado. "*

La respuesta más original, sin embargo, fue la siguiente:

> *"Yo no necesito ninguna medición . ¡Que la haga otro! Más aún, me da vértigo subir, y no pienso hacerlo. Yo, simplemente, voy al hall del edificio, busco al portero (que seguro que sabe cuanto mide el edificio) y le digo : Oiga buen hombre, si me dice cuanto mide el edificio, ¡ le regalo un barómetro!*

(Véase [FIX]).

EJEMPLO 2 : "En la mili"

En la línea del ejemplo anterior , recordemos que en cualquier texto elemental de matemáticas se nos dice: "Un conjunto es una colección de objetos". "Los conjuntos pueden definirse de dos maneras: 1) por *extensión* (esto es, nombrando todos y cada uno de sus elementos); 2) por *comprensión* (esto es, dando una propiedad que *caracterice* a los elementos del conjunto)".

De nuevo cabe preguntarse : ¿Para qué dos maneras? ¿Cuál es más ventajosa? .Cualquier matemático dirá en seguida : La definición por comprensión alcanza a más conjuntos. No pueden enumerarse los términos de un conjunto infinito sin morir antes de acabar.

Pero un ejemplo más "cotidiano" se da cada día en cualquier cuartel . Cuando el superior dice :¡ Coooompañía , Fiiiiirmes ! , el recluta ya sabe lo que tiene que hacer (no hace falta que el superior vaya nombrando uno por uno a todos los miembros de la compañía, con el desmadre que esto originaría) .

Un tercer ejemplo , en esta misma línea, nos pone en evidencia cómo, algunas veces, sí que nos complicamos la vida para hacer cuentas sencillas :

EJEMPLO 3 : "Von Neumann y las moscas"

Este problema puede resolverse por el método "difícil" , o por el método "fácil":

> *"Dos trenes, que van en la misma dirección y sentido contrario, están a 200 kilómetros el uno del otro; los dos andan a 50 kilómetros por hora. Una mosca empieza a volar de uno al otro tren, yendo y viniendo, empezando por la parte delantera de uno de ellos. Su velocidad es de 75 kilómetros por hora. Los trenes chocan, y la mosca muere aplastada. ¿Cuántos kilómetros recorrió en todo su viaje? "*

Digamos que la mosca tocará cada tren un número infinito de veces antes de ser aplastada. El problema se podría resolver (no lo haré aquí) sumando una serie infinita de distancias cada vez más pequeñas, serie que resulta convergente (como es de esperar). (Este es el método "difícil").

El camino fácil es el siguiente : Si los trenes van a 50 por hora, y les separan 200 kilómetros, tardarán dos horas en chocar. A 75 km/h, la mosca recorrerá 150 kilómetros en esas dos horas.

Pues bien, se cuenta que el problema fue propuesto al eminente y despistadísimo matemático John Von Neumann, quién lo resolvió en poco tiempo . Al ser preguntado sobre cómo lo había resuelto contestó ... ¡está clarísimo, se trata de sumar una serie!

(Citado por Raymond Smullyan, en [SMU], p. 12) .

EJEMPLO 4 : Ciencias "exactas"

A menudo se le echa en cara a los matemáticos su excesivo "rigor" al hacer sus afirmaciones. Éste, proviene del hecho de que en matemáticas sólo es válido aquello que puede demostrarse por argumentos lógicos, a partir de una axiomática y unas reglas de razonamiento previamente establecidas. Cualquier otra afirmación se queda en el plano de "mera conjetura", y no tendrá carta de validez hasta que haya sido deducida lógicamente de los axiomas. Así, el matemático sólo afirma "aquello que puede afirmar con absoluta exactitud".

El siguiente ejemplo, o chiste, ilustra la idea anterior :

> *<< Un astrónomo, un físico, y un matemático viajan juntos por Escocia, en el mismo compartimento de un tren. Miran por la ventana, y ven una oveja negra solitaria pastando en un campo cercano. El astrónomo afirma : " Observen : ¡Todas las ovejas escocesas son negras ! ". El físico le contesta : " Usted disculpe. ¡Lo único que podemos afirmar es que alguna oveja escocesa es negra! ". El matemático mira a ambos fijamente, y les dice: "Realmente lo único que podemos afirmar es que: ¡En Escocia existe al menos un campo, que contiene al menos una oveja, uno de cuyos lados, al menos, es negro! ">>.*

Trabajemos ahora con ejemplos que reflejan propiedades algebraicas :

La palabra "álgebra" suena a menudo como un monstruo que acecha al pobre alumno indefenso. Por no se sabe qué razón psicológica (supongo que el tema estará estudiado por pedagogos competentes, pero yo no sé nada al respecto), el álgebra no se aparece como "natural" al alumno. Lo algebraico tiene algo de cabalístico y esotérico, mientras que lo analítico o numérico resulta más "real", más "cercano" (aun cuando su complejidad conceptual pueda ser mayor).

Nos imaginamos más fácilmente una función que una estructura de grupo no abeliano, sin lugar a dudas. Sin embargo, ...¡las estructuras también están ahí, sólo hace falta "desenterrarlas" !

EJEMPLO 5 : Haciendo la comida.

En cualquier cocina doméstica la chapa tiene cuatro posiciones: Puede estar "al cero", "al uno", "al dos", o "al tres". Para que esté al tres puedo girar el mando 90 grados a la izquierda, o bien 270 grados a la derecha. Si llamamos "1" al giro de 90 grados a la derecha, tenemos que, en este extraño sistema numérico, el "3" coincidirá con el "-1". Se puede así, componiendo giros, descubrir que esta chapa es un perfecto modelo para un grupo algebraico cíclico de cuatro elementos.

EJEMPLO 6 : El cubo de Rubik.

Nos enseñan en álgebra elemental que un grupo es un conjunto dotado de una operación asociativa, con elemento neutro y elemento inverso. Si además hay propiedad conmutativa, el grupo se denomina "abeliano". El ejemplo típico puede ser la "suma" de números reales.

Pues bien, el conocido "cubo de Rubik" nos da un magnífico ejemplo de grupo: Los elementos del grupo son movimientos o cadenas de movimientos, el elemento neutro es no mover nada, y el inverso de un movimiento es deshacer ese movimiento. Por cierto, este grupo no es abeliano.

EJEMPLO 7 : Cambio de moneda.

Otra idea que todo alumno de Ciencias Empresariales llega a odiar pronto es la de "aplicación lineal" entre espacios vectoriales. Sin embargo, en cualquier entidad bancaria (lugar donde buscan trabajo muchos de nuestros alumnos) están a todas horas utilizando aplicaciones lineales, quizá sin saberlo.

Cuando contamos "en pesetas" utilizamos un espacio de cuenta isomorfo al conjunto de los números reales. Cuando contamos "en dólares" ocurre exactamente lo mismo. El paso de una cuenta realizada en pesetas a otra realizada en dólares consiste en multiplicar por la razón de cambio de moneda (en definitiva, multiplicar por un mismo número toda cuenta realizada en pesetas). Algebraicamente, esto es una aplicación lineal de **R** en **R**.

EJEMPLO 8 : La tarjeta de crédito.

Otro concepto matemático de no muy grato recuerdo para nuestros alumnos es el de "matriz de números reales". Cualquiera de nuestros alumnos habrá experimentado en carne propia lo difícil que puede llegar a ser el cálculo de la matriz inversa de una matriz dada (¡ supuesta regular, claro está !), si la dimensión de esta matriz es grande.

Quizá jamás se le haya ocurrido pensar que en esta dificultad se basan numerosos sistemas de "control y seguridad" (cajas fuertes, llaves electrónicas,...). Veamos cómo funciona, en esencia, algo que en cualquier entidad bancaria se maneja a menudo : "una tarjeta de crédito" :

El funcionamiento de una tarjeta de crédito es en esencia de índole matricial. Al poner nuestra firma y nuestro número clave en cinta magnética, ponemos los números que componen una matriz regular A, de la cual sólo nosotros (a través de la codificación de nuestro número clave) conocemos la inversa A^{-1}. La Caja de Ahorros conoce nuestra clave A, pero no A^{-1}. A su vez, la Caja posee un código en función de una matriz B regular, de la que sólo la Caja conoce la inversa B^{-1}.

Cuando nosotros enviamos un mensaje a través de la tarjeta de crédito, tal como "dame 15.000 pesetas", este mensaje se codifica en base a una matriz M. La Caja recibe, en realidad, el siguiente código : $A^{-1}M\,B$. Sólo la Caja puede leer el mensaje , aplicando B^{-1} a derecha (y A a izquierda), para obtener M. Al hacer esto, dado que para leer el mensaje ha tenido que aplicar A, razona así : "Alguien ha aplicado A^{-1} antes". Como la Caja sabe que A^{-1} sólo lo conozco yo, me da el dinero a mí, y no a otro aprovechado.

EJEMPLO 9 : La cesta de la compra.

Otro concepto árido es el de producto escalar. Aparentemente, nada más alejado de la realidad que un producto escalar. Sin embargo, cualquier ama de casa lo emplea a diario sin saberlo :

Supongamos que un ama de casa va al mercado y compra una botella de leche, dos kilos de patatas, tres barras de pan , y un periódico, y que los precios por unidad sean , respectivamente, 100, 40, 45, y 60 pts. Al calcular lo que tiene que gastar hace :

$$(1 \times 100) + (2 \times 40) + (3 \times 45) + (1 \times 60) = 375 \text{ pts.}$$

En realidad, todo consiste en multiplicar escalarmente el vector de cantidades (1,2,3,1) por el vector de precios (100,40,45,60) .

(Operación, por cierto, bien conocida en Teoría Económica, véase , por ejemplo, [GRE], p. 31)

EJEMPLO 10 : Jugando a agentes secretos .

El álgebra matricial puede ser empleada para el diseño de mensajes cifrados (véase por ejemplo [REI], p. 132, ó [FIS]). Así, si yo me llamase Pepe, usando un simple código numérico del tipo :

A B C D E F ...
1 2 3 4 5 6 ...

podría escribir mi nombre en forma matricial así

$$\cancel{\begin{pmatrix}17 & 5\\ 17 & 5\end{pmatrix}} \qquad \begin{pmatrix}17 & 5\\ 17 & 5\end{pmatrix}$$

Para hacer más difícil el descifrado del código puede multiplicarse a izquierda por alguna matriz que sólo nosotros conozcamos. No obstante, debemos asegurarnos de que una tal matriz sea regular, ya que si A es una matriz no regular, existen matrices B y C, distintas, con AB = AC :

Por ejemplo, si utilizasemos la matriz

$$\cancel{\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix} = A} \qquad \begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix} = A$$

la palabra "Lulú" quedaría codificada igual que la palabra "Pepe", como

$$\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

y así nadie sabría si me llamo Pepe o Lulú.

EJEMPLO 11 : Los calvos.

Volviendo a los fundamentos de los conceptos algebraicos, recordemos que una aplicación entre dos conjuntos X é Y es inyectiva, si a cada elemento de X le hacemos corresponder uno y sólo un elemento de Y, correspondiendo a elementos distintos imágenes distintas. Me suele gustar proponer el siguiente ejemplo para ver si el alumno capta qué es eso de la "inyectividad" :

En Pamplona es posible hacer cada una de las afirmaciones siguientes :

a) El número de habitantes de Pamplona supera al número de pelos que puede tener en la cabeza cualquier pamplonés.

b) Todo pamplonés tiene al menos un pelo sobre su cabeza.

Demuéstrese, a partir de los datos anteriores, que existen al menos dos pamploneses con exactamente el mismo número de pelos sobre su cabeza.

(Véase [GRU-WEI], ó [SMU], p. 23)

Termino con algun ejemplo , como botón de muestra, más propio de la Teoría de Funciones o Análisis Matemático :

EJEMPLO 12 : El banquero caradura.

Un banquero avispado se dedica a cobrar inmediatamente toda deuda que tengan pendiente con él. Sin embargo, cuando es él quien tiene que pagar, demora indefinidamente sus pagos, cual moroso recalcitrante. Con esta operación, lo más probable es que antes de ser metido en la cárcel, se forre espectacularmente.

Un bonito problema en este sentido es el siguiente :

"La serie alternada

1 - (1/2) + (1/3) - (1/4) + (1/5) - (1/6) + ...

es convergente a una suma que está entre 1/2 y 1 . Pero no puede extrañar que alguien que conozca la teoría de series esté dispuesto a pagar alguna fuerte cantidad para adquirir el derecho a elaborar un programa de cobros y pagos que contenga a todos los términos de la serie una única vez, en la inteligencia de que los términos positivos corresponden a cobros y los negativos a pagos. ¿Por qué ?"

(Véase este ejercicio en [GRA], p. 495)

Explicación : ***El teorema de Riemann nos dice que se pueden reordenar los términos de una serie convergente , pero no absolutamente convergente, de forma que la suma de la serie reordenada sea la que uno haya prefijado de antemano (incluso si esta suma es infinita). Por ejemplo, la reordenación:***

-(1/2) + 1 + 1/3 -(1/4) + (1/5) + (1/7) +(1/9) +(1/11) -(1/6) + ...,

donde los términos de denominador par ocupan los lugares "cuadrado perfecto" (esto es : 1º, 4º, 9º, 16º, 25º , ...) de la serie, tiene suma infinita. (Véase [R-P-T], pág. 315 .).

EJEMPLO 13 : Aprendiendo geografía .

Una idea sencilla cuando estudiamos funciones es el concepto de "función creciente". Resulta intuitivo que no puede existir ninguna función definida sobre una circunferencia, y con valores reales, que sea "creciente en el sentido contrario a las agujas del reloj". La razón es que recorriendo así la circunferencia, al cabo de una vuelta ¡estamos en el punto de partida! (y por tanto la función vale lo mismo que hace una vuelta, y entonces, o tiene algũna discontinuidad, o "no ha podido crecer siempre").

Sigamos dándole vueltas al asunto: Pensemos en el Ecuador terrestre. Llevemos nuestra imaginación, no nuestros pies, siempre hacia el Este. En dirección Este, la hora solar, que debería ser la que marcase el reloj, debe aumentar (el Sol ha pasado antes por allí). Sin embargo, dando una vuelta completa al Ecuador ¡volvemos a estar en el mismo sitio! ¿cómo se come eso?

La respuesta es que esa "función horaria" es discontinua. Existe una "línea de cambio de fecha" que atraviesa la Tierra de Polo Norte a Polo Sur, y cruzando el Océano Pacífico. Un señor que coloque un pie a cada lado de la línea puede volverse loco pensando :

<< La mitad de mi cuerpo vive "un día antes" que la otra mitad,... ¡y sin embargo, todo transcurre simultáneamente para ambas mitades ! >>

EJEMPLO 14 : De cómo un simple "¡Hola, buenos días!" descubre el Teorema de Bolzano .

Supongamos que entro a trabajar todos los días a las ocho en punto. En mi casa hay una oficina donde trabaja mi amigo Alberto, que también comienza a las ocho en punto. Además, Alberto vive en la casa donde trabajo yo. Los dos salimos de casa cada día a las ocho menos cuarto en punto, y llegamos al trabajo siempre en punto, a las ocho. Además, seguimos el mismo camino, pero en sentido inverso.

¡Nadie dudará , por tanto, que en algun punto a mitad de camino cada uno de los dos exclama "Hola, buenos días" !

Vamos ahora a matematizar la situación anterior :

Aparece una función (que depende del tiempo, y que supondremos continua), que indica mi posición en el camino al trabajo. Asímismo aparece una función análoga que indica la posición en el camino de mi amigo Alberto.

Se tienen dos funciones f, g : [a,b]——> [c,d] , con
a = "ocho menos cuarto" ,
b = "ocho",

c = "posición de mi casa, donde trabaja Alberto" ,
d = "posición de la casa de Alberto, donde trabajo yo";
además $f(a) = c$, $f(b) = d$, $g(a) = d$, $g(b) = c$.

Considerando la función : $f\text{-}g : [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$, se tiene que:
$f\text{-}g\,(a) = c\text{-}d$; $f\text{-}g(b) = d\text{-}c$.

Así , la función "f-g" definida en [a,b] es continua , y toma valores de distinto signo en los extremos de su intervalo de definición , llegamos así a intuir el ...

TEOREMA DE BOLZANO : Toda función $h : [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$ continua y con valores de signo distinto en los extremos , (es decir : $h(a)h(b) < 0$), debe anularse en algún punto de [a,b] .

(Explicación : Volviendo a nuestro ejemplo, esto significa que $f\text{-}g(t) = 0$ para algun instante "t" en [a,b]. Dicho de otro modo, en "algun momento" nos decimos, efectivamente , "¡Hola,buenos días!".).

He dicho. Muchas gracias por la atención tan amablemente prestada.

Bibliografía

[BOY] BOYER, Carl B.: "Historia de la matemática". Alianza Editorial. AUT 94. Madrid.

[FIS] FISHER, John : "The magic of Lewis Carroll". Penguin books. 1973.

[FIX] FIXX, James : "Problemas de recreación mental para los muy inteligentes". Gedisa. Buenos Aires.

[GRA] GRAFE, Julio : "Matemáticas Universitarias". Mc. Graw- Hill. Madrid. 1985.

[GRE] GREEN, H.A.J.: "La teoría del consumo". Alianza Editorial. AU nº 163. Madrid.

[GRU-WEI] GRUENBERG and WEIR : "Linear geometry". Springer Verlag. New York. 1977.

[IND] INDURAIN, E. : "Ejemplos curiosos para Matemática Empresarial". Encuentro sobre la matemática aplicada a la Empresa. Zaragoza, Noviembre 1987, pp. 129-158.

[NEW] NEWMAN, J. R. : "Sigma. El mundo de las matemáticas" Volumen 1. Grijalbo. Barcelona. 1983.

[REI] REICHMAN, W.J.: "The spell of mathematics". Pelican books. 1972.

[R-P-T] REY PASTOR, PI CALLEJA, y TREJO: "Análisis Matemático I". Kapelusz. Buenos Aires. 1963 (7ª edición).

[SMU] SMULLYAN, R.: "¿Cómo se llama este libro?". Cátedra. Madrid. 1981.

[ZIM] ZIMAN, John: "La fuerza del conocimiento". Alianza Editorial. LB nº 765. Madrid.

Dirección del autor : Escuela Universitaria de Estudios Empresariales de Pamplona. c/ Navarrería nº 39. 31001. PAMPLONA.