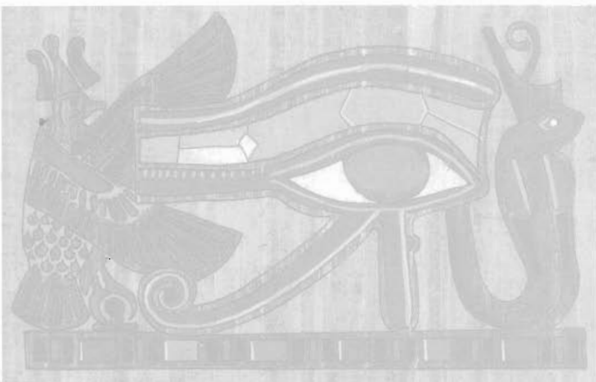
JOSE L. VIVIENTE MATEU

LA MATEMATICA, LA SOCIEDAD Y LA COMUNIDAD EUROPEA



LECCION INAUGURAL DEL CURSO ACADEMICO MCMLXXXVIII-MCMLXXXIX

UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA

Edita: Universidad de Zaragoza
Secretariado de Prensas Universitarias
Vicerrectorado de Extensión Universitaria
Ciudad Universitaria (Geológicas)
50009 ZARAGOZA (España)

Composición: José A. Martinez
Diseño de cubierta: José L. Viviente

I.S.B.N.: 84-7733-168-5
D.L.: Z-1073-90

A mi mujer Mª. Montserrat

hijos: Adela, Montserrat, Pilar, José, Enrique, Javier

y nietos.

Índice

Excmo. Sr. Rector Magnífico;
Excmos., Ilmos., Señores;
Queridos compañeros estudiantes y P.A.S.U.
Señoras y Señores:

El Protocolo de la Universidad de Zaragoza, según una norma iniciada en 1.845, establece que, siguiendo un orden, el Rectorado designe la Facultad y el facultativo que debe impartir la lección inaugural de cada curso académico. Este es el motivo que, hoy, me lleva a actuar como padrino o paraninfo de la apertura del curso 1.988-89.

La única razón, en consecuencia, que me autoriza a tener el inmerecido honor de dirigirme a todos ustedes, desde esta prestigiosa tribuna, se halla en la notoria magnitud que a este acto imprime una universidad con la historia y valer como la de Zaragoza, así como el permitirme disponer de una inigualable oportunidad de ejercer de modo extraordinario mi deseo de servicio al pueblo aragonés que me vio nacer bajo el cobijo de la parroquia de Ntra. Sra. del Pilar de Zaragoza.

Es bien conocido que superada la oposición que me promocionó a la función de Catedrático de Geometría 5º (Diferencial), tuve la opción de elegir entre dos plazas en Universidades distintas. La decisión fue inmediata y a sabiendas de que "nadie es profeta en su tierra".

Pero si no exige su cumplimiento particular el citado protocolo, la aceptación de tal designación, por mi parte, puede parecer que pone en tela de juicio, tanto mi deseo de servicio, como la citada frase bíblica. Pero no; la validez de cuanto precede es compatible con el hecho de ser el paraninfo de la apertura de curso, ya que no sólo supone un doble honor y ocasión de perpetuarme de modo distinguido en los anales de nuestra Universidad, sino que, así mismo, es uno de los más globales servicios que se puede prestar al pueblo que la acoge.

Por ello, la lección que pretendo impartir, en un momento en que España accede de pleno derecho a la Comunidad Europea, creo que no puede ser otra que la de ofrecer mi experiencia docente e investigadora ante la rápida evolución de la matemática. Experiencia profundamente marcada y enriquecida por los seis cursos de docencia en la Universidad de Paris y los siete de labor investigadora en l'Ecole Normale Superieure y el Instituto Henri Poincaré, amen de unas más breves estancias en universidades de Dinamarca, Gran Bretaña e Italia, principalmente. Así esta lección inaugural, la centésima cuadragésima segunda, desde la implantación de la correspondiente normativa en 1845, quiere presentarles algunas de las referencias y consideraciones que me conducen a establecer lo que entiendo es un notable paralelismo histórico en la evolución de la matemática y principales consecuencias que implica en su enseñanza, hoy.

LA MATEMÁTICA, LA SOCIEDAD Y LA COMUNIDAD EUROPEA

PREÁMBULO

A las razones que anteceden, pretendiendo justificar la elección del tema de esta lección inaugural del curso 1988-89, se suma la razón pedagógica académica de estimar que puede ser de mayor interés y utilidad general, en lugar de haber elegido el desarrollo de un tema específico de la cátedra de Geometría 5º (Diferencial) de la que soy titular.

Este mayor interés y utilidad aludidos se hallan trivialmente en que con su exposición comprenderemos mejor el inmenso valor socio-cultural (que no metafísico) que a la Matemática[1] corresponde en la Historia de la Humanidad. Desde la codificación de ritos religiosos en las civilizaciones primitivas a los actuales problemas que plantea la tecnología punta. Pretendemos, también, hacer ver el gran interés de la Matemática –en particular de la Geometría- y el de los estudios filosófico-matemáticos que abordan hoy, su evolución y su enseñanza, ante la creciente incidencia de la Matemática en todos los ámbitos de la vida humana. La exposición que sigue, con sus limitaciones, no puede ser considerada como la de un especialista en historia, filosofía y didáctica de la matemática –si es que un tal especialista pudiera existir- sino como el fruto de un perseguido encuadre histórico y filosófico-matemático de mi especialidad y de mis cuarenta y dos años de experiencia docente en matemáticas a distintos niveles y especialidades.

El aludido paralelismo surge al observar que, en el siglo XIX y, precisamente hacia 1.845, tuvo lugar: primero, de la mano de F. Bolyay, C. F. Gauss, N. I. Lobatchevski y G. F. B. Riemann[2] la aparición de las geometrías no euclídeas;

[1]) Matemática = $\mu\,\alpha\,\theta\,\eta\,\mu\,\alpha$ = “instrucción”, “aquello que puede ser pensado” según Pitágoras.
[2]) Lobatchevski entre 1.835 y 1.838 publicó su Foundations of Geometry.
Riemann en 1854 en su Habilitationschrift establece la más amplia y profunda visión de la geometría como estudio de

segundo el desarrollo de la revolución industrial; y tercero la aparición del profesional de la ciencia. Mientras que en este siglo y en torno a 1955 aparecen: primero los trabajos en teoría de conjuntos de K. Gödel y P. J. Cohen, esencialmente, más la irrupción del ordenador con H. Wang[3], para "demostrar" teoremas, con la consiguiente multiplicidad de planteamientos en toda la matemática -que no pérdida de certidumbre-; segundo, el desarrollo de la revolución informática; y tercero ante la, aún, no bien apreciada profunda influencia en la informática en la ciencia, técnica y valores culturales, la aparición de una nueva figura de hombre culto, numéricamente muy superior a la del actual profesional, cuya actividad social absorberá la de éste, centrándola en una acción esencialmente docente y creadora, como gerente en una sociedad altamente robotizada.

Paralelismo que, en cuanto a la Matemática se refiere, se confirma por el hecho de que, como sucedió a fines del siglo XIX, hoy también se vuelven los ojos hacia la filosofía de la matemática. La diferencia, en este recurrir a la filosofía, se halla en que, en lugar de buscar una fundamentación de la Matemática, se busca responder a la pregunta de ¿qué es la Matemática?; determinar la *verdadera naturaleza de la Matemática* y con ella el método o métodos que permitan su óptima docencia a todos los niveles. En cierto sentido se trata de comprender y actualizar correctamente las ideas que expuso Platón en su obra "Lección sobre el Bien". La interpretación que de tal obra dio Aristóteles (y sus seguidores), para los que "Platón resolvió el problema de los fundamentos del Bien y de la Matemática identificando ambos", condujo a considerar la Matemática como un "sistema Euclídeo de eternas verdades", modelo de ciencia poseedora de la verdad absoluta superior a todas las demás, y filosóficamente base de la certeza del conocimiento humano.

Pero, como es sabido, a esta interpretación aristotélica de Platón, también se debe la crisis del pensamiento que ocasionó la aparición de las geometrías no Euclídeas iniciales (hiperbólica, elíptica y esférica) y su rechazo por el pensamiento de la primera mitad del siglo XIX.

---

variedades de cualquier dimensión. Las llamadas hoy variedades diferenciables riemannianas.

[3]) Gödel de 1930 a 1956, ver Heijenoort, edit. "From Frege to Gödel", Harvard Univ. Press, 1967.
Cohen de 1963 a 1975, ver "The Independence of the Continuun Hypothesis", Proc. N. A. S. , 50 y 51, y referencias en Bibliografía.
Con Hersch: "Non-Cantorian Set Theory", 1968, en "Mathematics in Modern World", Freeman and Cº.
Wang: "Toward Mechanical Mathematics", en Sayre & Cooson, ed. , The Modeling of the Mind (Notre Dame, Ind.: Univ. Press, 1963).

Hecho que se interpreta por algunos[4] como "la pérdida de certidumbre en la Matemática". Hoy, tal crisis no sólo se halla superada, sino que se conoce el recto pensamiento de Platón. Por ejemplo, unos dos mil trescientos años después, A. N. Whitehead, en la introducción a la edición de sus obras completas en 1948, escribía: "*La noción de la importancia del modelo es tan vieja como la civilización. Cada arte se funda sobre el estudio del modelo. La cohesión de los sistemas sociales depende del mantenimiento de modelos de comportamiento, y los avances en las civilizaciones dependen de la afortunada modificación de tales modelos de comportamiento. Así, la infusión de modelos en los acontecimientos naturales, la estabilidad y/o codificación de tales modelos es la condición necesaria para la realización del Bien. La Matemática es la más potente técnica para el entendimiento del modelo y para el análisis de las relaciones entre modelos. Aquí, encontramos la justificación fundamental para el tópico de la lección de Platón. Ante la inmensidad de la materia de su sujeto, la Matemática, incluso la matemática actual es una ciencia en sus balbuceos. Si la civilización continúa avanzando, en los dos mil años próximos, la novedad sobresaliente del pensamiento humano será el dominio del pensamiento matemático*."

Pero nuestra elección es consecuencia, también, de la reciente incorporación de España al Mercado Común Europeo. Al hacernos solidarios del nivel de investigación y desarrollo tecnológico europeo, nuestra aportación debe sumarse a la, ya, iniciada realización de la "Europa de la investigación y de la Tecnología", de modo que pueda superarse el hándicap que supone la excesiva fragmentación, aislamiento, mala circulación de información y falta de coordinación que presentan los distintos países de la Comunidad. Si en los campos investigador y tecnológico, España interviene, hoy, a través del "Programa Marco" en su segundo periodo (1987-1991), la incorporación, a través de los programas ERASMUS (encauzando la movilidad de estudiantes) y el COMET (en cuanto a intercambio de profesores) apenas se están aprovechando por la comunidad matemática española. Sin embargo, estos programas son precisamente los que mayor interés y beneficio pueden reportar a los matemáticos y a su actividad en la sociedad europea, y, en particular, en la española. Ahora bien, si estos programas ERASMUS y COMET pueden ser, hoy, del mayor interés para la actualización y futura coordinación de la docencia e investigación en matemáticas, entre los distintos países de la comunidad, entendemos que sólo

[4]) R. Kline: Matemáticas. La perdida de la certidumbre. 1983.

lo son de modo puntual, transitorio y de refuerzo de una estructura, ya establecida. Es esta estructura y sobre todo la docente en matemáticas, ya establecida, la que debe actualizarse en más de un campo o dominio, la que debe orientarse hacia la atención de las necesidades que hoy nos presenta la sociedad, y ello no puede (ni debe) esperarse llegue a ser resuelto por programas comunitarios. Se necesita la elaboración e implantación de unos nuevos y adecuados planes de estudios en matemáticas. ¿Es ésta la labor que se pretende efectuar con los casi, ya, elaborados nuevos planes de estudio que disponga la L. R. U., a nivel universitario, y, con la L. O. D. E., a nivel secundario?. El proceso es recurrente ¿se coordinan entre sí con la E. G. B.? y todos con los demás países de la Comunidad Europea? Cuando se está operando un proceso descentralizador de competencias en Educación y Ciencia, esto es aún más relevante.

No existe rama de la matemática, por abstracta que sea, que no pueda algún día ser aplicada a los fenómenos del mundo real.

Lobatchevsky

Matemática y su incidencia social.

Los que recibimos una educción secundaria previa a la introducción de la llamada "Matemática Moderna", en el bachillerato y la enseñanza primaria, y seguimos una formación universitaria de tipo marcadamente formalista en unas asignaturas, sintética en otras y en algunas memorística, sin haber tenido ocasión , con posterioridad, de participar en la elaboración ni implantación de ninguno de los planes de estudio que pusieron en práctica en España tal Matemática Moderna, creo tenemos la obligación moral de hacer pública nuestra opinión, fruto de la experiencia vivida. Máxime cuando, como sucedió en mi caso, tuvimos ocasión de contrastarla en labores de investigación y docencia en la universidad de París, próximos al célebre grupo Bourbaki. Ver también el artículo "Research Mathemaricians in Mathematics Education" en el Vol. 35, (6), 1988 del Notices of the A. M. S.

Y esta opinión, creo es tanto más interesante cuanto que, internacionalmente, hoy, empiezan a detectarse fallos y descontento en el movimiento educacional denominado "Vuelta a lo básico" (back-to-basikcs) que surgió hacia 1978, como reacción al movimiento "Matemática Moderna" y de los que hablaremos más adelante.

Una de las principales razones que motivaron el movimiento "Matemática Moderna", fue, sin duda, el aumento de rigor que el pensamiento matemático experimentó desde finales del siglo XIX, concretamente desde unos años antes de la consagración oficial de la teoría de los conjuntos en el primer Congreso Internacional de Matemáticas, (Zurich 1.897), hasta 1950. El desarrollo de la "Lógica matemática" y la "Teoría de la demostración" como subproductos de las escuelas logicista y formalista, más los trabajos de Gödel –particularmente, los que condujeron a la noción de función recursiva general y su equivalencia a la computabilidad teórica de funciones numéricas (máquinas de Turing), abriendo paso a la demostración de teoremas por computadora que inició H. Wang en 1950 sobre sencillos teoremas de los Principia de Russell y Whitehead, pusieron en evidencia la necesidad de una mayor precisión y y rigor matemático.

LOS SISTEMAS AXIOMÁTICOS

La pérdida de confianza en la geometría –al aparecer las no euclídeas- como sistema de verdades absolutas y modelo del razonamiento, llevó a fundamentar la Matemática en la teoría de números, es decir, reducir el continuo a la aritmética, que condujo, naturalmente, a la teoría de conjuntos. Este paso de fundamentar la Matemática sobre el continuo a fundamentarla sobre la aritmética –lo discreto- llevó al algebrista Kronecker a exclamar: "Dios creó los enteros y el resto es obra del hombre".

El primer intento de rigorización del pensamiento matemático lo realizaron los griegos mediante la axiomatización de las bases de una teoría, ejemplo de este proceso lo proporcionan los "Elementos de Euclides", método que se halla al origen de los "sistemas axiomáticos formales" actuales. Para Euclides, los axiomas son "enunciados o principios inteligibles por la razón más allá de toda duda. A partir de los cuales, "mediante razonamiento lógico deductivo, se obtienen las conclusiones características de los conceptos de la teoría". Según Aristóteles, "mediante nuestra infalible intuición, en un *análisis posterior*, se conocía que los axiomas eran ciertos". Entre los axiomas, Aristóteles distinguió las *nociones comunes* y los *postulados*. Las nociones comunes eran aquellos enunciados o principios que no podían ser establecidos por razonamiento de previos enunciados previos de la teoría. Los postulados eran proposiciones que, dadas por ciertas, se tenía alguna esperanza de poder demostrar algún día. Su utilización fue casi exclusiva de la Geometría.

El mayor rigor que permitió la aproximación axiomática puso en evidencia la necesidad de utilizar "términos indefinidos" como se les llamó en el siglo XIX (el término definido no puede entrar en la definición o circulo vicioso y se evita la regresión infinita). Los axiomas, en cualquier lenguaje formal, hacen afirmaciones sobre conceptos indefinidos (y definiciones), o sea, nos muestran lo que puede ser afirmado. Como dice Lakatos se "inyecta" en ellos la verdad de la teoría. El "más allá de toda duda" o auto-evidencia de los axiomas, fue algo que, exigido inicialmente, con la aparición de las geometrías no euclídeas, dejó de considerarse como condición que tendría que satisfacerse en un "sistema axiomático formal". En definitiva, un "sistema axiomático formal" está constituido por:

Primero: ……………….términos indefinidos.

Segundo: …………… definiciones.
Tercero: ……………. axiomas.
Cuarto ……………… Conclusiónes (lemas, teoremas y corolarios).

A las leyes del razonamiento lógico-deductivo consideradas por Aristóteles, (silogismos, la del tercio excluso, etc.), los sistemas axiomáticos actuales añaden reglas de inferencia explícitas, y más destacadamente la lógica proposicional: y el uso de cuantificadores.

Los axiomas de un sistema formal no pueden ser arbitrarios sino que el correspondiente sistema ha de satisfacer las condiciones de ser:

a) Consistente. ………….(no encerrar contradicción).
b) Completo ……………..(todo enunciado cierto del sistema se deduce de los axiomas).
c) Independiente ……… (ningún axioma del sistema puede deducirse de los demás).

La caracterización de los sistemas axiomáticos formales, particularmente el de los Grundlagen der Geometrie de Hilbert, puso en evidencia las limitaciones del sistema del pensamiento euclídeo: utilización de hechos no establecidos ni como axiomas (intuiciones espaciales, . . .), redundancia de axiomas, falta de autoevidencia, demostraciones de construcciones geométricas, etc. Ahora bien, independientemente de los fallos originados por la inserción de la teoría de conjuntos en la enseñanza en los distintos niveles, hoy se sabe que no toda deducción posee su modelo en una manipulación en la teoría de conjuntos, como pensaron los neopositivistas. De hecho, se necesita, al menos, considerar la existencia de universos de definición de categorías no pequeñas, es decir no modeladas sobre una categoría de conjuntos. Esta limitada y relativa utilidad de los sistemas axiomáticos formales, exige una reflexión sobre su amplio uso practicado por la Matemática Moderna y concluir con R. Thom que: “la axiomatización es un trabajo de especialistas y no tiene cabida ni en la enseñanza secundaria, ni en la de primer ciclo de licenciatura, excepto para aquellos profesionales especializados en el estudio de los fundamentos”. Filosóficamente el proceso de axiomatización puede considerarse encuadrado en el conceptualismo.

LA MATEMÁTICA MODERNA

Para introducir en la docencia esta superior necesidad de rigor de la matemática, entre otras razones, en 1952, el Comittée of School of Mathematics de la Universidad de Illinois redactó un plan de estudios para la enseñanza de la Matemática en EE. UU. Que si, de momento, no tuvo mayor atención, fue la base del movimiento “Matemática Moderna”.

Curiosamente, no fueron las razones “técnicas” ni didácticas las que llevaron a implantar los planes de estudios de la “Matemática Moderna”, sino unas paradójicas razones sociales o públicas. Según René Thom, en el segundo Congreso Internacional sobre Educación Matemática (ICMI), de 1972, en Exeter (G.B.), los hechos sucedieron así: “Existía, sin duda, un sentimiento de relativa frustración en la comunidad matemática, durante los años 1950-1960; inquietud respecto a los físicos, favorecidos financieramente por los resultados en la energía nuclear (y aparatos); inquietud respecto a los biólogos famosos por el descubrimiento del D. N. A. y el código genético. Durante estos mismos años las matemáticas hicieron grandes e importantes avances en Geometría Algebraica y Topología Algebraica, pero estos avances no despertaron el interés del público en general.

El lanzamiento de satélites (1957-60) atrajo la atención pública sobre las teorías matemáticas (y notablemente sobre las de la computación). Para reavivar su interés, se recurrió a la “Matemática Moderna”.

Debo añadir que del mismo periodo provienen nuevas y fecundas disciplinas matemáticas (como el “Algebra Homológica” y la “Teoría de Categorías”) con su incidencia en la estructuración de la “Teoría de Autómatas y Lenguajes Formales”, o la teoría de “Topos de Grothendieck” cuyo contenido, interés y aplicaciones no ha cesado aún.

Hemos dicho que unas paradójicas razones sociales fueron las que condujeron a la implantación de los planes de estudios basados en la “Matemática Moderna”. Y en efecto así fue: el lanzamiento del primer spútnik en 1957 no tuvo relación alguna con la Matemática Moderna, los planes de estudios en la URSS seguían planes docentes distintos de los occidentales y los de aquella época en nada se parecían a los inspirados en la llamada Matemática Moderna.

Si la comunidad matemática consideró que era imprescindible un mayor rigor y desarrollo de la capacidad de abstracción, y el didacta de la matemática se preguntó: ¿qué enseñar para alcanzar tal fin? -lo que *casi* consiguió responder- las circunstancias que atravesaba la sociedad, (buscando poseer lo más rápidamente posible una educación y formación científica que permitiera atender las necesidades de la acelerada tecnología y crecimiento económico que siguió a los años 1945 y sucesivos), impidieron reflexionar sobre el *cómo enseñar*, limitando y dando lugar, en general, a que degenerasen los métodos docentes. A nivel universitario también ocurrió lo mismo, debido principalmente a la masificación. Estas circunstancias deterioraron dramáticamente la calidad pedagógica del docente, particularmente del de la enseñanza primaria, en general más necesitada en su nivel de una consistente y actualizada formación matemática, y eso pese a los cursillos intensivos que se impartieron. Y tengamos en cuenta que este nivel es, precisamente, el que está más dirigido y resulta más patente a los padres.

Con el movimiento Matemática Moderna se consiguió alertar a la sociedad y se favoreció, indirectamente, la creación de nuevas secciones de Matemáticas: en Gran Bretaña de catorce, pasaron a cuarenta y cinco; prácticamente sucedió lo mismo en Francia y Alemania (D. F. R.). En España de las tres existentes en 1955, se ha pasado a las veintiuna actuales. Esto está permitiendo atender la superior demanda de profesionales de la matemática por parte de la sociedad.

Todos conocemos, sin embargo, cómo fracasó el Movimiento Matemática Moderna. Desde luego, no sólo por razones técnicas objetivas, sino por las subsidiarias de su puesta en práctica (rapidez en la elaboración de planes sin evaluación posible, textos incorrectos, profesores sin preparación suficiente pese a los cursillos de reciclaje, etc. . . .) que, con el tiempo, podrían haberse superado fácilmente. Por ejemplo, mediante una preparación suplementaria para la adquisición de habilidades de cálculo en aritmética; eliminación del formalismo conjuntista, a cambio de una nueva reinserción de la geometría en los curriculums -como ya se venía recomendando desde años atrás y que, con ámbito internacional, fue recogido en el Segundo Congreso Internacional sobre Educación Matemática (ICMI) de 1972- referido todo ello a la problemática social que rodea al alumno y a la de su vida habitual.

Otros de los fines perseguidos por los planes de estudio basados en la Matemática Moderna fueron: que con ellos se iba a permitir un mejor desarrollo de la capacidad de razonamiento; que el alumno adquiriría un mejor “saber hacer”; un mayor y más cuidado desarrollo de su entendimiento, liberándole de la agobiante y esterilizadora enseñanza repetitiva o memorística. Con el transcurso de los años, esto fue motivo de otro de los cargos que se hicieron a la Matemática Moderna. Los padres y docentes se quejaban de haber pasado de un extremo a otro, de haber descuidado el cultivo de la memoria. Particularmente creo que, en realidad, lo sucedido fue que se dejó de cultivar la memoria sin, mejorar por ello el desarrollo del entendimiento -al menos en los niveles primario y secundario- a lo que no fueron ajenas las razones subsidiarias que indicamos más arriba. Este descuido en el cultivo de la memoria fue otro de los cargos contra la Matemática Moderna.

Asímismo, la aparición, hacia fines de 1965, de la calculadora de bolsillo de modo masivo, a nivel tecnológico y superior fue algo positivo, al sustituir eficazmente el uso de ábacos y reglas de cálculo. En la enseñanza secundaria y primaria supuso un nuevo factor en detrimento del cultivo de la adecuada práctica y desarrollo de la agilidad de cálculo mental en el alumno.

Más de un especialista en didáctica de la matemática dedujo de todo lo anterior que era imposible hacer *entender la matemática* al alumno medio, si su exposición se efectuaba lejos de la actividad diaria. Esto era cierto respecto al formalismo conjuntista, pero no lo era, sin embargo, respecto a la incorporación de la calculadora de bolsillo.

EL TÓPICO “VUELTA A LO BÁSICO”

Las deficiencias citadas hicieron patente la necesidad de corregir la enseñanza de la matemática que se practicaba, particularmente al matemático y al especialista de su didáctica, al observar que, pese a los reciclajes del profesorados, no mejoraba su docencia.

Lakatos publicaba una obra en 1976 en la que, después de un vigoro ataque al logicismo y al formalismo, sentaba las bases de una nueva filosofía de la matemática: la escuela “casi-empirista” o “falibilista”, de la que hablaremos más adelante.

Los especialistas en didáctica de la matemática, que habían llegado a la conclusión de que era imposible hacer *entender* la matemática al alumno medio, creyeron ver en esta nueva escuela la fundamentación de una nueva y necesaria pedagogía de la matemática. ¿Cómo realizar el cambio de los planes de estudio que con tanta esperanza se habían introducido con el apoyo de las fuerzas vivas y de toda la sociedad?

Fue de nuevo la opinión pública la que favoreció el cambio: padres incómodos ante su incapacidad para ayudar a sus hijos en el estudio de la llamada matemática moderna; creencia de que lo se enseñaba no era matemática; supuesta confirmación de tal creencia al observar la decreciente capacidad de cálculo numérico de sus hijos; el convencimiento de que la enseñanza primaria de la matemática no capacitaba a los alumnos para utilizarla en el mundo que les rodea (su enseñanza degeneró, en muchos lugares, en la práctica de una serie de juegos cerrados en sí mismos: fichas, regletas, colores, etc.), etc. Estos lamentables hechos aglutinaron una opinión contraria a la indebida docencia y equívoco modo de fijar el contenido teórico del tópico Matemática Moderna". Este último aspecto había sido puesto ya en evidencia, principalmente respecto a la geometría, por gran número de matemáticos desde hacía años: (24, a) y referencia al ICMI de 1972 ya citada.

Hacia 1978, en Francia, surgió la idea de designar esta reacción al tópico Matemática Moderna con otro tópico. En aquellas momentos, en la enseñanza inglesa, se buscaba corregir las deficiencias que en la escritura del alumnado se venían observando y surgió un movimiento público bajo el slogan "vuelta a lo básico" (back-to-basics). Se sugirió que este mismo slogan podía también representar el tópico que, basado teóricamente en ideas que figuraban en la escuela casi-empirista de Lakatos, recogiera la nueva orientación de la enseñanza de la matemática, que se buscó como reacción a la desarrollada sobre el tópico "Matemática Moderna". En 1980, en Cuarto Congreso Internacional sobre Educación Matemática, este tópico se adoptó por unanimidad. Basándose en la escuela casi-empirista, también en 1980, surgió el "The Mathematics in Society Project" (MISP) para el intercambio de ideas en la enseñanza de la Matemática. Proyecto al que contribuyó España desde su fundación y que, hoy, reúne unos treinta países.

Lo anterior condujo, hacia 1981, a un paulatino, pero decidido cambio de los planes de estudios basados en la “Matemática Moderna” por los basados en “volver a lo básico”, mediante la introducción de lo que se denominó “método de definición extensiva”, apoyado en la experiencia, no en el análisis. El cambio no ha sido simultáneo, sino que ha estado condicionado por el carácter centralista, o no, de las autoridades docentes de cada país, y la mayor o menor consciencia de la sociedad de la posible solución que al problema planteado podía ofrecer el tópico “vuelta a lo básico”.

Este movimiento trata de basar la pedagogía de la Matemática sobre conceptos más relacionados con la vida diaria, orientándola de modo más práctico, centrando su atención en responder a la cuestión ¿cómo enseñar?, más que ¿qué enseñar? Precisemos que si la Matemática Moderna fue adoptada con el apoyo del público, y con él se evidenció su fracaso y rechazo, así mismo la adopción de los planes de estudio del movimiento “vuelta a lo básico” se efectúa con el beneplácito y apoyo de los padres de los alumnos que veían que podían volver a asumir su papel de creída competencia matemática, junto a la interior satisfacción de más de un profesor que había “rebotado” sobre la Matemática Moderna. Cuando se está hablando de educación permanente , de la necesidad de reciclaje periódico del especialista, ¿qué sentido tienen tales posturas?

Socialmente, pues, la adopción del movimiento “vuelta a lo básico” en matemáticas aparece así con un *marcado carácter de reacción frente a la “Matemática Moderna”*. Salvo los especialistas en didáctica de la matemática que inventaron el tópico “vuelta a lo básico”, ningún matemático puntero o de vanguardia emitió informe alguno, contrariamente a lo que sucedió con el estudio realizado por lka Universidad de Illinois respecto al movimiento “Matemática Moderna”. Lo que aparece claro es que la postura de los especialistas en didáctica que introdujeron el movimiento “vuelta a lo básico” fue opuesta al proceso de gestación del movimiento “Matemática Moderna”, y ello debe tenerse muy en cuenta.

Por otra parte no ha habido tiempo suficiente para contrastar los resultados de una buena enseñanza basada en el correcto planteamiento de la Matemática Moderna. Entre otras razones -como las relativas a su contenido- por falta de suficiente profesorado debidamente formado en los niveles primario y secundario.

Después de unos quince años de experimentación de equívoco y defectuoso planteamiento, ¿cómo puede afirmarse la bondad o inferioridad de un método? Supuesta una igualdad de nivel de formación, de aptitudes y mediasen los que dirigen las experiencias, no es el número de casos, independientemente del tiempo y del corpus, lo que permite decidir con alguna seguridad de criterio. Sin embargo, las limitaciones y fallos del movimiento "vuelta a lo básico" se hacen ya patentes. Destaca notoriamente, la paradójica exclusión de la geometría de los planes docentes, coincidiendo en ello con uno de los defectos de la Matemática Moderna, y la vuelta a una enseñanza memorística.

Es fundamental desarrollar la estructura lógica del pensamiento humano o reglas del razonamiento correcto, respetando la imaginación y potenciando la intuición del individuo. La Lógica es esencial para la Matemática, aunque no sea toda la Matemática. A. Weil lo expresa sí: *"Si la Lógica es la higiene de la Matemática, ella no es su alimento"*. Yo creo que, además de una higiene de la Matemática, es un potente medio de comunicación social. Más allá de un idioma, la Lógica es el medio del razonamiento en el pensamiento indoeuropeo. Si no se considera *este imprescindible desarrollo de la estructura lógica de la Matemática en la elaboración de cualquier plan de estudios*, en cualquier nivel que se proyecte, mucho me temo que bajo el pretexto del carácter social y de la inserción de la Matemática en la vida diaria etc., que se alega como razón esencial de la enseñanza basada en el tópico "vuelta a lo básico", *lo que se conseguirá es detener el desarrollo matemático y, con él, el de la clarificación epistemológica de la ciencia y la técnica*.

El hombre, *además de falible, será incapaz de progresar*, de abordar nuevos problemas que la natural evolución de la humanidad no dejará de plantearse. La formación que se conseguirá será la de un "saber", en lugar de un "saber hacer", objetivo prioritario de una buena formación. La educación se limitará a *la transmisión del resultado* sin consideración alguna al *proceso de su obtención*. El aprendizaje se reduce, así, al acopio de habilidades y estrategias (numéricas, etc.), más que al desarrollo del entendimiento y de la capacidad de reflexión y análisis sobre cualquier otro problema. Se vuelve, así, a la tan criticada enseñanza memorística de acumulación de recetas para resolver problemas –siempre análogos o viejos problemas- que tanto rechazaban la sociedad, los universitarios y los estudiosos de mi juventud. Hecho que pude experimentar durante los años en que practiqué la docencia, en Madrid, con jóvenes futuros ingenieros superiores.

El efecto socio-cultural de tal orientación, “vuelta a lo básico” de la enseñanza de la Matemática, por desgracia, no se hará esperar colectivamente. Gracias, en gran parte, a la multiplicación de secciones de matemáticas, antes aludida que de modo indirecto provocó la Matemática Moderna, y a que *es más fácil, mucho más cómodo, desarrollar la memoria del individuo que su entendimiento*. Sin embargo, estoy convencido de que la realidad acabará imponiéndose y se hallará una didáctica de la Matemática que, basada en la orientación formal que el rigor y la estructura lógica de la Matemática exige, se haga compatible con la visión de su incidencia en la actividad humana de cada día.

Diversas experiencias se están siguiendo, hoy, próximas a este orden de ideas: Las Clínicas matemáticas en EE. UU., el Ingeniero matemático en Francia, Suiza y Alemania o el Magisterio matemático en Francia, que no acaban de satisfacer, como se puso en evidencia en el citado coloquio “Mathematiques à venir. Quels mathematiciens pour l’an 2ooo? (27, b) Personalmente, creo que toda aproximación a *una docencia de la matemática que, en cada persona respete su imaginación, potencie su intuición, desarrolle su entendimiento y capacidad de razonamiento analógico, lógico y plausible, vigorice su memoria y facilite su real inserción en la actividad humana de cada día debe recurrir al vehículo natural que supone la Geometría.* Como lo evidencia el desarrollo histórico genético del pensamiento matemático al que, trivialmente, se le puede aplicar la ley de recapitulación de Haecke que establece que: “en su desarrollo el individuo pasa a través de todos los estadios de la especie”. De hecho todos sabemos que las matemáticas más antiguas y las más recientes se completan de modo análogo a como lo hacen los órganos de todo ser vivo. La Ciencia ignora lo que son las llamadas matemáticas modernas o las basadas en la vuelta a lo básico.

EPISTEMOLOGÍA DE LA MATEMÁTICA HOY.

Hemos indicado, más arriba, que un resultado positivo indirectamente debido a la Matemática Moderna fue el aumento de secciones de matemáticas en las universidades. En España también ha originado un aumento de Escuelas de

Ingeniería, Institutos de EE. MM. Y Centros de Formación Profesional. Con estas medidas se puede atender mejor la demanda de profesionales de la Matemática que hace la sociedad. Téngase en cuenta que (10) el denominado “milagro alemán”, posterior a la II Guerra Mundial, se debió, principalmente, a la existencia de un numeroso y bien instruido grupo de técnicos medios (Formación Profesional e Ingeniería Técnica).

Hoy esta demanda, no sólo no ha cesado, multiplicándose en el técnico medio, sino que presenta, además, una serie de destacadas y profundas exigencias –para cuya atención se ha podido verificar (27, b) que son más aptos los llamados matemáticos puros que son sustraídos a la Universidad por la industria punta- que parece quieren ser atendidas con los nuevos planes de estudios en gestación. No sabemos si en su elaboración se tiene en cuenta, junto a los fallos del movimiento “vuelta a lo básico”, que con la entrada en vigor del Acta Única Europea, en 1992, existirá un libre mercado de profesionales entre los distintos miembros de la Comunidad Europea, junto con la posibilidad para el estudiante de cursar los estudios superiores en cualquier universidad europea o escuela de ingeniería de la Comunidad, en las condiciones que fijará la futura reglamentación de la Carta Magna de las Universidades Europeas.

Análogamente, (27, b) ante este 1992 y teniendo en cuenta otros problemas particulares de la docencia e investigación de la matemática en Francia, en diciembre de 1987, en L’Ecole Polytéchnique (Palaisseau, París) tuvo lugar un coloquio titulado “Mathematiques à venir. Quels mathematiciens pour l’an 2000? (citado en lo que sigue MVQM) que facilitó un encuentro entre las fuerzas vivas de la sociedad francesa (poder ejecutivo y directores de gabinetes de investigación de industrias tales como M. D’Assault, Thomson, Elf-Aquitaine, etc.) y más de un millar de matemáticos, investigadores y docentes de los distintos niveles. Con el coloquio se inició un estudio que pretende determinar el tipo de curriculum, (en los niveles secundario y superior, preciso para la formación matemática de los profesionales que deben hacer frente a la problemática que en su campo plantea la competitividad industrial y comercial, en el previsible y perseguido desarrollo tecnológico y científico de los próximos tres lustros. Se vuelve así a resaltar el aspecto utilitario que durante los cuatro o seis lustros primeros de este siglo dominó en la matemática y su educación y llevó a centrarlas en las habilidades aritméticas y de cálculo geométrico básico. Se repiten hoy, *centrándose principalmente en las exigencias matemáticas de una modelización y simulación sobre ordenador.* En su conferencia en el MVQM , el Prof. Lions, un destacado matemático especializado en las aplicaciones de la matemática dijo: *"hoy no se trata de matemáticas puras y aplicadas sino de matemáticas útiles e interesantes".* Destaca de nuevo el paralelismo entre las dos épocas de la Matemática indicadas al principio de mi lección. Creo que sería muy conveniente para la mejor elaboración de los nuevos planes de estudios en matemáticas en España, - tanto en la enseñanza secundaria como profesional y universitaria- aunque su puesta en práctica tuviera que demorarse, el estar informados de las consideraciones y conclusiones que vayan alcanzándose en Francia en los estudios iniciados con el citado coloquio MVQM sobre el curriculum, hoy, más idóneo para la docencia de la Matemática de cara al año 2000. Desde luego, *no para copiarlos sino para analizándolos frente a nuestra realidad cultural, ver qué pueden aportarnos* a fin de que nuestra integración en la Comunidad Europea en este campo, se facilite y nos permita ser de la mayor utilidad. Como dice Ortega y Gasset: "Búsquese en el extranjero información pero no modelo".

Por lo dicho se evidencia que la matemática, que para Gauss era la "reina de las Ciencias", y para B. Russell podía ser definida como "el sujeto sobre el que nunca sabemos de lo que hablamos, ni si lo que decimos es cierto", frase que aclaró añadiendo: "Si nuestra hipótesis es sobre algo y no sobre una o más cosas particulares, entonces nuestras conclusiones constituyen matemáticas", aparece como mucho más que una serie de relaciones, axiomas, conceptos, reglas, fórmulas, teoremas, métodos o teorías". Como toda actividad humana, presenta o posee una gran carga social. Son las distintas actividades del ser humano en la sociedad las que generan, más o menos directamente, las distintas partes de la Matemática. Es decir, la matemática parte de las diversas actividades del ser humano, lo que sugiere objetos y operaciones (suma, multiplicación, comparación de formas y dimensiones, etc.) que están contenidas en el edificio matemático construido a partir de un sistema axiomático formal o dentro de una adecuada categoría y universo matemático. Presenta así codificadas gran número de profundas y no obvias propiedades de las distintas actividades humanas.

Vemos, pues, que las disciplinas matemáticas vienen determinadas por las actividades del ser humano en el que podemos llamar *universo existencial de la* *humanidad*, noción que debe entenderse comprendiendo junto al concepto del modelo matemático de la lógica o modelos formales de aspectos del mundo y experiencias humanas (en el que se hallan codificados los objetos del mundo físico, experiencias de la humanidad y relaciones entre ellos) las construcciones mentales como las de una teoría de K-módulos, de Haces, de Categorías, de los Topos o de los Números, aún cuando esta última junto con la Aritmética pueden considerarse originadas por la acción de contar. Otros conceptos de disciplina y concepto matemático, y actividad humana que la genera son: el de número real y la Teoría de Funciones originados por la acción de medir en sentido amplio, o la Geometría y Topología que lo son por la acción de configurar y comparar formas; o la teoría de Grupos que lo es por la simetría de las figuras y composición de transformaciones; o bien la Probabilidad, Teoría de la Medida y Estadística originadas por los problemas aleatorios. Así mismo, el Algebra y Análisis Numérico aparecen originados por la acción de calcular; la Combinatoria por la acción de agrupar y establecer correspondencias entre conjuntos finitos, etc. Resumiendo, resulta clara la interacción entre Matemática, Ciencia, Tecnología y Sociedad. En particular ante la revolución informática, desde la década de los 60, se exige entender la Matemática en su relación con los problemas que le plantean aquellas, y nos vemos así conducidos a considerar *la epistemología de la Matemática como un intento de entenderla como una actividad humana*.

Todas las partes de la Matemática, como las actividades del ser humano que las originan, interactúan entre sí con gran complejidad. Esta implicación de la complejidad de la actividad del ser humano en la Matemática, es la que nos permite afirmar que el estudio de la actividad matemática precisa de la ayuda de la filosofía, y sólo en este orden podremos alcanzar una noción de la Naturaleza de la Matemática, de su contenido y, así, preguntarnos: ¿Qué es la Matemática? Cuestión que desde el punto de vista de la filosofía de la matemática es de carácter ontológico. Este carácter junto al epistemológico, intento de entender la Matemática como una actividad humana, aparecen así como complementarios y, de hecho, sólo seremos capaces de atender debidamente las superiores exigencias, cada día más profundas, que nos plantea la sociedad, hoy, si somos capaces de aproximar mejor la solución del doble problema que supone:

a) Conocer mejor la naturaleza de la Matemática
b) Saber adaptar la docencia de la Matemática a la sociedad actual y la

previsible evolución de la misma en los próximos 15 ó 20 años.

¿Qué situación nos ofrecen en la actualidad, cada uno de estos problemas? ¿Qué medidas u orientaciones sería prudente o aconsejable aplicar para aproximar su solución?

Nuestra exposición trata de presentar una actual visión general del punto a). En cuanto el b), nos limitaremos a esbozarlo con algunas sugerencias y reflexiones adjuntando al final el estudio demográfico por quinquenios del profesorado de la universidad española en los diferentes estudios y áreaas matemáticas. En posterior trabajo, en elaboración, presentaremos un estudio detallado y el análisis de las conclusiones más importantes que de él se desprenden.

Es más fácil de conseguir la cuadratura del círculo que hacer variar de opinión a un matemático.
Augusto de Morgan

Naturaleza de la Matemática

Cualquiera que sea nuestro campo de actividad, debemos coincidir con la opinión de Tymozcko al afirmar que “Los resultados matemáticos parecen ser los paradigmas de precisión, rigor y certeza. Los resultados y métodos matemáticos son, con frecuencia, sorprendentes y elegantes, ocasionalmente revelan una austera, abstracta belleza más típicamente encontrada en las artes. La Matemática invade nuestra vida social y ha ayudado a formar la sociedad moderna. La ciencia es inconcebible separada de la matemática y frecuentemente medimos el rigor o dificultad de una ciencia por la cantidad de matemática que emplea. Dependemos de las matemáticas cuando construimos puentes, aviones, utilizamos ordenadores u obtenemos dinero de cajeros automáticos”.

La filosofía de la matemática comienza cuando preguntamos por un contenido general de la Matemática, una visión sinóptica de la disciplina que revela sus caracteres esenciales y explique exactamente cómo es que los seres humanos son capaces de hacer matemáticas y que estas sean tan eficaces en la vida.

Cuando se abordan textos como el Courant-Robbins que, con el título “¿Qué es la Matemática?”, presenta una colección de problemas y teorías matemáticas, dejando (¿para el lector?) la labor de síntesis que le permita establecer una definición de la Matemática, o cuando se leen o escuchan afirmaciones de matemáticos reconocidos, como la ya citada anteriormente de Russell, o aquella de M. Kline para el que “La Matemática es un cuerpo del conocimiento que no tiene verdades”, nos invade la perplejidad si se las compara con la diaria aplicación de las distintas partes de las matemáticas a las actividades humanas. Es esta implicación constante de la actividad matemática en la sociedad la que nos lleva a afirmar que la Matemática posee un carácter de ciencia objetiva con las circunstancias conceptuales que ello comporta.

Es claro que alcanzar tal carácter rigurosamente es muy delicado y sutil, pues dimana de la filosofía de la matemática, del concepto de demostración, verificación, rigor y verdad cuyo más preciso establecimiento se debe a la escuela formalista. Hace sólo unos ocho o diez años que el interés por la filosofía de la matemática ha vuelto a resurgir, después de los cincuenta años de letargo ante el fracaso de su fundamentación por las distintas doctrinas filosóficas, fracaso del que no fue ajeno el trabajo de K. Gödel, particularmente el que se refiere al principio de indecidibilidad en la Matemática publicado en 1931.

Es de señalar que , ante el mejor conocimiento de la matemática que el desarrollo de tales doctrinas ha permitido, las modernas Lógica matemática, Teoría de conjuntos e intuicionismo (con sus variantes constructivistas) han pasado a ser consideradas como nuevas ramas específicas de la Matemática como lo son el Algebra y la Topología. El estudio de estas nuevas ramas aunque aparecen englobadas en lo que se ha dado en llamar "Fundamentos de la Matemática", no supone hacer avanzar la filosofía de la matemática: Precisamente como evidencia la Lógica matemática, mientras sólo estudiemos el conjunto de teoremas matemáticos y nos alejemos de estudiar la actividad matemática, los problemas que tratan de los fundamentos de la matemática no podrán ser resueltos. Ahora bien, el estudio de la actividad matemática, como ejercicio del individuo en la sociedad, reposa fuertemente sobre la filosofía, de ahí que una buena definición de la Matemática, de la naturaleza de la Matemática, debe buscarse con ayuda de la filosofía. Es ella la que podrá proporcionar una prueba de su consistencia lógica y, a la vez, el reconocimiento de su utilidad social.

Esta utilidad, por ejemplo, es la que se persigue hoy con el tratamiento y búsqueda de la solución del gran número de problemas que plantea la tecnología punta (lanzadoras espaciales, robots elásticos, etc.). Las ciencias medioambientales, biológicas, sociales y psicológicas (teorías de simulación y de modelización), la complejidad de sistemas, la elaboración de lenguajes de programación y teoría de códigos a implementar sobre ordenador (con su análisis y verificación), o aquellos de la teoría de la demostración (con la variante originada por la "demostración por ordenador") o la construcción de algoritmos, etc.

Es bien sabido que el mejor conocimiento de la matemática que las distintas escuelas filosófico-matemáticas permitieron, pese a que ninguna pudo resolver el problema que se plantearon, se halla en la base del enorme desarrollo que la matemática ha experimentado, desde la década de los 30 hasta nuestros días. ¿Puede extrañarnos, ahora, que haya resurgido el interés por la filosofía de la matemática?

Para mejor orientar y comprender qué debemos hoy entender por matemática conviene realicemos una breve y actual revisión de las principales doctrinas o escuelas filosófico-matemáticas surgidas a finales del siglo pasado o a principios del actual, buscando su fundamentación, así como la reciente visión de Lakatos con la escuela Casi-empirista o Falibilista.

Entre las doctrinas o escuelas que, de un modo u otro, han destacado en el análisis de la naturaleza de la Matemática, hay que citar: el Empirismo, el Logicismo, el Intuicionismo, el Formalismo, el Estructuralismo, el Platonismo y el Casi-empirismo. Sus orígenes, aún cuando para algunos historiadores sea anterior, hay que buscarlos en los cambios experimentados por el pensamiento matemático durante el siglo XIX para las cuatro primeras más aquellos alcanzados en el primer tercio del siglo XX para el Platonismo, y la inadaptada y abortada experiencia docente de la Matemática Moderna junto al rechazo del Formalismo por el Casi-empirismo.

De Jacobi se dice que proviene la frase “Dios hace siempre Aritmética”. Frase que actualizó el clásico pensamiento de Platón: “Dios hace siempre Geometría”, pero que lo volvemos a encontrar en el orden de ideas del pensamiento de Gauss antes citado. Esta frase de hecho refleja el sentimiento del pensamiento matemático de la segunda mitad del siglo XIX en su relación con el pensamiento filosófico de Aristóteles a Kant. Resume la tendencia surgida con la aparición de las geometrías no euclídeas, que pretendió perpetuar el papel de seguridad y fundamentalidad, de consistencia e inmutabilidad que gozaba la geometría en las ciencias por el de un Análisis no apoyado en la Geometría. Surgió así la obra iniciada por B. Bolzano, N. H. Abel y A. L. Cauchy buscando la rigorización de los fundamentos drel Análisis en la Aritmética y que concluyó K. Weierstrass con su definición de número real hacia 1870. Este último publicó en 1872 el primer ejemplo de función continua sin derivada en punto alguno que permitió conocer mejor el Cálculo Infinitesimal creado por Newton y Leibniz.

Si para el Análisis se alcanzó una rigorización independiente de la geometría, que pareció afianzar su seguridad e inmutabilidad como parcela de la Matemática, no ocurrió lo mismo con la Geometría que, desde mediados del siglo XIX, experimentó profundas crisis: primero con el descubrimiento de las geometrías no euclideas, después con su algebraización por Descartes al introducir en ella las coordenadas. Surgen de este modo, junto al concepto de número real, toda una serie de nuevas estructuras conceptuales como la noción de espacio vectorial de dimensión finita o infinita (tan querida por los físicos) y que permite codificar alguno de los métodos del Análisis Funcional o las nociones que subtiende la introducción de una Teoría de Conjuntos por Peano, etc.

Un efecto de estos cambios fue constatar lo que se dio en llamar falta de fundamentación de la Matemática. Es decir, los matemáticos se encontraron sin un repertorio sistemático de la naturaleza de las estructuras sobre las que operaban, viendo dificultado su trabajo con una constante aparición de paradojas, cuando aquel vació trató de ser colmado por la Teoría de Conjuntos.

Para salvar esta situación se recurrió a la filosofía de la matemática, es decir, se procedió: *"a estudiar la Matemática mediante análisis, aumentando gradualmente su abstracción y simplicidad lógica, y, al seguirla, en lugar de averiguar qué es lo que podemos concluir o deducir de las nociones primeras que se dan por admitidas, preguntarnos cuales son las ideas y los principios generales que permiten definir lo que tomamos como punto de partida"* (Russell, 22).

La presentación de las escuelas que se citan a continuación se efectúa con la óptica actual de búsqueda de la correcta y completa definición de la Matemática y no se tiene en cuenta la motivación de fundamentación que originó la mayoría de ellas.

EL EMPIRISMO

Fue en el siglo XIX cuando, por primera vez, se habló de utilidad de las matemáticas y cuando se introdujo la distinción entre matemática pura y aplicada. La primera comprendía el tratamiento del Álgebra, Geometría y Análisis o Combinatoria en cuanto a sus leyes o reglas, definiciones y teoremas, que incluía las geometrías no euclídeas; mientras que la segunda comprendía toda el área en que la Matemática se aplica a conjuntos de objetos, o elementos del mundo externo que la revolución industrial hizo destacar y que en Inglaterra se denominó Física Teórica, es decir, el sistema de conceptos, teoremas y leyes reunidos por Newton en sus Principia en 1.687.

Quizás la distinción encubrió un aspecto más sutil propio de la concepción filosófica reinante a que ya hemos aludido. En aquella época, para el pensamiento filosófico, desde Aristóteles (no según Platón) hasta Kant, la geometría euclídea fue considerada como incuestionable ejemplo de conocimiento apriorístico no trivial, un sistema de absoluta certeza. La adscripción hoy aún a esta filosofía explicaría la frase de R. Hersch (26, b) de que tal significado de la geometría fuese admitida "incluso por los matemáticos". Evidentemente, si ello hubiera sido así, los matemáticos no hubieran descubierto las geometrías no euclídeas. Para salvaguardar –por encima de todo- tal filosofía no se les ocurrió analizar los orígenes de las ideas de Aristóteles. Fue más cómodo conservar socialmente el pensamiento filosófico introduciendo la distinción entre matemática pura y matemática aplicada, respaldada por otra parte, por ser la última prácticamente la única conocida por la sociedad. La segunda se desarrolló ampliamente y de modo falible en contacto con la actividad industrial, dando lugar a lo que hoy se llama una matemática producto. La primera quedó en manos de una minoría que, no sintiendo la necesidad de considerar aplicaciones salvo, quizás, a la física teórica, hizo cuanto pudo por confirmar su supremacía intelectual dogmática, buscando, como veremos en el logicismo, una adecuada fundamentación de su infalible saber. Hoy la postura de todo verdadero matemático –que no distingue entre puro y aplicado- es más humilde y admite que puede equivocarse, sin ningún prejuicio al tener la seguridad que la Matemática está desligada de toda metafísica, y de que como dice Thom: "No existe caso en la história de la Matemática en que el error de un hombre haya arrojado el campo entero sobre el camino equívoco" (24, a).

Obsérvese que, en el carácter empirista que se atribuye a la matemática del siglo XIX, la geometría se incluyó entre las disciplinas puras, lo que, quizás, explique el por qué de no haber sido jamás sometidas sus proposiciones al chequeo empírico, aunque, ciertamente, los primeros conocimientos de la geometría euclídea fueron empíricos. Ello se debió a la presentación que de la misma dio Euclides, quien al axiomatizarla eliminó su carácter figural o particular concreto.

En un acercamiento social, el aspecto más llamativo que, en consecuencia, ofrecía la Matemática era el producido por aquellos más numerosos profesionales de la matemática que en contacto con la industria o la docencia, elaboraban tablas, efectuaban cálculos, y utilizaban formularios o practicaban una enseñanza recetaria y memorística de caracteres dogmáticos, si bien trata de desarrollar la habilidad de cálculo numérico y geométrico en el estudiante. Este aspecto hacía la Matemática tan falible como las experiencias físicas que trataba de describir o la enseñanza que se practicaba, desplazando su razón de ser de los tradicionales valores formativos y estéticos a aquel del utilitarismo (entre ambas tendencias se sitúa la obra, de fines del siglo XIX, "Cours de Mathématiques Élémentaires, por F. G. M. seudónimo con el que se presentaba un grupo de docentes francés afines a G. Darboux). La minoría, determinada por los "puros", constituía un mundo lejano y limitado, cuya actividad de búsqueda de la fundamentación de la matemática era curiosamente estimulada, principalmente, por razones extramatemáticas, y, desde luego, ajenas a la actividad humana ordinaria o general.

Como confirma por otra parte la frase de Hersch antes citada, el desarrollo de la Matemática se considera no tanto como la labor de esta minoría sino, principalmente, como la del profesional de la Matemática aplicada que codificaba la creciente actividad industrial. Es decir como un "proceso descubridor". Ahora bien, ¿qué es lo que se descubre?. Existe una enorme diferencia entre el habitual proceso material de descubrir algo físico (el nuevo mundo, la penicilina, ...) y el que se diga "Newton ha descubierto el teorema del binomio", o "Leibniz descubrió el cálculo infinitesimal" , etc. Más generalmente, ¿existen verdades matemáticas en algún tipo de absoluto sentido de las mentes humanas, o por el contrario son invención del hombre?. Este invención, ¿se puede comparar con la creación musical o artística?.

La respuesta del empirismo a estas cuestiones nos la da G. Hardy al decir: "creo que la realidad matemática yace fuera de nosotros, y que nuestra función es *descubrirla, observarla*, y que los teoremas que probamos y que describimos grandilocuentemente como nuestras *creaciones* son simplemente notas sobre nuestras observaciones”, lo que puede considerarse también como una teorización de alguna realidad platónica subyacente.

La visión que el empirismo tiene de la Matemática es coterminal con el de la Física Teórica en un carácter fenomenológico.

LOGICISMO

Una de las primeras consecuencias de la crisis del conocimiento que provocó la aparición de las geometrías no euclídeas, como hemos dicho, fue el que se buscase (Dedekin, Weierstrass, etc.) la fundamentación de la Matemática en la Aritmética, en lugar de en la Geometría. El matemático del siglo XIX, en general, no podía admitir que no fuese poseedor de la verdad absoluta, de la certeza que desde Aristóteles a Kant había gozado su ciencia.

Este paso, que llevaba a reducir el continuo a la Aritmética, condujo naturalmente a la teoría de conjuntos, que ante los trabajos de Boole, hizo que se creyera, con Frege, que la fundamentación de la Matemática se podía efectuar con la Lógica en la Teoría de Conjuntos más esencialmente que sobre la Aritmética. Esta esperanza fue destruida por Russell con su paradoja “el conjunto de todos los conjuntos”, quien junto a Whitehead buscó una reformulación de la teoría de conjuntos que, evitando las paradojas hasta entonces observadas, permitiera la fundamentación buscada. La reformulación la efectuaron introduciendo un sistema de axiomas que respetaba el “principio del círculo vicioso”, pero su sistema axiomático formal está, aún, impregnado de un cierto sentido intuitivo y atrajo más a los lógicos que a los matemáticos. Como anécdota se dice que Russell, al no poder probar el axioma de elección, lo miró escépticamente, buscó contradicciones y, en una conferencia pronunciada en la Sociedad Matemática de Francia en 1911, animó a los demás a que los buscasen también.

Se puede, pues, decir que, aunque fue iniciada por el filósofo Frege en 1884, y entre sus predecesores debe contarse con George Boole con su obra “The Mathemátical Analysis of Logic”, la escuela no fue lo suficientemente conocida hasta principios del siglo XX en que se incorporan Russel (con su afirmación de que la matemática pura había sido descubierta por Boole) y Whitehead que ya en 1898 había publicado su Álgebra Universal. Los dos últimos publicaron en 1910 sus

“Principia Matemática” que aunque, inicialmente sólo atrajo a los filósofos lógicos, constituye una presentación formal de la teoría de conjuntos, sin que llegase a ser “completa”. Sin olvidar el destacado y más reciente logicista Carnap.

El propósito de los logicistas fue demostrar que la matemática era parte de la Lógica. Con este fin desarrollaron su Principia Matemática Russell y Whitehead, y demostraron que la matemática clásica (conocida en su tiempo) podía deducirse de la teoría de conjuntos y, por tanto, de su Principia. El programa de los logicistas quedaba de este modo reducido a probar que tales axiomas del Principia pertenecían a la lógica, o bien los de cualquier otra teoría de conjuntos como la de aquella más conocida de Zermelo-Frenkel[5] (1908 y 1922, respectívamente) cuyo sistema es, hoy, el más utilizado y conocido, aunque no sea lo suficientemente rico para contener todos los conjuntos.

Entonces según Russell y Whitehead la Matemática puede definirse así: “*La Matemática consta de todo lo que puede ser formulado y probado a partir de los axiomas de Zermelo-Frenkel*”. Esta definición podemos considerarla, incluso hoy, casi aceptable en el sentido de que, salvo alguna cuestión de la teoría de categorías, toda la matemática clásica puede deducirse de ella. Pero esta definición ¿es útil desde el punto de vista de la filosofía de la matemática?, ello equivale a preguntarnos si *¿está libre de contradicción el sistema de Zermelo-Frankel*?. Ahora bien, puesto que no se sabe cómo probar la consistencia de los axiomas de Zermelo-Frankel, esta definición no es muy útil y menos aún si se observa que niega todo intuicionismo. Obsérvese que si se probase que los axiomas de Zermelo-Frankel pertenecen a la lógica, aunque el programa de los logicistas quedaría probado o satisfecho, se encontrarían con el problema de la existencia, o no, de contradicción en la Lógica.

---

[5])
1.- Axioma de extensionalidad: Todo conjunto está determinado por sus elementos.
2.- Axioma del conjunto vacio: Existe el conjunto vacío.
3.- Axioma de los pares no ordenados: Existe un elemento a = (x, y) para todo x e y.
4.- Axioma de la unión de conjuntos: La unión de un conjunto de conjuntos es un conjunto.
5.- Axioma del infinito: Existen conjuntos infinitos (este axioma permite existan cardinales transfinitos).
6.- Axioma de sustitución: Toda propiedad que puede ser formalizada en la teoría puede utilizarse para definir un conjunto.
7.- Axioma de la potencia de un conjunto: Para cada conjunto x existe el conjunto y de todos los subconjuntos de x.
8.- Axioma de elección: Dado un conjunto y, en toda parte x de y se puede elegir un elemento.
9.- Axioma de regularidad: Cada conjunto no vacío x contiene un elemento minimal respecto a la relación de pertenencia. Brevemente se puede enunciar diciendo que “X no pertenece a X”.

De todos modos, el programa de los logicistas está condicionado por su concepto de Lógica. El significado que le atribuyen es más amplio que el atribuido a la Lógica clásica, a la que se supone constituida por todos aquellos teoremas que pueden ser probados (sin la utilización de axiomas no lógicos) en un lenguaje de primer orden (o cálculo de predicados de primer orden), es decir, en un sistema lógico que incluye funciones proposicionales, conexiones y cuantificadores (que no es la Lógica aristotélica, pues su defecto, precisamente, está en la lógica de las relaciones, no le es posible operar con funciones proposicionales). La lógica clásica, así considerada, nos limita al uso de las reglas de deducción y axiomas de esta Lógica. Un ejemplo de tales reglas lo constituye la Ley del tercio excluso: Si p es una proposición, entonces es cierta p o su negación ¬p", simbólicamente: "Se verifica p v ¬p", donde v y ¬ designan las conexiones intuicionistas "o" y "no" suscritas por Brower.

Con esta definición de Lógica de ningún modo podría llevarse a cabo el programa de los logicistas. Pero l noción de Lógica que admiten los logicistas es mucho más amplia, poseen un concepto general que precisa lo que entienden por "proposiciones lógicas". Para ellos *"Una proposición lógica es una proposición que tiene completa generalidad y es cierta en virtud de su forma, más que por su contenido"*.

Por ejemplo la ley del tercio excluso "Es cierta p v ¬p" es una proposición lógica en sentido logicista. Claramente en esta proposición, p puede ser de la física, la matemática o lo que se quiera. La ley se verifica con toda generalidad, ¿pero, entonces por qué se cumple? Los logicistas responden "A causa de su forma". Aquí sobrentienden "forma sintáctica". Recíprocamente, todo teorema de la Lógica clásica es una proposición en el sentido logicista. Ahora queda claro que el fin de los logicistas es demostrar que los nueve axiomas de Z-F son proposiciones lógicas en el sentido logicista. Pero, como puede demostrarse, eso no es cierto. Por ejemplo el axioma del infinito reposa, notoriamente, sobre la noción intuitiva que todos tenemos de un conjunto infinito y no sobre su forma. Sin embargo el logicismo ha contribuido particularmente al desarrollo actual de la Matemática, en especial al de la Lógica matemática en el cuadro formalista.

A diferencia del formalismo e intuicionismo, el logicismo proporciona un adecuado cuadro de una significativa parte de la actual práctica de la Matemática. En realidad una gran parte de la Matemática es Lógica, pero todo matemático sabe que su mejor trabajo está basado no sobre meras elucubraciones o razonamientos, sino sobre una característica clase de percepciones que denomina *intuiciones*.

Esta intuición del matemático es un caso especial de la habilidad general del ser humano para distinguir métodos o vías, o más específicamente sintetizar estructuras complejas de señales o aspectos diversos. Es decir, la intuición por el matemático de una particular estructura es simplemente el resultado de una larga experiencia con aquella estructura. *La creatividad en matemáticas es mucho más un resultado de la intuición que de la lógica*.

El logicista considera que la Matemática es un cuerpo de verdades que no se establecen sobre nada real. Por ejemplo, tienden a pensar que la geometría es una disciplina hipotética. Ahora bien, es claro que, como hemos dicho, los primeros conocimientos de la Geometría Euclídea fueron empíricos. Las geometrías no euclídeas, sólo demuestran la consistencia lógica de la negación del postulado de las paralelas, no prueban que éste sea falso.

A la escuela logicista se la considera basada sobre el pensamiento filosófico conocido con la denominación de "Realismo", cuyo origen hay que buscarlo en la filosofía platónica, según la cual los entes abstractos sobre los que se opera poseen una existencia independiente de nosotros, con lo que la mente humana puede descubrirlos, pero no crearlos. Con ello se establece la diferencia esencial entre logicismo e intuicionismo.

INTUICIONISMO

Se puede afirmar que esta escuela se inició con Brouwer en 1908. Aunque alguien sitúa en la línea intuicionista a T. Bradwardine (1290-1349) por su filosofía sobre la Matemática, y a Sylvester que considera como objetivo de la matemática pura la descripción de las leyes del mundo de los sentidos, pasando por la indefinid a postura de H. Poincaré (1854-1912), quien pese a que admitió la axiomatización de la Geometría y el Análisis, negó la axiomatización de la Aritmética y llegó a emitir opiniones como aquella que afirma que "*el Logicismo no es estéril, engendra* *antinomias*", y así sin suscribir su filosofía se le sitúa entre los simpatizantes de la escuela intuicionista. La confirmación de la fina intuición matemática de Poincaré, que supuso la demostración por Gödel de que la consistencia de la Aritmética no puede ser probada por métodos finitarios, es decir, *por métodos formalizables de la propia Aritmética,* acaba de reforzarse recientemente por G. J. Chaitin al demostrar, ¡nada menos!, que *la estructura lógica de la Aritmética puede ser aleatoria*. Otros representantes del Intuicionismo son A. Heyting y E. Bishop, aunque este último no aparezca tan subjetivista como Brouwer.

El fundamento de la Matemática para los intuicionistas fue radicalmente distinto al de los logicistas. Los logicistas nunca pensaron que pudiera existir algo equívoco en la matemática clásica, al contrario que los intuicionistas, que piensan que está llena de errores.

Las paradojas que originó el tratamiento no axiomático e ingenuo, dado por Cantor, de la teoría de conjuntos, desde 1870, fue la chispa que provocó la reacción intuicionista, estimando que tales paradojas demostraban que la matemática clásica estaba lejos de ser perfecta. Sintieron, pues, la necesidad de reconstruir la Matemática desde su base, y esta fue el concepto de número natural. Según los intuicionistas, todo ser humano posee una primordial intuición para los números naturales en sí mismo, que permite *la construcción mental de un número natural finito cualquiera "después de otro"*. El término "*después*" supone una conciencia de tiempo que Bouwer comparte con Kant, quien utilizó la palabra "*intuición*" para expresar el conocimiento o "*conciencia inmediata*" y es de ahí de donde procede la palabra "*intuicionismo*".

Conforme con la filosofía intuicionista, la Matemática sería definida como una actividad mental que llaman *construcción* y no como un conjunto de teoremas (como se hace en el Logicismo). La definición precisa de la Matemática para los intuicionistas sería: "La Matemática es la actividad mental que consiste en realizar *construcciones mentales* una después de otra". La Matemática para el intuicionista es *inventada* mediante construcciones.

Una de las consecuencias de esta definición es que la Matemática intuicionista es efectiva o *constructivista*. Otra consecuencia es que las matemáticas no pueden reducirse a cualquier otra ciencia tal como, por ejemplo, la Lógica. Toda ley de la lógica clásica que no está compuesta de una construcción después de otra es una combinación de palabras sin sentido para los intuicionistas. Por ejemplo la clásica ley del tercio excluso es una simple combinación de palabras sin sentido para el intuicionista.

Ahora bien, una vez que la definición intuicionista de la Matemática ha sido entendida y aceptada, lo que queda por hacer es, precisamente, toda la matemática de modo intuicionista. Efectivamente, esa labor fue emprendida por los intuicionistas que desarrollaron la Aritmética, Álgebra, Análisis, Teoría de conjuntos, etc. Sin embargo, en cualquiera de estas ramas existen teoremas que no son iteración de construcciones, de modo que los intuicionistas los consideraron combinaciones sin sentido de palabras. En consecuencia, no se puede decir que los intuicionistas han reconstruido toda la matemática clásica.

Pero ello no les preocupa, ya que el propósito de los intuicionistas es dar una definición válida de Matemática y, entonces, "esperar y ver" qué matemática se desarrolla. Es decir, aquella parte de la matemática clásica que no puede hacerse intuitivamente, sencillamente, no es matemática para ellos. Según Brouwer no se puede admitir el principio del tercio excluso, ya que no se posee una construcción intuitiva que lo justifique. Ello *equivale a tomar la palabra intuitivo en contraste con formal*. Se dice que un argumento es intuitivo "si es natural y fácil de seguir", es decir, una demostración se dice intuitiva, en este orden de ideas, si no es formal, independiente de símbolos, y quizás ni siquiera comunicable enteramente (hecho bastante corriente en algunos componentes de la escuela de la Geometría Algebraica italiana de finales del siglo XIX, principios del XX, o en la clásica matemática sintética).

El mérito del intuicionismo es el de proporcionar ideas sobre el proceso de creación en la Matemática. Al ser ésta una parte de la Ciencia, con la solución de problemas aparece su fin principal: el de descubrir nuevas verdades, que es lo que subtienden las "construcciones", y con ello, el que la invención matemática se halle limitada por la necesidad de rigor. Una obra típica de esta escuela la constituye el "Foundations of Constructive Analysis" de E. Bishop (1967) que llevó a los modernos especialistas en Lógica matemática, por un lado, a buscar un sistema formal que la encuadre y, por otro, a integrar sus métodos constructivistas en la teoría de la demostración, a la vez que gran parte de la obra era expresada algorítmicamente por los teóricos de la tecnología de la información. Esta actividad nos evidencia *la existencia de una íntima relación entre la matemática constructivista y la teoría de algoritmos* y, como consecuencia, que el interés actual por la matemática constructivista sea, en gran medida, un subproducto de la influencia cada vez mayor de los ordenadores sobre la Matemática. Particularmente, con la utilización en el desarrollo de logiciales o software para chequear teoremas mecánicamente, así como en construcciones de la lógica formal, o en la corrección de programas de computación.

Como fundamentación de la Matemática fue una doctrina bastante aceptada. Los intuicionistas se sienten satisfechos pensando que han dado una adecuada fundamentación de la Matemática, aunque mirada desde la matemática clásica, es claro que no han sido capaces de dar tal fundamentación. Así, la casi total comunidad matemática rechaza el Intuicionismo pese a sus grandes y bellas realizaciones. Por ejemplo, curiosamente ya que se debe al intuicionista Brouwer, el "teorema del punto fijo de Brouwer" en Topología, es uno de los que los intuicionistas rechazan, pues el punto fijo no puede ser construido, sólo se demuestra su existencia. Otra objeción se halla en algunos teoremas que pueden demostrarse clásica e intuitivamente, mientras la clásica es elegante y breve, la intuicionista es rebuscada y larga, a veces hasta diez veces más larga. También existen teoremas que, siendo válidos intuicionistamente, son falsos en matemática clásica. Por ejemplo, el que afirma que toda función a valores reales que está definida para todos los reales es continua. Estas tres razones de rechazo del intuicionismo por la matemática clásica, de todos modos, no son ni racionales ni científicas, ni pragmáticas, sino emocionales, *basadas en un profundo sentido personal de lo que son las matemáticas por encima de todo*, como diría Thom. Es claro, también, que no debe confundirse el concepto ni la actividad de la escuela intuicionista con el de la intuición matemática a que hemos aludido en el último punto sobre logicismo.

Del mismo modo en que el logicismo está relacionado con el realismo, el Intuicionismo está relacionado con la filosofía llamada "conceptualismo". Esta es la filosofía que sostiene que las entidades existen sólo si son construidas por la mente humana, hecho que limita su potencial actividad.

FORMALISMO

Esta escuela fue creada en 1910 por D. Hilbert (1862-1943), aunque ya en el siglo XIX existieron formalistas, pues Frege los atacó en su segundo volumen de Fundamentos de la Aritmética. Sin embargo, el concepto moderno de formalismo, que incluye el razonamiento finitario, se debe a Hilbert a quien “todo le parece preferible a la introducción de la psicología en los criterios de validez de la Matemática”. Su labor se vio confrontada por el intuicionista Brouwer, lo que originó fuertes discusiones entre ambos que, desgraciadamente, en algún momento, llegaron a reflejarse en sus relaciones personales. Dado que la mayoría de los textos de Matemáticas, hoy, (entre ellos lo de la Matemática Moderna”) y cursos de Lógica Matemática habitualmente tratan con formalismos, esta escuela es mucho mejor conocida que las otras. Habría que destacar a formalistas con J. Von Newmann y H. Curry.

¿Qué es lo que se formaliza, cuando formalizamos algo?. Claramente lo que se formaliza es una teoría axiomática dada. Debemos, pues, distinguir bien entre axiomatización y formalización. Euclides axiomatizó la Geometría unos 300 años a. C., pero no la formaliza. Es decir, efectúa una presentación de la Geometría mediante “formas abstractas sin materia o contenido” en el contexto de lo que se conoce por una “teoría axiomática”. Es pues una teoría no “figural”, lo que conduce a algunos a decir que la Geometría de Euclides es una teoría axiomática “formal”, significado de formal que no debe entenderse como el que se opone al expresado con la palabra informal. Esto justifica el que en el siglo XIX no se considerase la Geometría entre las disciplinas aplicadas. Pero si no puede ser considerada como disciplina del hacer matemático aplicado, tampoco constituye lo que se entiende por una “teoría axiomática formalizada”.

¿Cómo formalizamos una teoría axiomática dada T de modo que nos determine un sistema axiomático formal S? Limitándonos a una lógica de primer orden, “Formalizar T” significa elegir un apropiado lenguaje de primer orden para T. El vocabulario de un lenguaje de primer orden consta de cinco “datos”, cuatro de los cuales son siempre los mismos y no dependen de la teoría T, que son: primero, una lista numerable de variables; segundo, símbolos para la conexión de cada frase: ¬ para “no”; Λ para “y”; v para “o”; => para implica; y ⇔ para si y sólo si; tercero, el signo de igualdad =; y cuarto, los cuantificadores “para todo” V y “existe” ∃ .

Puesto que T es una teoría *axiomatizada*, tiene los denominados "*términos indefinibles*". Se elige un símbolo apropiado para cada término indefinible de T y estos símbolos pasan a constituir el quinto dato del vocabulario. Por ejemplo, entre los términos indefinibles de la Geometría Euclídea aparecen "el punto, la recta y la incidencia" y para cada uno de ellos debe ser fijado un símbolo apropiado. Para la Aritmética está el "cero", la "suma" y el "producto" que pasan a ser simbolizados. Todos estos símbolos correspondientes a los términos "indefinibles", a veces, se les llama "parámetros". La cuestión que plantea entonces Thom es: ¿Se puede, razonablemente, esperar que el material intuitivo codificado en la teoría axiomática T, pueda ser cubierto completamente por las expresiones simbólicas de S? Para seguir diciendo: "Lingüistas de la escuela formalista han estado tratando vigorosamente de reducir la sintaxis y gramática de un lenguaje natural a axiomas. Al hacerlo así han propuesto un cierto número de procedimientos formales (gramáticas transformacionales y generativas) cuya validez, sobre el nivel de la descripción formal de los enunciados contenidos en el corpus no puede negarse. Pero si estos procedimientos llegan a sistematizarse en una serie de reglas que son proseguidas ciegamente a su conclusión lógica, las afirmaciones resultantes, con frecuencia, llegan a ser tan largas y complejas que pierden todo sentido". Pero lo que sucedió es que, mediante el desarrollo como sistema axiomático formal que dio a la Geometría Hilbert con sus Grundlagen der Geometrie (cuyo estudio debí efectuar en mi primer curso de licenciatura -hacia 1948-) se demostró que el rigor que se atribuía a los Elementos de Euclides era ilusorio en su mayoría y que en ellos se acude con gran frecuencia a la intuición del estudioso. Esta fue una de las razones por las que los puristas del movimiento Matemática Moderna decidieron su eliminación de los curriculums universitarios y su sustitución por el Algebra. Y ello, incluso se efectuó en buena medida en nivel secundario y de formación profesional. Curiosamente este hecho, que insistimos, se halla en la base de una de las razones del rechazo público de la Matemática Moderna, sigue siendo sostenido por didactas de la Matemática seguidores de la concepción falibilista de Lakatos, cuyo inicio se destacó por su tajante oposición al formalismo.

Desde luego para probar un teorema esta formulación puede incluso hacerse odiosa. Ver, por ejemplo, la obra de Peano, citada en la bibliografía. Sin embargo, si lo que se pretende es responder a una cuestión de Fundamentos, como "¿Por qué es esta rama de la Matemática libre de contradicciones?, entonces la formalización no sólo es una ayuda, sino que es de absoluta necesidad.

Es esto, en realidad, lo que se consiguió con el célebre “Programa de Hilbert”. La idea fue formalizar las distintas ramas de la Matemática y entonces probar matemáticamente que cada una de ellas estaba libre de contradicción.

Desgraciadamente, los formalistas tampoco pudieron llevar a cabo su programa. En 1931 K. Gödel demostró que *la formalización no podía ser considerada como una técnica matemática por medio de la que se podía probar que la Matemática estaba libre de contradicción*. “La Matemática no es capaz de probar su propia libertad de contradicción”.

Desde luego la tremenda importancia de la escuela formalista es bien conocida. Fue, precisamente, en esta escuela en la que la moderna Lógica matemática y sus diversas ramas, -tales como la teoría de modelos, teoría de las funciones recursivas, etc.- encontraron el marco idóneo para su estudio y desarrollo. Para los formalistas cualquier precisión del significado de los símbolos, supone una codificación de alguna parte de la Matemática, actividad matemática que en un sistema formal es estudiada por la “Teoría de las funciones recursivas” y que resulta, así, de incalculable valor para conocer las limitaciones de la matematización. Así la noción de “construcción” de la escuela intuicionista puede entenderse como la realización de los programas subyacentes a esta posibilidad de codificación, lo que conduce a más de un matemático a pensar que jamás se podrá resolver un problema recursivamente insoluble.

Pese a las llamativas manifestaciones, como las del profesor J. Weizenbaum del M. I. T. en su libro “Computer Power and Human Reason” cuando dice: “que el hombre y la computadora son simplemente dos especies diferentes de un género más abstracto llamado “sistemas de procesamiento de la información” y así concluir que “la vida es lo que es computable y sólo eso”, la incompletitud de los sistemas formales establecido por Gödel (ni siquiera todas las verdades de la Aritmética pueden derivarse de los axiomas de Peano –o de cualquier otro conjunto de axiomas recursivamente más amplio-) nos permite tener la seguridad de la imposibilidad o absurdo de tales afirmaciones, máxime cuando, como ya hemos hecho notar, no todo el universo existencial de la humanidad puede ser estructurado por la Lógica. Es con este sentido y limitación, al menos, como debe entenderse la adhesión a esta escuela de los investigadores en Inteligencia Artificial, cuando asimilan el cerebro humano a un ordenador, las teorías a programas y el pensar a una máquina de Turing. Recuérdese que con tal nombre A. Turing, en 1936, dio a conocer la clase de máquinas computadoras teóricas que son capaces de realizar todas las operaciones requeridas por un algoritmo asociado a una función computable , (es aquí donde se presenta lógicamente la imposiblidad de la idea de Weizenbaum). Precisamente, una función se dice computable si existe un algoritmo que permite calcular sus valores para cada argumento, ya que, en este caso, es posible programar una computadora "implementando el algoritmo" y calcular el valor de la función.

Como indicábamos en publicación anterior, el formalismo desde el punto de vista filosófico-matemático, supone desinteresarse del problema que crearon las distintas paradojas (Burali-Forti, Russel, etc.) ante la teoría de conjuntos de Cantor.

Para terminar señalemos que la filosofía que aparece más próxima al formalismo es el "nominalismo". Para el nominalismo los entes abstractos no tienen existencia de ninguna clase, ni fuera de la mente -como sostiene el realismo- ni dentro, como construcción mental según mantiene el conceptualismo. Para el nominalismo son simples nombres. La opinión dominante sobre esta escuela del pensamiento matemático nos viene expresada por un destacado bourbakista, Dieudonné, quien afirma que: "el principal mérito del método formalista será el de haber disipado definitivamente las oscuridades que pesaban aún sobre el pensamiento matemático".

ESTRUCTURALISMO

Corresponde a lo que algunos consideran la "caracterización de la Matemática por el estudio de estructuras abstractas", aunque este movimiento puede encontrarse en lingüística e historia. En Matemática estructuralista creo que pueden distinguirse dos caracteres: primero, la "opción Bourbakista"; segundo la que denomino "categorias y topos". Aunque el primer carácter es el creador del movimiento y se prolonga hoy en los dos caracteres, el segundo puede distinguirse por un superior nivel de abstracción, y la incorporación de métodos constructivistas principalmente por especialistas ajenos al bourbakismo.

La opción bourbakista

Surgió en París hacia 1935 cuando un grupo de jóvenes matemáticos se propusieron "dar una descripción completa de todos los dominios esenciales de la matemática" (27, a) y para ello el concepto de estructura les fue esencial. La noción formal de *estructura* (ver Apéndice A) *válida independientemente de la categoría de los conjuntos* se precisa en el libro primero de las "Estructuras fundamentales del análisis" de sus Elementos de Matemáticas, obra inicial de Nicolás Bourbaki, pseudónimo con el que se dio a conocer el grupo. Este ambicioso proyecto, en cierto sentido, pretendió extender a toda la Matemática la obra que Emmy Noëther con sus alumnos, algunos años antes, realizó en Alemania con el Álgebra. H. Cartan, uno de los más destacados fundadores del grupo, en una conferencia en 1958 decía: "¿Dónde residen las ventajas de una clasificación de estructuras de la Matemática? Lo que sigue es evidente. Si, por ejemplo, tienen establecidos los teoremas fundamentales de la teoría de los espacios topológicos, pueden entonces aplicar estos teoremas a todo espacio topológico particular. Así, por ejemplo, un teorema topológico de Baire que se refiere a los espacio métricos completos es aplicable a numerosas cuestiones específicas del análisis superior, en particular de la teoría de las funciones analíticas". Bourbaki (2) se mantuvo al margen de la controversia entre las escuelas formalista e intuicionista como expresa su frase: "Lo que el método formalista establece como su objetivo, es exactamente lo que el formalismo lógico por sí mismo no puede establecer", y es evidente que bajo la presentación lógico formal de su obra más conocida, los "Elementos de Matemáticas" -que situaría equivocadamente a Bourbaki en la escuela formalista- existe una rica imaginación y una bien cultivada intuición, como testimonia la obra de los más, inicialmente, activos fundadores del grupo: A. Weil, H. Cartan y C. Chevalley.

Como decimos en (27, a), "si analizamos su obra, observamos que, la *fundación axiomática*, la edificación de las teoría mediante el *razonamiento lógico deductivo* y la *clasificación de las matemáticas por estructuras* fueron los tres factores que, hábil e inteligentemente utilizados, permitieron al grupo superar todas las dificultades que la matemática de los años cuarenta presentaba a la realización de su ambicioso programa". Para seguir más adelante, "Pero donde entendemos ha conseguido Bourbaki el máximo logro es con su clasificación de las estructuras.

Independientemente del aspecto filosófico que con ello resuelven, al reducir notoriamente el peso dialéctico que, en su origen, se atribuye a la matemática formalista, logran dotar al investigador en matemáticas de un útil extraordinariamente potente para su trabajo de análisis y síntesis". El razonamiento lógico deductivo se conjuga con el analógico y pasa a operar sobre relaciones entre objetos más que sobre los mismos objetos, en un proceso de superior abstracción, entendida ésta como la acción de formación de clases.

Esta actividad de Bourbaki es aplicada por sus miembros a la topología conjuntista y combinatoria estableciendo nuevos e importantes métodos en Topología Algebraica, a partir de los cuales su desarrollo y aplicaciones están siendo centrales en la Matemática, incluso en la más reciente vuelta al tratamiento geométrico de problemas en topología de baja dimensión. De los trabajos iniciales en Topología Algebraica va a surgir, pronto, dos nuevas disciplinas matemáticas: el Algebra Homológica y la Teoría de Categorías. El primer tratado de Algebra Homológica se debe a H. Cartan y S. Eilemberg. En este tratado aparece, por primera vez presentados al gran público, los conceptos de categoría y functor (aplicación entre categorías). En el tratado de Cartan-Eilemberg, "se expone, por primera vez, una teoría que engloba a otras varias, tales como la cohomología de grupos, la homología de las álgebras asociativas, la homología de las álgebras de Lie, las sycigias de Hilbert, etc., situándolas en el cuadro natural de sus functores derivados" (27,a).

También hay que citar aquí la pequeña -pero fundamental- monografía del bourbakista Grothendieck en 1957 "Sur quelques points d'algebre homologique" y su anterior obra sobre espacios vectoriales topológicos que supusieron un extraordinario paso adelante para la época. Destaca la monumental (e inacabada) obra por Grothendieck y Dieudonné: "Elementos de Geometría Algebraica" cuya publicación se inició en 1960, y a la que no es ajena la profunda noción de "haz" que, si fue introducida por un no bourbakista, Leray, se debe a H. Cartan y J. P. Serre su estructuración y forma definitiva. Más tarde, 1958, presentada por otro bourbakista R. Godement en su tratado "Theorie des faisceaux" con aplicaciones al estudio de variedades. Así mismo son de destacar los trabajos en teoría de Números por el tambien destacado bourbakista J. P. Serre, los de M. Karoubi en "Teoría K" y los más recientes de P. Deligne y A. Connes en geometría diferencial no conmutativa. Los éxitos de la "opción bourbakista" han sido reconocidos por la comunidad matemática internacional con la concesión a algunos de sus miembros, entre 1950 y 1982, de cinco medallas Fields y dos premios Wolf (equivalentes a los premios Nobel en matemáticas. Las primeras para matemáticos con cuarenta y dos años a lo sumo, los segundos para aquellos con más de cuarenta años).

Sin embargo, también se reprochan a Bourbaki algunas limitaciones, así H. Wang (26, b) cita:

a) La omisión de resultados centrales de tipo combinatorio.
b) Falta de selección intrínseca en la elección de las estructuras consideradas.
c) No considerar el aspecto constructivo de la Matemática.
d) Una relativa inconsistencia básica al apoyar su fundamentación en una determinada teoría de conjuntos.

Estas objeciones no presentan todas, por supuesto, el mismo peso. Es claro que su ambicioso proyecto de clasificar por estructuras toda la matemática no ha sido realizado, como decíamos en (27,a) "El tiempo con *la evolución que la Matemática* ha tenido, ha pasado sobre él y esta evolución le ha superado". Por otra parte sus "Elementos de Matemáticas" se construyeron apoyándose en la Lógica como "higiene" y, en la base alineándose conjuntistamente sobre la axiomática de Zermelo, con su axioma de elección que respondió a un sentir común del grupo. Téngase en cuenta que, como dice G. H. Moore en su libro de 1984: "Si prevalecieran las más severas críticas constructivistas al Axioma de Elección, las matemáticas quedarían reducidas a una colección de algoritmos". Es claro que, la necesidad de elegir uno u otro camino para el desarrollo de un algoritmo, conduce a un proceso que se apoya en el razonamiento lógico-deductivo. Una precisa situación de Bourbaki, hoy, nos la dan tres miembros del grupo en (2, b).

Categorías y Topos

Los éxitos del grupo fueron atrayendo la atención e interés de la comunidad matemática. Aclaradas las bases estructuralistas por Bourbaki, además de los que fueron renovando el grupo, otros matemáticos se situaron en el contexto estructuralista. Algunos incorporaron otros métodos, como por ejemplo, los constructivistas. Se originó una proliferación de resultados teóricos y aplicaciones a otras disciplinas científicas.

Entre los resultados que se obtuvieron destacan la completa estructuración y desarrollo de la Teoría de Categorías y la Teoría de Topos con sus aplicaciones al estudio de las variedades, el Álgebra y la Geometría Algebraica. Como es bien sabido, el origen de la Teoría de Categorías debe buscarse en un trabajo realizado por Eilenberg y Mac Lane en 1945 con objeto de entender y estudiar ciertas construcciones de la Topología Algebraica. Así la Teoría de Categorías surgió para "hacer más patentes y transparentes los esquemas comunes a diferentes tópicos". ¿A quién no entusiasma llegar a conocer, por ejemplo, que es "equivalente" trabajar en la categoría de las Álgebras Afines que en Geometría Algebraica Afín? ¿Somos conscientes de la economía que en el trabajo del matemático ello proporciona? Se concluye así que, en cierto sentido, la Teoría de Categorías "constituía el lenguaje de la Matemática" facilitando el estudio y actividad, por ejemplo, en campos tan dispares como la Geometría Algebraica y la Teoría de Autómatas (7). Destaca de modo notorio en este campo la obra de C. Ehresmann (8) en su aproximación al estudio categorial de la Geometría Diferencial y los Sistemas Dinámicos.

Uno de los últimos desarrollos de la Teoría de Categorías en los que irrumpen los métodos constructivistas lo constituye la Teoría de Topos, teoría en la que confluyen la Lógica, el Álgebra Universal y la Geometría. En principio fue Grothendieck quien, en 1958, introdujo el primer "topos" al observar que un espacio topológico podía ser estudiado por la categoría de todos sus haces. Categoría que denominó "topos" al entender que éste era la clase de objetos preciso a los topólogos. El mismo lo generalizó en la Geometría Algebraica creando lo que se conoce como un "topos de Grothendieck". Seguidamente Giraud determinó las condiciones necesarias y suficientes características para que una categoría fuese un "topos de Grothendieck". El paso inmediato fue dado en U. S.. A. por Lawvere Tierney, que debilitando y modificando adecuadamente las condiciones de Giraud, operando sobre la categoría de todos los conjuntos y utilizando sólo una lógica de primer orden caracterizaron la noción de un "topos elemental" utilizando el lenguaje de Mitchell-Benabou. Una buena exposición del concepto, propiedades y algunas de sus aplicaciones a la fundamentación de la Matemática la facilita la obra de P. Johnstone (14).

Es de destacar también la actividad en esta escuela que en Teoría de Fractales realiza A. Douady quien, junto a J. H. Hubard, después de caracterizar cierto número de propiedades topológicas de los conjuntos de Julia (asociados, por ejemplo, a la iteración de funciones polinomiales de la forma $z \rightarrow f(z) = z^2 + c$, con z variable compleja y c parámetro real (conjuntos fáciles de construir por un microordenador), hoy, con otros miembros del "Geometry Computing Group" en U. S. A., estudia los sistemas dinámicos gobernados por iteración de polinomios complejos con ayuda de un super-ordenador Cray 2.

Estos dos aspectos del estructuralismo se pueden apreciar principalmente en los más o menos, setecientos trabajos presentados hasta la fecha en el Seminario Bourbaki o, más precisamente, entre los presentados a partir de 1965. Quizás sea esta situación la que hace decir a Dieudonné (5,b): "Dans ces diverses théories se poursuivent d'ailleurs des recherches dont je ne dirai rien, sinon pour souligner le courieux phénomène historique de la division d'une science en deux parties qui, en practique, s'ignorent mutuellement , sans que cela paraise gêner le moins du monde leur developpement respectif". Aunque como también recuerdo en (27, a) antes citada, ésto puede quedar explicado por la opinión de R. Thom: "Sin embargo, no parece que los matemáticos hayan sufrido mucho en su actividad profesional, ¿por qué? Porque en la practica un pensamiento matemático nunca es un pensamiento formal. El matemático da un significado a cada proposición, uno que le permite olvidar el enunciado formal de esta proposición en cualquier teoría formalizada existente (el significado proporciona sobre la proposición un status ontológico independiente de toda formalización).

Desde el punto de vista de la filosofía de la matemática, creo que se puede afirmar que el estructuralismo aparece próximo a una curiosa alianza entre nominalismo y realismo, que se sitúa cerca de la escuela matemática del Platonismo, que algunos seguidores han hecho compatible con el constructivismo, particularmente en Teoría de Topos y en Teoría de la Demostración. Su concreción social determina una economía y progreso del pensamiento matemático de profundas e interesantes aplicaciones. Al coincidir la mayoría de edad de Bourbaki con el modernismo, no es de extrañar que, al no ser bien comprendida su filosofía, se le considere equivocadamente en la base del movimiento "Matemática Moderna", pese al reiterado rechazo de tal relación bien por Bourbaki (2, a) o en la introducción a sus Elementos de Matemáticas, bien por manifestaciones de sus miembros al respecto, como las de H. Cartan recogidas en 27, a).

Los estructuralistas subtienden la escuela formalista pero se independizan de los problemas fundacionales de aquella, en cuanto que sus estructuras son independientes del sistema axiomático o de cualquier otra índole considerado.

Toman como origen de su acción el propio mundo físico y el de las actividades humanas en ese mundo, que codifican y analizan estructuralmente. De este modo el Estructuralismo presenta la ventaja de asumir el aspecto social de la actividad matemática hecho que, como hemos citado, no poseen el Logicismo, Intuicionismo ni Formalismo, escuelas que sólo ofrecen una caracterización del aspecto final de la actividad matemática.

PLATONISMO

Para salvar la crisis fundacional originada por el teorema de indecidibilidad, se consideró que “la Matemática consta de verdades sobre estructuras abstractas existentes independientes de nosotros, de los argumentos lógicos que establecen estas verdades, de las construcciones subyacentes en estos argumentos y de la manipulación formal de los símbolos que expresan estos argumentos y verdades”. Su más destacado representante es Kurt Gödel.

Un platonista interpretaría el teorema fundamental de la Aritmética literalmente. Para el platonista existen los números naturales independientemente de nosotros y es un hecho cierto que son todos descomponibles de modo único en factores primos.

La expresión más característica del Platonismo en Lógica matemática es la *Teoría de Modelos*. Esta disciplina aparece caracterizada como “el estudio del contenido *semántico* de las teorías matemáticas”. Desde luego, tanto el Formalismo, como el Logicismo y el Intuicionismo niegan que las teorías matemáticas tengan un contenido semántico. El problema central de la Teoría de Modelos es la cuestión de qué propiedades de las estructuras matemáticas pueden ser expresadas en lenguajes particulares. Esta cuestión sólo surge si se supone que las estructuras existen y poseen propiedades independientes de su descripción.

El matemático platónico se ve confrontado con una variedad de estructuras abstractas que preceden su actividad matemática. El no crea estas estructuras, las *encuentra.* Su intuición está formada por las verdades sobre el mundo matemático que han sido descubiertas por sus predecesores y colegas, y su propia intuición, a su vez, le capacita para encontrar nuevas estructuras. A fin de verificar estas conjeturas, responder a las cuestiones que le surgen, realiza construcciones, construye argumentos y define nuevos conceptos. Estas expresiones expresadas en castellano matemático, soportadas por cálculos, aparecen rigurosas y formales. De modo que se hacen públicamente accesibles y verificables llegando a formar parte de una amplia dialéctica social a través de la que la Matemática se desarrolla.

De hecho, la visión que la doctrina platónica atribuye a los conjuntos es análoga a la atribuida por Cantor y esta no aparece incluida en un sistema de axiomas de cualquier sistema formal de primer orden (Zermelo-Frankel, Russell-Whitehead, etc.). Para poderla estudiar formalmente es necesario recurrir a lenguajes infinitarios o lógica de segundo orden.

Esta teoría que parecía ser la más satisfactoria hace unos veinte años, ante la multiplicidad de modelos que existen para la Teoría de Conjuntos, después de los trabajos de P. J. Cohen, al ser interpretada por algunos matemáticos que dan distinta respuesta a problemas específicos, les lleva a considerar abierta, de nuevo, la crisis de los fundamentos de la Matemática, de la existencia de un fundamento unitario. Es decir, para algunos matemáticos esta aparente relatividad o multiplicidad del Platonismo lo hace intangible, contrario a los sistemas formales tangibles surgidos de las actividades humanas reales con lo que también rechazan el platonismo.

Pero si observamos la situación con más cuidado, es evidente que lo que traduce la multiplicidad de modelos de la Teoría de Conjuntos es el alcance o significado que a la codificación de los caracteres básicos de las actividades humanas consideradas puede atribuírsele en el desarrollo de la teoría formal que trata de estudiar, sintetizar no iluminar la actividad. Por ejemplo, Bourbaki en su desarrollo de la Matemática adoptó la teoría de conjuntos que admite el “axioma de elección”, lo que implica y permite explicar interesantes propiedades de los espacios de Banach. Lebesgue al desear que todo conjunto de puntos de R^n fuese mesurable, adopta la teoría de conjuntos en la que el axioma de elección sólo se aplica a conjuntos numerables. A. Koch, al elegir que todos los conjuntos sean constructibles , le es imposible disponer de un cardinal mesurable , etc. O también la existencia de teorías Matemáticas, como la de la Homotopía que, en cada una de las distintas aproximaciones existentes, hoy, se estudia sobre una categoría no pequeña.

Esto nos precisa lo ya indicado al hablar de los sistemas axiomáticos formales: existen teorías matemáticas cuyo desarrollo lógico deductivo no puede hacerse en ningún modelo conjuntista, contra lo afirmado en filosofía por los neopositivistas. Al menos, se necesita la Teoría de Categorías Generales (entre las que figuran la categoría de todos los conjuntos y las pequeñas) para poder disponer de los objetos matemáticos en que desarrollar el estudio lógico deductivo de cualquier entidad del universo existencial de la humanidad una vez codificada.

Lo que sucede es que la multiplicidad de modelos de la Teoría de Conjuntos permite que un mismo problema matemático obtenga distintos resultados en función de la teoría de conjuntos en la que se estudie. Los primeros ejemplos se obtuvieron por los estudios de Gödel y Cohen respecto a la hipótesis del continuo. Así GHC es indecidible sobre el modelo de la teoría de conjuntos de Bourbaki (1931), pero si a éste se añade el axioma de constructibilidad de Gödel, la GHC es cierta (1940). Otro caso nos lo presenta P. C. Eklof en el “The A. M. M. Vol. 83, 1976, pp. 775-787”. Hoy son numerosos los ejemplos de este tipo.

En consecuencia, el matemático, hoy, particularmente el que trabaja en Fundamentos de la Matemática, debe tener la precaución de no utilizar los resultados alcanzados por sus colegas sin tener en cuenta sobre qué sistema de axiomas o universo categorial ha sido establecido. Hecho que, por supuesto, no supone la pérdida de certidumbre o relatividad de la Matemática, como afirma M. Kline, sino que cada modelo de la Teoría de Conjuntos, o universo categorial, nos revela un particular aspecto de la Matemática. De modo análogo a como cada ciencia particular nos revela un aspecto del mundo o, como también hemos señalado en el primer párrafo de esta lección, cada rama de la matemática ilumina algunos aspectos de las actividades humanas. Se tiene, como sucede con la especie humana, la unidad en la pluralidad, aunque ello exige una noción de naturaleza de la matemática más amplia que la del platonismo.

Desde el punto de vista de la filosofía, el platonismo aparece asociado con el realismo en una forma social caracterizada por el modernismo al que acompaña en su crisis. Aquí por modernismo entendemos la categoría ideológica que se ha vertebrado en torno a las ideas de razón y progreso.

CASI-EMPIRISMO o FALIBILISMO

Algunas de las limitaciones de las anteriores escuelas se evidencian en la publicación (26, b), según Tymozcko: "Si contemplamos la Matemática sin prejuicios, aparecen muchos hechos relevantes que los fundamentalistas ignoraron: demostraciones informales, desarrollo histórico, la posibilidad del error matemático, explicaciones matemáticas (en lugar de demostraciones), comunicación entre matemáticos, el uso de ordenadores en la Matemática Moderna, y muchos más. . .". Los fundamentalistas podían olvidar tales hechos, puesto que interpretaban la práctica ordinaria en función de los fundamentos.

Para ellos la actividad de los matemáticos fue, esencialmente, el descubrimiento de verdades sobre conjuntos, verificación de demostraciones formales o alguna otra caracterización de los fundamentos. Desde el punto de vista matemático, para Hersch: "la actual encrucijada en la filosofía de la matemática es la consecuencia del gran periodo de controversias sobre los fundamentos de Frege y Russell a través de Brouwer, Hilbert y Gödel. Lo que es necesario, ahora, es un nuevo comenzar…". Mientras que, para el filósofo Putnam: "el resultado de Gödel sobre la consistencia de los sistemas formales establece la necesidad de métodos sintéticos (casi-empíricos) en matemáticas". El realismo que admite Putnam de que: "el énfasis sobre los métodos casi-empíricos para establecer el conocimiento nos conduce a apoyarnos sobre procesos sociales, además de en las rigurosas demostraciones". Se sugiere que el realismo de la filosofía de la matemática es muy semejante al realismo de la filosofía de la Ciencia.

Otro nuevo e importante aspecto que cuestiona el concepto de matemática es la irrupción en ella del ordenador. Este hecho lleva a Davis, desde el punto de vista de la filosofía de la matemática y la práctica de la matemática sobre ordenador, a analizar el concepto de error en matemáticas en relación con su incidencia en la Teoría de la

Demostración, chequeo por ordenador, demostraciones probabilistas y demostraciones informales. Davis, en su visión de la matemática, establece un curioso paralelo entre la aparición de la demostración por ordenador y la aparición de la teoría de la relatividad, para concluir: "es posible que la matemática pudiera hallarse en una época y en un corpus material en el que el aspecto de la demostración cese de tener el significado clásico y donde se pueda vivir íntimamente con una menor fidelidad".

La postura de todos ellos tiende a coincidir con la visión denunciada ya en 1967 por Lakatos en su artículo "A renaissance of empiricism in the recent philosophy of Mathematics" publicado en (26, a). Fue en 1976, con una publicación reproducida en (26,b), donde, con una enérgica oposición al logicismo y al formalismo, fija las bases de la escuela casi-empìrista. El casi-empirismo "pretende colmar el vacío existente entre la concepción que tiene el filósofo de la matemática y la de las ciencias naturales" aproximando la primera a las segundas al razonar que el conocimiento de las primeras no es ni a priori ni infalible.

El nuevo comenzar de Hersch para Lakatos fue tratar de extender a la Matemática la filosofía de la ciencia de Popper y así distingue las teorías euclídeas y las casi-empíricas. (Recuérdese que la geometría era una de las disciplinas pertenecientes al corpus material del empirismo, pese a que Lakatos estima existe hoy un renacimiento del empirismo, su exclusión de las teorías euclídeas, luego de la geometría, le exige designe su escuela por el nombre "casi-empirismo" para precisar tal hecho y no Neo-empirismo como hacen algunos). Es decir, para Lakatos los datos básicos de una teoría euclídea son sus axiomas en los que se inyectan las verdades y procede a describir sus propiedades por deducción. El conocimiento obtenido por demostraciones es infalible.

Por el contrario las teorías casi-empíricas, al igual que las empíricas de las ciencias naturales, proceden al revés. Sin tener determinado el sujeto, manipulan sobre él y, a través de muchos tanteos o variaciones, tratan de obtener los principios subyacentes que se presentan así, arrastrando la verdad o falsedad implícitos en el tipo de manipulación considerado. El conocimiento casi-empírico es falible. Para Lakatos las teorías matemáticas son casi-empíricas, es decir, "la Matemática es lo que hacen y han hecho los matemáticos con las imperfecciones inherentes a toda actividad o creación humana”

El carácter filosófico de esta visión de la naturaleza de la Matemática es descriptivo, presentándola como creen que es, en contraposición con el de las anteriores escuelas filosófico matemáticas para las que es esencialmente prescriptivo, es decir, estableciendo cómo entienden que debe de ser la naturaleza de la Matemática.

Las ventajas del casi-empirismo o falibilismo residen: primero: en que es capaz de dar una información real de la naturaleza de la Matemática, tal como se practica hoy; segundo, favorece la explicación del inmenso éxito de las aplicaciones de la Matemática.

Entre sus inconvenientes se destaca: primero, su incapacidad de ofrecer un ordenado y completo cuadro filosófico de la Matemática; segundo, no proporcionar base alguna para la objetividad o verdad matemática. Por otro lado la idea de Lakatos de extender a la Matemática las ideas de Popper sobre la filosofía de la ciencia resulta un tanto extraña, si se tiene en cuenta que Popper, antes que filósofo de la ciencia, fue profesor de matemáticas en Austria y Australia. Popper, pues, conocía muy bien la falibilidad de la matemática como producto de una actividad humana. Hecho que también fue conocido por los que no rechazaron la aparición de las primeras geometrías no euclídeas o la actual pluralidad global de planteamientos constituyentes de la Matemática, aludidos al final de la presentación del platonismo. Como las consecuencias que para el desarrollo de las matemáticas suponen las circunstancias sociales que rodean la vida de los matemáticos. Por ejemplo las de Newton y Leibniz, Galois, Abel y Gauss, Brouwer y Hilbert, etc., o las analizadas por J. M. Uppal en su trabajo: “How strange is the development of Mathematics!”, si bien como dice Thom: “No existe caso en la historia de la matemática en que el error de un hombre haya arrojado el campo entero sobre el camino equívoco”.

En mi opinión, la limitación más grave, incomprensible, de la escuela casi-empirista es el haber excluido las teorías euclídeas (por tanto la Geometría) de la Matemáticas. De este modo es como los especialistas en Didáctica de la Matemática que optaron por la docencia basada en el tópico “vuelta a lo básico” -que se apoya sobre el casi-empirismo- comparten, hoy, la grave limitación que supuso la exclusión de la Geometría en la docencia basada en el tópico Matemática Moderna. Pero, actualmente, es mucho más grave, pues a los aspectos pedagógicos de la Geometría (intuición espacial, carácter deductivo local y estructura lógica global), ante la rica interacción entre ordenador y matemáticas, hay que sumar el ser una, particularmente, “rica e interesante fuente de modelos del mundo físico y una fuente única de iluminación de la interacción entre la teoría matemática y la epistemología científica”. Las dos ventajas del casi-empirismo antes citadas, las interesantes consecuencias didácticas que recoge el tópico “vuelta a lo básico”, quedan, así, muy reducidas y conducen, actualmente, de nuevo, a replantearse cómo alcanzar una óptima pedagogía de la Matemática en la sociedad actual.

En cuanto a la correspondiente doctrina filosófica, se sitúa en un platonismo fenomenológico, asociado a una forma social caracterizada por el post-modernismo surgido de la crisis del modernismo. La aceptación del postmodernismo que considero aquí, más que la de Habermasch que apuesta por una nueva Ilustración para completar el proyecto inacabado del modernismo, es la de Juan Cueto. Para Cueto se presenta como un “tardo-modernismo”, ya que los valores fundamentales de la modernidad –razón y progreso- ni han entrado en crisis ni se han derrumbado y porque la postmodernidad es un cajón de sastre en el que caben demasiadas cosas.

UNA ALTERNATIVA

Pese a la superficialidad con que se han efectuado la presentación de las siete más importantes visiones de la naturaleza de la Matemática, espero que hayan quedado claros los pros y los contras de cada una y la dificultad de disponer de una única y adecuada descripción. Ello explica, por otra parte, la complejidad de los múltiples modos con que cada una de las nociones matemáticas está ligada a sus origenes empíricos y las multiples interacciones que satisfacen las correspondientes actividades humanas.

Todos los aspectos considerados son esenciales caracteres de la Matemática, pero el hecho de su insuficiencia aislada nos evidencia que debe existir algo más intrínseco común a todas. Efectivamente, gran número de estos caracteres aparecen reunidos en la octava visión de la naturaleza de la Matemática que damos como alternativa. De hecho, creo que esta noción satisface casi todas las exigencias que caracterizan a la Matemática. Invito a todos a analizarla con detalle, ya que pienso que puede dar la respuesta más idónea a los interrogantes que nos plantea, hoy, la elaboración de unos planes de estudios de la Matemática óptimos en todos los niveles docentes.

Antes permítanme dedique unas palabras a analizar un resurgir de un método docente que la sociedad toda rechazara, ante las limitaciones que para la formación íntegra de la persona supone. Hoy, tal método, al existir el ordenador o computadora, puede dar lugar a situaciones mucho más graves, pero mucho más graves para toda la humanidad, que aquellas que motivaron su rechazo.

Puesto que las siete situaciones consideradas no nos desvelan el carácter intrínseco común y si nos ofrecen un efecto común: “la eficacia de la aplicación de la Matemática a la vida ordinaria”, limitémonos a considerar esta eficacia.

Pitágoras ya la consideró cuando dijo: “La Matemática es el modo de comprender el Mundo”. Otra más actual expresión afirma que “la Matemática es el lenguaje de la Ciencia con el que nos describe y enseña a manipular el mundo”. Se tiene así un concepto *prescriptivo producto*, que es único y manifiesta un aspecto utilitario de la Matemática. Ahora bien, el valor de lo que es apreciado por su utilidad, su valor, deriva de aquello para lo que es útil. Es decir, con el aspecto utilitario de la Matemática se establece una semejanza con un útil, una herramienta. Halmos a este respecto, en un artículo de 1980 titulado “El corazón de la Matemática”, afirma que “la principal razón para la existencia del matemático es la de solucionar problemas y que, por tanto, la Matemática está constituida realmente por problemas y soluciones”. Para concluir, más adelante, “aquellos que creen que el corazón de la matemática lo constituyen los problemas, no están necesariamente equivocados”. Yo me permito añadir que quizás sean el corazón, pero de lo que estoy seguro es que no son el cerebro. El ser humano es, al menos, ambas cosas.

El carácter de útil puede que presente alguna otra ventaja pedagógica, además de seguir desarrollando *sólo la memoria* (si acaso), si permitiera que el estudiante pudiera interesarse más en la Matemática y le facultara para afrontar nuevos y no codificados problemas. No fue esta la experiencia que vivimos durante nuestra docencia a jóvenes futuros ingenieros superiores, pese a que nuestra metodología hacia referencia en los enunciado y posterior resolución de los problemas a muy concretos casos de la vida diaria, en el ejercicio profesional del ingeniero. El que se fomente el interés de este método puede ser debido, quizás, a que algún sector de la sociedad pretenda centrar la docencia, principalmente, en el desarrollo de cursos sobre la resolución de problemas. El resolver problemas es un útil, es decir, algo que permite, inteligente y oportunamente utilizado, ayudar a la penetración de ideas, pero son estas las que *hay que transmitir y sobre las que hay que hacer reflexionar*, si queremos verdaderamente formar a la persona y que pueda llegar a ser útil a la sociedad en el mundo actual y no que llegue a actuar como una medianamente eficaz computadora, resolviendo problemas.

Mi experiencia me dice que el alumno precisa poseer unas referencias conceptuales, una adecuada capacidad de razonamiento lógico deductivo. Sin ellos instruir al alumno en el uso de diversas estrategias (heurísticas, globales, etc.) mediante modelos expertos, etc., aunque se motive con referencias a actividades de la vida real y/o de la historia de la Matemática, sólo desarrolla en él la memoria y un cierto tipo de razonamiento analógico. Su formación sería la motivada por la acumulación de recetas y estrategias. Este proceso, su dominio y control puede realizarlo con mucha mayor eficacia el ordenador o computadora.

Un análisis más detenido de esta semejanza entre Matemática y útil, nos evidencia el muy superior papel que juegan las ideas matemáticas en la percepción y codificación de los problemas de la actividad humana real, a través de la imaginación e intuición y de la capacidad de razonamiento bien desarrollado del ser humano.

Pasemos ya a describir la noción alternativa de la naturaleza de la matemática que ha introducido en un reciente artículo MacLane. Los conceptos dominantes que destacan en las siete nociones de la naturaleza de la Matemática, antes consideradas, son las de conjunto, estructura, categoría, lógica, el rigor y el proceso falible. Si reflexionamos detenidamente sobre las cinco primeras, el superior grado de abstracción de la noción de rigor deductivo, de estructura y categoría, y el de su yuxtaposición que originan el de la categoría estructurada tan cara a C. Ehresmann, nos pone en evidencia la existencia de las tres nuevas nociones consideradas por

MacLane: *claridad, amplitud y profundidad*. Aspectos comunes a la visión logicista, formalista, estructuralista y platonista de la naturaleza de la Matemática.

El concepto de claridad dimana del significado preciso en matemáticas en un contexto de superior abstracción. La abstracción del objeto tratado exige una descripción abstracta y precisa, independientemente del posible contenido intuitivo. La claridad va más allá de la precisión del rigor hacia una clara ordenación de ideas. Esto nos dice, por ejemplo, que los entes geométricos abstractos deben ser establecidos rigurosa y exactamente, es decir, de modo claro y perspicuo.

Por “amplitud” de una noción matemática MacLane entiende la variedad de situaciones en que se aplica junto a la pertinencia y relevancia de la abstracción hecha. Supone, también, la observación de que los teoremas se deducen por el motivo de abstracción o/y teniendo presente las aplicaciones.

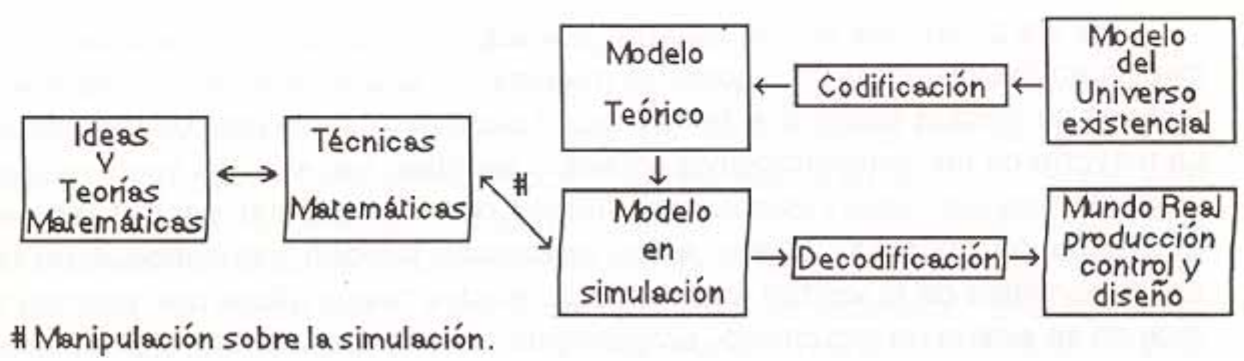
Finalmente, la profundidad de una noción matemática expresa el modo en el que la noción representa las estructuras fundamentales, no obvias, y conceptos subyacentes al problema que se considera o estudia. La noción de profundidad puede variar con el tiempo. Son ejemplos de esta noción los conceptos de Topos de Grothendieck y la noción de haz, ya citados.

Precisado el significado de estas nuevas nociones, MacLane establece la siguiente noción de naturaleza de la Matemática: *“La Matemática consiste en el descubrimiento de estadios sucesivos de las estructuras formales subyacentes al universo existencial de la humanidad, con énfasis en aquellas estructuras de amplia aplicabilidad y aquellas que reflejan aspectos profundos del citado universo”.*

Es decir, como precisa MacLane, “*el desarrollo matemático utiliza la experiencia y penetrantes intuiciones para descubrir las estructuras formales apropiadas, hacer análisis deductivos de estas estructuras y establecer interconexiones formales entre ellas*”. Esta definición de la naturalez de la Matemática es, con mucho y sin lugar a dudas, la más perspicua y profunda de las siete consideradas anteriormente. Y aclara la ya observada superior penetración y agudeza en el estudio, del matemático llamado “puro”, de los problemas y solución que hoy plantea la tecnología punta, como se evidenció en el coloquio MVQM. Su carácter es prescriptivo, pero también tiene en cuenta el aspecto social e histórico de la

Matemática con sus aplicaciones. Desde el punto de vista filosófico, se sitúa en un platonismo estructuralista que puede ser asociado con el movimiento ideológico del modernismo.

La Matemática se incorpora, así, al acervo cultural de la humanidad en lo que se conoce con el nombre de “*Ideas y Teorías Matemáticas*” cuya acción en el mundo fenomenológico se realiza a través de las técnicas matemáticas (no sólo operacionales sino analógicas, de análisis y síntesis). Según el esquema:



¿UN HITO EN LA HISTORIA DE LA MATEMÁTICA?

Hemos visto cómo una de las primeras preocupaciones del matemático del siglo XIX fue el logro del mayor rigor en el tratamiento de la matemática. Cuando ojeamos los Elementos de Euclides se observa que la geometría, aunque construida sobre una axiomática y rigurosos razonamientos deductivos, aunque no utilice las inferencias, hace constante referencia al mundo físico del espacio tridimensional. Ahora bien, cuando la evolución de las Ciencias, luego de la Matemática, condujo al estudio de teorías más generales (fundamentación del Análisis por Jacobi, Geometría Riemanniana n-dimensional, Geometría Algebraica, Estructuras Algebraicas, etc.) la precisa claridad con que los objetos deben aparecer, exige que estas teorías sean tratadas con rigor, en el sentido que precisamos a continuación.

Se cree, generalmente, que la noción de rigor cambia. Argumentos que parecen rigurosos a Euler parecieron inadecuados a Cauchy. Argumentos que parecieron rigurosos a Cauchy nos parecen, hoy, que contienen errores obvios. Pero no, lo que ha cambiado no es el concepto de rigor sino el estándar de rigor. Es decir, un argumento riguroso es siempre un argumento que basta para establecer la verdad de sus conclusiones. Cuando nuestra capacidad de análisis, de “penetración”, crece, vemos que se exige más para establecer la verdad y, por tanto, argumentos que una vez nos parecieron rigurosos se nos presentan ahora sin suficiente justificación. Ello explica cómo, de modo recurrente, el alumno clasifica y corrige el trabajo del maestro. Cada generación de matemáticos repiensa las matemáticas de la generación precedente, descartando lo que ella estima capricho, superficial o falso y subrayando con nuevas y nítidas formas lo que aún es útil. Se pone en evidencia, una vez más, el carácter social de la Matemática.

Es claro, así, que el concepto de rigor supone el concepto de verdad. Ahora bien, cuando evaluamos un argumento matemático, una demostración matemática, rara vez se efectúa sobre una demostración dada explícitamente con todo detalle. La mayoría de las demostraciones, orales o escritas, son simples esquemas que proporcionan pasos para indicar cómo puede ser desarrollada una demostración rigurosa. Como estos esquemas pueden inducirnos a un total convencimiento de la verdad argumentada, existen matemáticos que estiman que cuando se evalúa un argumento, simplemente tratamos de verificar si el argumento nos satisface, es decir, si nos convence, y puede convencernos, de la verdad de su conclusión, de donde deducen que no es necesario el rigor, que una satisfactoria comprensión real de la Matemática no se efectúa sirviéndose del rigor, y de ahí la idea de demostración intuitiva indicada al hablar del intuicionismo. De cuanto precede, se sigue que el concepto de rigor matemático está íntimamente involucrado en los conceptos de verdad y demostración.

Esta última reflexión y la precisión intrínseca de los tres conceptos queda inequívocamente caracterizada en el contexto de la escuela formalista (con validez en la logicista y platonista).

Para estas escuelas la noción de rigor se apoya sobre una explícita formulación de las reglas de la Lógica y su secuencial meticulosa utilización al derivar de los axiomas todas las propiedades subsiguientes, dando lugar a teoremas estrictamente formulados.

El concepto de verdad matemática se sigue manifestando a través de las particulares interpretaciones que satisfacen una teoría matemática formalizada. Una interpretación supondrá que una constante debe asociarse inyectivamente con un elemento específico del universo del lenguaje en el que aparecen codificados los problemas matemáticos planteados en el mundo de las realidades. En particular una interpretación de la Lógica nos la facilita la Teoría de Modelos. Con más precisión y siguiendo a F. G. Asenjo, "el concepto de verdad matemática se postula respecto a sus fórmulas", y así se dice que un fórmula es verdadera respecto a una interpretación en el universo del lenguaje considerado "si todas la tuplas o familias de variables del dominio de la fórmula dada la satisfacen" El concepto de verdad matemática asume así aspectos sintácticos (relativos al lenguaje) y semánticos (relativos a la interpretación o función).

En lo que precede nos ha aparecido junto a las palabras "rigor" y "verdad", la palabra "argumento" o "demostración", y hemos hecho notar que la mayoría de las demostraciones son simples esquemas que proporcionan suficientes observaciones para indicar cómo puede ser desarrollada una demostración rigurosa. Pero ¿qué es una demostración? Inspirándose en la lógica formal, para la matemática formal "*una demostración es una sucesión finita de fórmulas, cada una de cuyos elementos es un axioma o el resultado de aplicar una regla mecánica -de un conjunto fijo de ellas- a fórmulas previas de la sucesión*". Ello nos dice, entonces, que formalmente admitir o evaluar una demostración consiste o exige verificar si es conforme con un conjunto de reglas tomadas por ejemplo de un tratado de lógica matemática y, en consecuencia, que es posible escribir un programa de computadora para verificar mecánicamente si, una sucesión dada de fórmulas, constituye una demostración formal. Por otra parte, como ya hemos dicho, la casi totalidad de las demostraciones dadas son simples esquemas, dejando muchos pasos a la capacidad demostradora del lector u oyente, o a su imaginación. Ahora bien, lo que precede nos permite afirmar que, mediante transcripción a notación formal de los distintos pasos o afirmaciones dadas de una demostración, es a veces posible utilizar hoy demostradores automáticos de teoremas para rellenar los huecos entre los "pasos" publicados de una demostración.

La llamada solución mediante computadora del famoso problema de los cuatro colores presentada por W. Haken en agosto de 1976 en la Universidad de Toronto, realizada conjuntamente por K. Appel y J. Koch, abrió un profundo interrogante en el mundo matemático induciendo a que al final del acto uno de los más completos matemáticos rusos actuales Yu I. Manin, dijera que: "una demostración sólo llega a ser una demostración después del acto oficial de aceptarla como una demostración".

En 1979 el filósofo de la ciencia T. Tymoczko en un artículo (26, a) afirmaba que “el teorema de los cuatro colores o no es absolutamente un teorema matemático o es una clase de teorema totalmente nueva”, lo que justifica al precisar que para él toda demostración matemática ha de ser: *convincente, verificable y formalizable*, mientras que la solución al problema de los cuatro colores dada por Appel-Haken-Koch aunque es formalizable no es verificable. Sin embargo existen matemáticos que la aceptan como buena, unos pensando que “la certeza puede ser un inútil logro incluso en matemáticas” y otros trasladando el estándar de rigor a un estándar de demostración al afirmar que “no debemos olvidar que lo que constituye una *demostración* varía de una cultura a otra, tanto como de una edad a otra”. Lo que si quedó claro, con esta “demostración” del teorema de los cuatro colores, es que se marcó un hito o línea divisoria en la historia de la matemática, que aumentó notoriamente la ascendencia de la matemática en la tecnología de la información, particularmente de la lógica matemática que a su vez se vio (y ve) por los problemas que aquella plantea, originándose un rápido desarrollo de la “Teoría de la demostración” que, iniciada con la integración de los métodos constructivistas en ella, hoy puede considerarse como “*un esfuerzo para ver partes cada vez más amplias de la matemática como constituidas por verdades lógicas extendiendo el concepto de lógica en varias direcciones*”. Entre estas diversas direcciones destacan: aquella originada por la regla universal de resolución con modificación introducida por Robinson en 1965; las lógicas probabilistas y posibilistas de Zadeh, basadas en la asignación de significados continuos a las afirmaciones lógicas; las lógicas no monótonas o sistemas de razonamiento en lógica de predicados que modifican dinámicamente sus supuestos para asegurar su consistencia; y las lógicas difusas, donde las tres últimas son exigidas por la modelización del razonamiento, que MC Carty llamó de “sentido común”, precisa para la construcción de “sistemas expertos”.

Por otro lado en Tecnología de la Información para resolver o tratar un problema concreto se debe desarrollar el correspondiente programa que se inicia con la construcción de un algoritmo. Este pasa a ser codificado en un lenguaje de alto nivel (ADA, Fortran, LISP, etc.) constituyendo lo que se llama un “programa fuerte” que mediante un compilador es trasladado al ordenador en lenguaje máquina, obteniéndose lo que se conoce como “programa objeto”. Es sobre este último sobre el que ordenador realiza el algoritmo que resuelve el problema.

Designando por p el peso o longitud de un programa P (número de símbolos es escritura binaria de la entrada de los datos del problema), “el tiempo t(P, A) que necesita un algoritmo A para dar la solución del problema P que lo originó, mide la llamada *complejidad del algoritmo*”. Se dice que A trata a P con velocidad acotada, si existe una función f(p) del peso p del problema tal que t(P, A) < f(p). En el caso en que f sea un polinomio, se dice que el algoritmo es polinomial y que P es resoluble en un tiempo polinomial.

Recientemente, se ha podido *demostrar con métodos no constructivos* que ciertos problemas de la teoría de grafos son resolubles a tiempo polinomial, es decir, mediante algoritmos polinomiales, cuya existencia parece probable sea independiente de la axiomática de Zermelo-Frankel, Ello significa que, hoy, se dispone de demostraciones de existencia pura (no constructivista) para programas de ordenador que resuelven problemas reales sin esperanza alguna de que se pueda programarlos.

> Los profesores … compenetrándose especialmente con nuestra idea de llevar la Universidad y las EE. MM. A una cooperación más intima.
>
> Félix Klein(*

Sugerencias para la docencia de la matemática

Muchas de las reflexiones a considerar en este apartado han sido ya comentadas en los anteriores. Por ejemplo he indicado que la "lógica es el medio de razonamiento en el pensamiento indoeuropeo", cabe añadir que, como es bien sabido, la expresión o comunicación del pensamiento al ser condicionada por un lenguaje aconseja la práctica de varios idiomas, tanto desde el punto de vista cultural, como intelectual, así como el fomento de las lenguas vernáculas.

De modo análogo los apartados anteriores evidencian cómo la enseñanza de la Matemática, y su utilización por la sociedad y tecnología, exige prestar una particular atención en la docencia de la geometría y su incidencia en las ciencias de la computación, y esto último especialmente en el nivel de la investigación y profesional.

Pero a nivel docente ¿cómo deben ser traducidas dichas exigencias? Creo con Thom (24, b) que "el problema real que confronta la enseñanza no es el rigor, sino el problema del *desarrollo del significado*, de la *existencia de objetos matemáticos*", para añadir: "Esta existencia es sin duda distinta de la existencia concreta del mundo externo, pero aún está ligada y sutilmente a él". Así el interés del ordenador, de su incidencia con la geometría en la docencia e investigación, podría explicarse, precisamente, porque con la geometría, mediante la teoría de modelos y simulación, se alcanza una más concreta existencia del objeto matemático. Como dice Thom "*la geometría es un intermediario natural, y posiblemente insustituible, entre el lenguaje ordinario y el formalismo matemático*, donde cada objeto puede ser reducido a un símbolo y el grupo de las equivalencias se reduce a la identidad del símbolo consigo mismo. Desde este punto de vista *el estadio del pensamiento geométrico puede ser un estadio que es imposible omitir en el desarrollo normal de la actividad racional del hombre*"

----

*) Felix Klein: Matemática Elemental, desde un punto de vista superior

Hoy está claro que los reproches de inconsistencia, etc. que los Grundlagen der Geometrie de Hilbert evidenciaron en la Geometría Euclídea “no sólo son irrelevantes al no afectar la validez del razonamiento intuitivo local”, sino que su incorporación a la docencia originó una limitación en el conocimiento del significado del objeto matemático.

El estudio de la Geometría en su función formativa se hace tan esencial como clásicamente lo fue, pues presenta valores insustituibles. En (24, b) Meserve afirma que:

“1) La geometría proporciona uno o más puntos de vista, o modos de ver, en todas las áreas de las matemáticas aproximadamente.
2) Las interpretaciones geométricas continúan proporcionando visiones directoras del entendimiento intuitivo y avances en la mayoría de las áreas de la matemática.
3) Las técnicas geométricas proporcionan eficaces herramientas para resolver problemas en casi todas las áreas de la Matemática”.

A estos tres aspectos hoy hay que añadir la incidencia mutua entre ordenador y matemática que se manifiesta en principio a través de: sus caracteres lúdico conceptuales; su estructura lógica en analizar plausibles conjeturas conduciendo a su rechazo o a su demostración; su estudio de situaciones de larga o extrema complejidad en teoría de números o ecuaciones diferenciales, etc. Más recientemente el matemático se interesa por la potencia del ordenador para proporcionar información gráfica. El ordenador proporciona un útil extremadamente efectivo y único con qué explorar el fenómeno en muchos problemas complicados, con propiedades o caracteres geométricos en las ideas de Meserve antes citadas. Es esta concurrencia de valores y, en particular el nuevo valor del ordenador con la geometría lo que ha conducido internacionalmente a constituir rn 1987 el “Geometry Computing Group” reuniendo notables geómetras y especialistas del análisis y tecnología computacional, como indiqué al hablar del estructuralismo.

La necesidad del estudio de la geometría resurge, así, al sumar a su valor formativo clásico el que le asigna la teoría de modelos y simulación por ordenador. Quizás lo aconsejable sería iniciar su estudio, en el nivel de la E. G. B. de modo figural concreto o particular próximo a la vida del niño, para en BUP y FP ir pasando de lo figural a lo euclídeo. Se podría así abordar en el 1er ciclo universitario el estudio de lo que F. Klein denomina Geometría Superior (estudio de afinidades, proyectividades y correspondientes transformaciones) de modo sintético y analítico.

Es preciso considerar aquí que las especiales exigencias que plantea la formación del futuro profesor de matemáticas, dado su conceptual carácter, debe ser muy reflexiva y bien "larvada". Creo recordar mi insatisfacción después del primer curso de estancia en la Universidad de París y ello pese el bagaje de conocimientos y madurez intelectual con que me incorporé a aquel centro (estudios de licenciatura más cinco años de docencia y estudios de doctorado). Fue dos años más tarde y después de tener la oportunidad de escuchar y discutir con notorios especialistas en matemáticas –no sólo franceses-, cuando empecé a vislumbrar el alcance y posibilidades de la formación que tenía la suerte de poder adquirir. No obstante, hoy al querer abordar esta cuestión he preferido remitirme a las obras de especialistas como J. L. García Garrido (10) bien reciente, o la de J. M. Cobo Suero: "La enseñanza superior en el mundo, estudio comparado e hipótesis", editado por Narcea, S. A., en 1979, sin por ello no estar dispuesto a exponer con más detalle mis ideas y concreción metodológica de las mismas, aportando cuanto mi experiencia ha podido establecer.

Pero debo abreviar. El considerar la epistemología de la Matemática como un intento de entenderla como una actividad humana, exige, a nivel universitario, considerar los tres principales componentes de la misma: planes docentes, alumnos y profesorado, más su relación con la evolución de la sociedad.

PLANES DOCENTES

Destaquemos los siguientes objetivos generales a nivel de Licenciatura:

1º Atender las necesidades locales de la sociedad que acoge a la Universidad.

2º Aproximar la actividad práctica industrial y la formación del llamado "matemático puro", potenciando también el carácter reflexivo-conceptual en la formación del ingeniero.

3º Disponer de planes de estudio diversificados y aptos para su constante adaptación al rápido progreso científico-tecnológico.

4º Actualizar periódicamente los contenidos de los curriculums. Entiendo que actualmente los mínimos troncales son: *Álgebra, Análisis Numérico, Geometría, Lógica Formal, Teoría de Funciones, Teoría de grafos, Lenguajes y Estadística.*

5º Familiarizar con la práctica y aplicaciones de la modelización y simulación con ordenador, lo antes posible. Ello puede sustituir las prácticas en determinadas industrias punta de que carezca una determinada región.

6º Fomentar entre los estudios de especialización los de Didáctica de la Matemática, en cuyo curriculum deberán figurar las disciplinas de Historia y Filosofía de la Matemática. Se procurará observar la habilidad para la enseñanza y se calificarán las actitudes hacia la docencia.

7º Organizar la educación permanente de todos los profesionales de la Ciencia y de la Técnica, mediante reciclajes cada cinco o seis años. Se sugiere estructurarla a nivel europeo (27, b).

8º Realizar reciclajes en la enseñanza de la geometría asistida o no por ordenador, del profesorado de EE. MM., F. P. y E. G. B.

9º Favorecer el conocimiento, o aproximación por el alumno, de la práctica de la docencia e investigación en Matemáticas en el 2º Ciclo.

ALUMNOS UNIVERSITARIOS

Destacaremos los siguientes temas generales de reflexión:

a) La L. R. U. prevé la participación estudiantil en la perseguida “democratización” de la Universidad. Esta participación nunca deberá ser en detrimento de su formación matemática, muy en particular ante el valor social de la misma. Napoleón I decía: “La evolución y la perfección de las matemáticas están íntimamente relacionadas con la prosperidad del Estado”.

b) La conciencia social en el estudiante surge como subproducto de su educación y del estímulo que recibe dentro de la comunidad académica y en relación de ésta con <la sociedad.

c) La rápida evolución de la sociedad actual hace efímera e inoperante la idea de algunos estudiantes de creer que mediante un proceso purificador de sus emociones, lograrán prepararse adecuadamente para enfrentar los problemas que nos rodean.

d) La igualdad de oportunidades deja de existir, cuando la enseñanza se deshumaniza por la masificación.

e) Buscará superar las limitaciones que la educación primaria y secundaria le hayan podido ocasionar en su formación ético-social mediante la práctica de la solidaridad académica y el estudio reflexivo de textos de deontología que le faciliten el acceso al ejercicio profesional en la sociedad con la máxima responsabilidad.

PROFESORADO UNIVERSITARIO

Docencia e investigación

Hoy que tanto se habla de la relación Universidad-Empresa, felizmente de modo provechoso para ambas partes, es hora que todos reconozcamos y fomentemos la relación Universidad-Investigación. Hay una necesidad ineludible de hacer compatible la docencia con la investigación en el profesor universitario y de que ello sea reconocido en la organización docente de cada curso.

No creo exagerado afirmar que es de este binomio del que, básicamente, depende nuestra sociedad hoy. En particular en cuanto a la Matemática se refiere, lejos de ser incompatibles, estas actividades son obligatoriamente complementarias. Se evitará así la inflexibilidad en el enfoque y la presentación estereotipada, no actual, de las asignaturas por muchos profesores universitarios. Esto debe tenerse muy presente por las fuerzas vivas de nuestra sociedad, si queremos jugar el papel que nos corresponde en Europa. No valen las quejas si nos sentimos discriminados o minusvalorados en el concierto europeo.

Hay que empezar por poner orden en nuestra casa y este orden no supone exigir lo imposible, sino en proporcionar los medios precisos para poder atender lo que pide o precisa la sociedad. Están muy bien los controles, pero pueden llegar a encubrir un superior engaño si su práctica no conduce a evidenciar dónde, realmente, se halla el mal.

Nadie puede, ni debe, ser acusado de algo que, sin desearlo, se ve obligado a realizar, como consecuencia de una equívoca educación de toda la sociedad. Ello puede satisfacer al “tuerto como rey de los ciegos” -según el dicho popular- pero no nos servirá en el contexto europeo donde los tuertos tienen dos ojos y los ciegos uno.

Desde luego, por un proceso recurrente aparecen otros defectos. Así, en Francia, donde hace años la sociedad se preocupó de que su profesorado dispusiera del adecuado equilibrio entre docencia e investigación, legitimando la meritocracia universitaria, hoy, como evidencia el coloquio MVQM, se queja de que el buen profesor/investigador abandone la universidad por el trabajo en la industria, mucho mejor remunerado. Quizás la causa de este desfase se deba a los cuarenta años en los que nos adelantaron en la aparición del profesional de la matemática, (1870-1910) respectivamente. Si bien, en otro contexto, debo señalar que dicho profesional, por parte de España, ya se consideró en el siglo XVI por el Consejo de Indias.

Al fin en España, mediante la L. R. U., se ha recogido la posibilidad de práctica del año sabático, tan conocido en las universidades extranjeras y consecuente con la doble vertiente docente investigadora del profesorado. Esta posibilidad en 1992 incidirá, notoriamente, en el libre movimiento de profesores entre universidades de la C. E. Pero si el año sabático es imprescindible ante el reciclaje periódico que prevé la educación permanente, más lo es para aquel profesor que ve distraída su docencia y/o investigación con el ejercicio, durante varios cursos, de cargos directivos en la actividad universitaria. Sin la posibilidad de reciclaje o reinserción que permite el año sabático es casi imposible recuperar para una adecuada docencia e investigación a un tal profesor. Sin año sabático, recuperarse de esta situación le exige un esfuerzo y sacrificio sobrehumanos que sólo su conciencia le puede exigir, pero que una sociedad equilibrada no debería permitir. En tres años sin información, su capacidad investigadora y/o docente puede quedar obsoleta o estereotipada. Nada resolveran los controles, apreciaciones administrativas o estudiantiles de su actividad profesional, si no se le facilitan los medios precisos para ejercerla con la mayor idoneidad. “Quered al profesional docente o investigador como le permitis ser o ayudarle a ser como quisierais fuese”.

Una definición

Todos conocemos lo que debe entenderse por enseñanza, docencia o educación, en sentido genérico o en el específico, incluso desde el punto de vista etimológico. Desde luego una buena enseñanza, de modo genérico y en cualquier nivel entiendo que, en cada persona debe: respetar su imaginación, potenciar su intuición, desarrollar su entendimiento y capacidad de razonamiento analógico, lógico y plausible, vigorizar su memoria, fortalecer su voluntad y facilitar su inserción real en la actividad humana de cada día. Mi inicio en su práctica, desde muy temprana edad, y las experiencias vividas, sin rechazar las habituales definiciones, me han hecho preferir la siguiente:

“Enseñanza es un acto de amor o amistad que tiende hacia la autonomía futura”

La amistad es el medio, la autonomía futura del alumno el fin. Ese deseo de asegurar la autonomía del alumno exige a todo profesor ser algo profeta y preocuparse de la actualización constante de la docencia, tanto en contenidos como en métodos; por tanto es esencial estar al día al menos en los progresos de la investigación en su disciplina, aún cuando no disponga de tiempo para realizar investigación alguna por su parte. Toda la sociedad debe saber que sólo esta actividad puede ocupar todo su tiempo a un profesor responsable, dada la enorme cantidad de trabajos de investigación que hoy se publican.

La amistad buscará todas las situaciones y motivaciones que en una cultura se estimen adecuadas para hacer agradable e interesante el estudio y entendimiento de la Matemática por parte del alumno y, por tanto, exigirá una entrega total a la docencia. Eventualmente puede servir, también, para que el profesor admita con naturalidad la triste realidad del refrán popular relativo a la crianza de cuervos. Hecho que, por otra parte, la autonomía del alumno podría provocar con menos frecuencia. A pesar de todo, dado que la enseñanza la entendemos como un acto de amor o amistad, ese posible irrespetuoso y poco educado proceder es menos doloroso y dañino para la sociedad que el que evidencia José Saramago, en “El Europeo” del 2 de junio último, pag. 46, al decir: “*es mi deber inmediato recordar que las hegemonías culturales de hoy resultan, fundamentalmente, de un proceso doble y acumulativo de evidenciación de lo propio y ocultación de lo ajeno, que tuvo la habilidad de imponerse como ineluctable, favorecido, casi siempre, por la resignación, cuando no por la complicidad de las propias víctimas*”. Curiosamente, ello lo manifiesta al entender que “*Si de mí se espera que ame a Europa como a mi propia madre, lo mínimo que le puedo exigir es que ame a todos sus hijos por igual y, sobre todo, que por igual los respete a todos*”. Yo pienso que este respeto hay que merecerlo correspondiendo con el nuestro en un espíritu de sana emulación y sincera cooperación que borre y supere en todos, en ellos y en nosotros, antiguos errores y egoísmos tradicionales.

Es esta definición de docencia, y la formación en investigación que comporta, la que, en un momento dado, nos llevó a salir de España para formarnos en Topología Algebraica en la École Normale Supérieure de París bajo la dirección de H. Cartan. Hoy recogemos los frutos que, directa o indirectamente ha dado tal acción: la

Topología Algebraica en sus diferentes aspectos y derivaciones se halla, actualmente, bien atendida en España por jóvenes que han sabido superarnos en un campo al que –aparte de las ideas de amistad y autonomía- recurrimos por necesidades auxiliares de nuestra especialidad, la Geometría. Gracias a todos.

Pero debo reconocer que no todo han sido éxitos, que también este concepto de enseñanza fue el que, como Director del antiguo Departamento de Geometría y Topología, me llevó a luchar para que la Universidad de Zaragoza dispusiera de geómetras propiamente dichos, tanto por el clásico valor formativo de la Geometría (24,b), como por el que se vislumbraba por su incidencia en la Tecnología de la Información y que hoy ha sido confirmada como he dicho. Diversos hechos no sólo nos negaron la posibilidad de aumentar la plantilla sino que el número de profesores adscritos al Área de Geometría y Topología de esta Universidad ha disminuido en cuatro por diversas circunstanciales razones.

El caso es que hoy quedamos muy pocos profesores sin jubilar que hayan recibido inicialmente una formación geométrica apoyada en los métodos sintético-geométricos de la escuela italiana de principios de siglo y en una transición como la geometría de Hodge & Pedoe. Aún recuerdo las elaboradas y precisas construcciones de la geometría descriptiva de curvas y superficies. La potenciación de la Intuición espacial que proporcionaban es preciso volver a recuperarla. Pero profesores que, con esta formación, hayan seguido trabajando en la docencia e investigación próximos a la geometría aún somos menos. Si se tiene en cuenta que los geómetras deben pertenecer al Área de Geometría y Topología, y que hoy existe un buen número de especialistas en Topología (conjuntista, algebraica, etc.), se deducirá observando los apéndices B_1 y B_2 que somos muy pocos en toda España y, en consecuencia, <muchos menos en geometría. Es cierto que todo profesor de esta Ärea puede hacerse cargo de un tal tipo de docencia y, de hecho en la medida de su autonomía e interés, lo está efectuando, pero ello lo realizan en detrimento de la topología que tampoco debe descuidarse, aunque sólo fuera por el carácter auxiliar de las demás disciplinas matemáticas. Aunque, como siempre, existe una excepción. Hoy los que trabajan en topología de baja dimensión suelen poseer una profunda intuición espacial aunque no métrica ni proyectiva.

Entiendo que dada la evolución de la matemática y sus aplicaciones este vacío puede originar grandes daños. Repito: La Geometría junto al valor formativo que siempre poseyó se ve, hoy, con su aplicación al estudio cualitativo de toda clase de problemas (de análisis funcional, ecuaciones diferenciales, etc.) pero sobre todo con su utilización en Teoría de Modelos y simulación por ordenador. Creo que ello aconseja que se disponga de un muy superior número de profesores especializados en Geometría.

La situación, como hemos señalado ante los apéndices B, es bastante general en toda la Universidad española. Teóricamente creo que responde a la adopción de una enseñanza que abandonó la geometría figural y sintética a causa del formalismo a ultranza, seguida de una más radical algebraización de ella. Este hecho se prolonga hasta hoy, tanto por la filosofía formalista, como la que se desprende de la escuela casi-empirista.

Felizmente, siempre existirán idealistas y la realidad, quizás, no sea tan grave como se desprende de los apéndices B. De hecho existen profesores en otras disciplinas y especialidades que, gracias a su esfuerzo e iniciativa particuñlar y a la libertad de cátedra, están modificando el contenido de las asignaturas llevándolas a una presentación más geométrica y apoyada en los métodos informáticos. Pero esta circunstancia, aunque se deba agradecer, hay que reconocer que es insuficiente. Creo preciso que la sociedad y las fuerzas vivas intervengan decididamente y que en los nuevos planes de estudio se refleje la actual evolución de la matemática, con la incidencia en ella de la tecnología de información y superior atención geométrico-intuitiva.

Otras muchas consecuencias se pueden deducir analizando los cuadros demográficos B. Por ejemplo: la disminución del número de catedráticos y aumento del profesorado titular, que en los años que se indican habrán sido jubilados:

	2.015	2020	2025
Catedráticos de Universidad, un	60%	80%	92%
Profs. Titular de Universidad, un	33%	50%	77%
Catedráticos de Esc. Universitaria, un	63%	70%	87%
Prof. Tit. de Esc. Universitaria, un	34%	55%	79%

También es necesario atender otras muchas cuestiones donde se hallan conjuntamente implicados alumnos y profesores para cuya solución se precisa un serio y definido apoyo económico de la sociedad. Por ejemplo para evitar las malas consecuencias de la masificación de estudiantes en las clases.

Por mucho autodidactismo que exista, en la masificación la relación profesor/alumno es prácticamente inoperante de modo constructivo. Hay que prever el aumento de alumnado, particularmente en Ciencias y más precisamente en Matemáticas ante la orientación cultural de la sociedad actual; y que, como se señaló en el Coloquio MVQM, para 1992 de un 80% a un 90% de jóvenes serán bachilleres y la mayoría de ellos deberán proseguir estudios de Ciencias o Técnicos.

Finalicemos puntualizando que un buen investigador no es necesariamente un buen docente. Por ejemplo H. Poincaré siempre fue un mediano profesor (18). La Recíproca también es cierta: se puede ser un buen profesor sin ser investigador . Uno de los mejores y pocos modos de conocer si alguien puede ser un buen profesor es el entusiasmo por la materia de la enseñanza.

He pretendido, como dije al principio, ofrecerles mi experiencia socio-académica y evidenciar algunas de las consecuencias que entiendo implica para la docencia de la Matemática, por un lado nuestro ingreso en la Comunidad Europea y por otro la fundamental importancia que, en la formación de la persona presenta la Geometría.

He dicho.

BIBLIOGRAFÍA

Para la redacción se han considerado las siguientes obras y publicaciones

1.- Asenjo, F. G.: Introducción a la teoría de Modelos. Dpto. de Algebra y Fundamentos. Univ. de Zaragoza.

2.- Bourbaki, N.: a) The Architecture of Mathematics. Am. Math. Montly, 57, 1950.

b) Entretien avec trios members de Nicolas Bourbaki, por M. Andler. Gazette des Mathematiciens, 35, 1988.

3.- Chaitin, G. J.: Algoritmic Information Theory. Cambridge Univ. Press. 1987.

4.- Cohen, P. J.: a) Set theory and the continuum Hypothesis. Benjamin, Inc. 1966.

b) Comments on the foundations of set theory. Proceedings of Symposia in Pure Mathematics. 13, Part I, A.M.S. 1971

5.- Dieudonné, J.: a) Les methodes axiomatiques modernes et les fondements des mathematiques. En, Les Grands Courants de la Pensée Mathematique. Blanchard, Paris, 1962.

b) Panorama des mathematiques pures. Le Choix bourbachique. Gauthiers-Villars, 1977.

6.- Las enseñanzas Universitarias en España y en la Comunidad Económica Europea. Secretaría General, Consejo de Universidades, 1987.

7.- Eilenberg, S.: Automata, languages and machines. Vol. A y B. Acad. Press. 1974, 1978.

8.- Ehresmann, C.: Catégories et structures. Dunod, 1965.

9.- Gauss, C. F.: Disquisitiones Arithmaticae (1801), Paris 1807

10.- García Garrido, J. L.: Sistemas educativos de hoy. Editorial Dykinson, S.L. 1987.

11.- Gouyon-Duchamps: The Hamiltonian circuit problem is polynomial for 4-connected planar graphs. S.I.A.M J. Comput., (3), 11, 1982, 529-539.

12.- Halmos, P.: The Herart of Mathematics. The A. M. M. 87, (7), 1980.

13.- Howson, A.: Developments in Mathematical Education. Cambridge University Press, 1973.

14.- Johnstone, P.: Topos Theory. Acad. Press. 1977.

15.- Kitcher, P.: The Nature of Mathematical Knowledge. Oxford Univ. Press. 1984.

16.- Kline, R.

a) El fracaso de la matemática moderna. Siglo veintiuno de editores, S. A. (7º edición). 1986.

b) Matemáticas. La pérdida de la certidumbre. 1983.

17.- Lakatos, I.

a) Problems in the Philosophy of Mathematics. North. Holland, 1967.

b) Proofs and Refutations, Cambridge Univ. Press, 1976.

18.- Madariaga, S. de: Discurso de ingreso en la Real Academia. Imprenta Aguirre, 1976.

19.- Malaty, G. What is wrong with the “bac-to-basics” movement, and was wrong with the “new-math” movement. Int. J. Math. Educ. Sci. Technol., 1988, vol. 19, nº 1, pp. 57-65.

20.- Peano, G.: Formulaire Mathematique. Bocca Frènes/Ch. Clausen, Libraires, Turin, 1903.

21.- Polya, G.: Mathematical Discovery. Wiley, N. Y. 1981.

22.- Russel, B. Introducción a la Filosofía matemática. Ed. Losada Madrid, 1945.

23.- Schneider, I.: Introduction to the Social History of Nineteenth Century Mathematics. Birkhäuser, 1981, 75-88.

24.- Thom, R.:

a) Modern Mathematics: An Educational and Philosophic Error? [En Tymoczko, b) de esta bibliografía].

b) Developments in Mathematical Education, Edited by A. G. Howson, Cambridge, 1973, pp. 194-212.

25.- Turing, A. On computable numbers, with an application to the Entschesdungs problem. Proc. London Math. Soc., ser. 2, 42, (1936-37), 230-265; correction, Ibiden, 43, 1937, 544-546.

26.- Tymoczko, T.:

a) The Four-Color Problem and its Philosophycal Significance. Journal of Philosophy, 76, (2), 1979, 57-83.

b) New directions in the Philosophy of Mathematics. Birkhäuser Boston, Inc. 1986.

27.- Viviente Mateu J.L.

a) Bourbaki algo más que un pseudónimo. Secretariado de Publ. Univ. Zaragoza, 1985.

b) Informe sobre el coloquio “Mathematics à venir. Quels mathematiciens pour l’an 2000? Realizado en l’Ecole Polytechnique, Paris, diciembre, 1987. En prensa.

c) La matemática en España ante 1992, una versión. Actas XIII Jornadas Hispano-Lusas. Valladolid 1988 (en prensa).

d) Geometría y/o Algebra geométrica. Sixth International Colloquium on Differential Geometry, Santiago de Compostela 1988, (en prensa).

APENDICE A

Estructura matemática

Este concepto es uno de los más importantes en la matemática actual. Particularmente ha sido y es ampliamente utilizado y explotado por Bourbaki y su escuela.

Se habla de estructura de grupo, algebraica, topológica, diferencial, combinatoria, etc. Admitido un universo de cualquier teoría de conjuntos (el concepto es independiente de la teoría de conjuntos) los objetos matemáticos en él codificados no son simples conjuntos (o clases) sino sobre todo conjuntos (o clases) provistos de ciertas estructuras. Por ejemplo el conjunto de los números reales R, no sólo es un conjunto con la potencia del continuo, sino que aparece también como espacio provisto de una estructura topológica, de una estructura de cuerpo y de una estructura de orden (se trata de un cuerpo topológico totalmente ordenado). Damos a continuación un esquema de la caracterización formal de estructura, Bourbaki empieza por introducir la noción de: Especie de estructura Σ que está caracterizada al dar:

1º Una familia finita (no vacía) $(A_1, A_2, \ldots, A_m)$ de conjuntos, llamados *conjuntos de base principales* de Σ;

2º Una familia finita (eventualmente vacía) $(B_1, B_2, \ldots, B_n)$ de conjuntos, llamados *conjuntos de base auxiliares* de Σ;

3º De uno o varios esquemas de construcción de nuevos conjuntos, a partir de las familias de conjuntos $(A_j)_{1< j < m}$, $(B_k)_{1< k < n}$ mediante las operaciones de reunión, intersección, conjunto producto, etc.

Todo conjunto formado de esta manera se dice que pertenece a la escala de los conjuntos que tienen por base principal los conjuntos $(A_j)_{1< j < m}$ y por base auxiliar los conjuntos $(B_k)_{1< k < n}$.

4º De una relación entre los conjuntos de base principales y los nuevos conjuntos construidos, llamada *axioma de la especie de estructura* Σ.

Sea pues $(A_1, A_2, \ldots, A_m)$ una familia de conjuntos de base principales, $(B_1, B_2, \ldots, B_n)$ una familia de conjuntos de base auxiliares, S un cierto conjunto formado por superposición de un cierto números de operaciones sobre estas dos familias, tales como las definidas en el número 3º último, cada operación consistente, bien en el paso de un cierto conjunto M, al conjunto P(M) de todas las partes de M, bien en el paso a un conjunto producto de una cierta familia de conjuntos previamente construidos, entonces se tiene la:

<u>Definición</u>. *Un elemento cualquiera* $\mathcal{E}$ *de un conjunto cualquiera tal como el definido más arriba, se le llama estructura sobre* $(A_1, A_2, \ldots, A_m)$, de base auxiliar $(B_1, B_2, \ldots, B_n)$.

Se dice también que los conjuntos $(A_1, A_2, \ldots, A_m)$ están provistos de la estructura $\mathcal{E}$.

Ejemplo: Sea E un espacio topológico y $\mathcal{O}_E$ el conjunto de los abiertos de E; se tiene $P(E) \supset \mathcal{O}_E \Leftrightarrow \mathcal{O}_E \in P(P(E))$. Luego $\mathcal{O}_E$ es una estructura sobre E para $m = 1$, $n = 0$, $S = P(P(E))$ y $\mathcal{E} = \mathcal{O}_E$.

Apéndice B

Elaborado gracias a la colaboración y datos proporcionados por el

Servicio de Profesorado de la Secretaría de Estado
para Universidades e Investigación

APENDICE B1

Estudio demográfico Profesorado Universitario de Matemáticas por Areas.
en marzo de 1.988

Area de conocimiento	Función	– 1940	1941-45	1946-50	1951-55	1956-60	1961-65	Total
ALGEBRA	Cat. Univ.	1	5	8	6	3	1	24
	Prof. Tit. Univ.	4	6	10	16	18	11	65
	Cat. Esc. Univ.	1	1	--	1	2	--	5
	Prof. T. E. Univ.	1	2	4	5	1	1	14
ANALISIS MATEMATICO	Cat. Univ.	17	15	13	4	5	3	57
	Prof. Tit. Univ.	7	10	16	26	36	24	119
	Cat. Esc. Univ.	3	1	--	--	--	--	4
	Prof. T. E. Univ.	1	1	5	4	3	2	16
ASTRONOMIA	Cat. Univ.	4	3	--	--	--	2	9
	Prof. Tit. Univ.	5	8	15	12	11	9	60
DIDACTICA DE LA MATEMATICA	Cat. Esc. Univ.	15	--	1	1	3	5	25
	Prof. T. E. Univ..	5	11	30	22	24	31	123
ESTADISTICA E INVESTIGACION OPERATIVA	Cat. Univ.	5	12	9	6	8	5	45
	Prof. Tit. Univ.	7	4	16	23	31	36	117
	Cat. Esc. Univ.	1	1	--	--	2	2	6
	Prof. T. E. Univ.	2	--	5	6	2	5	20
GEOMETRIA Y TOPOLOGIA	Cat. Univ.	11	7	5	4	1	1	29
	Prof. Tit. Univ.	--	6	15	15	17	9	62
MATEMATICA APLICADA	Cat. Univ.	10	15	14	13	9	6	67
	Prof. Tit. Univ.	23	17	30	27	39	45	181
	Cat. Esc. Univ.	21	7	1	4	7	4	44
	Prof. T. E. Univ.	13	18	34	41	59	40	205

	Función	– 1940	1941-45	1946-50	1951-55	1956-60	1961-65	Total
TOTALES	Cat. Univ.	48	57	49	33	26	18	231
POR	Prof. Tit. Univ.	46	51	102	119	152	134	604
QUINQUENIOS	Cat. Esc. Univ.	41	10	2	6	14	11	84
	Prof. T. E. Univ.	22	32	78	78	89	79	378

APENDICE B2

Estudio demográfico Profesorado Universitario de Matemáticas por Universidades y areas.

Universidad de ALCALA

Area de conocimiento	Función	_ 1940	1941-45	1946-50	1951-55	1956-60	1961-65	Total	
ALGEBRA	Cat. Univ.	--	--	--	--	--	--	--	
	Prof. Tit. Univ.	--	1	--	--	--	--	1	
	Cat. Esc. Univ.	--	--	--	--	--	--	--	
	Prof. T. E. Univ.	--	--	--	--	--	--	--	
MATEMATICA APLICADA	Cat. Univ.	--	--	--	--	--	--	--	
	Prof. Tit. Univ.	--	--	--	--	--	--	--	
	Cat. Esc. Univ.	--	--	--	--	--	--	--	
	Prof. T. E. Univ.	--	--	1	1	--	--	2	

APENDICE B2

Estudio demográfico Profesorado Universitario de Matemáticas por Universidades y areas.

Universidad de ALICANTE

Area de conocimiento	Función	_ 1940	1941-45	1946-50	1951-55	1956-60	1961-65	Total	
ANALISIS MATEMATICO	Cat. Univ.	--	--	--	--	--	--	--	
	Prof. Tit. Univ.	--	--	--	--	2	--	2	
	Cat. Esc. Univ.	1	--	--	--	--	--	1	
	Prof. T. E. Univ.	--	1	1	--	1	--	3	
ESTADISTICA E INVESTIGACION OPERATIVA	Cat. Univ.	--	--	1	--	--	--	1	
	Prof. Tit. Univ.	--	1	2	--	--	--	3	
	Cat. Esc. Univ.	--	--	--	--	--	--	--	
	Prof. T. E. Univ.	--	--	2	--	--	--	2	

APENDICE B2

Estudio demográfico Profesorado Universitario de Matemáticas por Universidades y areas.

Universidad AUTONOMA DE BARCELONA

Area de conocimiento	Función	– 1940	1941-45	1946-50	1951-55	1956-60	1961-65	otal	
ALGEBRA	Cat. Univ.	--	--	--	1	--	--	1	
	Prof. Tit. Univ.	--	1	--	1	1	1	4	
	Cat. Esc. Univ.	--	--	--	--	--	--	--	
	Prof. T. E. Univ.	--	--	--	--	--	--	--	
ANALISIS MATEMATICO	Cat. Univ.	--	2	--	1	--	1	4	
	Prof. Tit. Univ.	--	--	--	--	2	1	3	
	Cat. Esc. Univ.	--	--	--	--	--	--	--	
	Prof. T. E. Univ.	--	--	--	--	--	--	--	
DIDACTICA DE LA MATEMATICA	Cat. Esc. Univ.	1	--	--	--	1	--	2	
	Prof. T. E. Univ..	2	1	1	1	2	3	10	
ESTADISTICA E INVESTIGACION OPERATIVA	Cat. Univ.	--	--	--	--	--	--	--	
	Prof. Tit. Univ.	--	--	--	--	--	1	1	
	Cat. Esc. Univ.	--	--	--	--	--	--	--	
	Prof. T. E. Univ.	--	--	--	--	--	--	--	
GEOMETRIA Y TOPOLOGIA	Cat. Univ.	--	2	--	2	--	1	5	
	Prof. Tit. Univ.	--	--	--	--	--	--	--	
MATEMATICA APLICADA	Cat. Univ.	1	--	--	--	1	--	2	
	Prof. Tit. Univ.	--	--	--	2	--	3	5	
	Cat. Esc. Univ.	--	--	--	--	--	--	--	
	Prof. T. E. Univ.	--	--	--	--	--	--	--	

APENDICE B2

Estudio demográfico Profesorado Universitario de Matemáticas por Universidades y areas.

Universidad AUTONOMA DE MADRID

Area de conocimiento	Función	– 1940	1941-45	1946-50	1951-55	1956-60	1961-65	Total	
ALGEBRA	Cat. Univ.	--	--	--	--	--	--	--	
	Prof. Tit. Univ.	--	--	--	--	--	--	--	
	Cat. Esc. Univ.	--	--	--	--	--	--	--	
	Prof. T. E. Univ.	--	--	--	1	--	--	1	
ANALISIS MATEMATICO	Cat. Univ.	2	--	3	--	1	--	6	
	Prof. Tit. Univ.	1	1	2	5	1	1	11	
	Cat. Esc. Univ.	1	--	--	--	--	--	1	
	Prof. T. E. Univ.	--	--	--	--	--	--	--	
DIDACTICA DE LA MATEMATICA	Cat. Esc. Univ.	2	--	--	--	--	--	2	
	Prof. T. E. Univ..	--	--	1	--	--	--	1	
ESTADISTICA E INVESTIGACION OPERATIVA	Cat. Univ.	--	--	--	1	1	--	2	
	Prof. Tit. Univ.	--	--	2	--	1	--	3	
	Cat. Esc. Univ.	--	--	--	--	--	--	--	
	Prof. T. E. Univ.	--	--	--	--	--	--	--	
GEOMETRIA Y TOPOLOGIA	Cat. Univ.	1	1	--	--	--	--	2	
	Prof. Tit. Univ.	--	1	2	1	1	--	5	
MATEMATICA APLICADA	Cat. Univ.	--	--	--	1	--	--	1	
	Prof. Tit. Univ.	--	--	--	--	--	--	--	
	Cat. Esc. Univ.	--	--	--	--	--	--	--	
	Prof. T. E. Univ.	--	--	1	2	--	--	3	

Estudio demográfico Profesorado Universitario de Matemáticas por Universidades y areas.

Universidad de BALEARES

Area de conocimiento	Función	_ 1940	1941-45	1946-50	1951-55	1956-60	1961-65	Total	
ANALISIS MATEMATICO	Cat. Univ.	--	--	--	--	--	--	--	
	Prof. Tit. Univ.	--	--	--	--	--	--	--	
	Cat. Esc. Univ.	--	--	--	--	--	--	--	
	Prof. T. E. Univ.	--	1	1	1	--	--	3	
ASTRONOMIA	Cat. Univ.	--	--	--	--	1	--	1	
	Prof. Tit. Univ.	--	--	--	--	--	1	1	

APENDICE B2

Estudio demográfico Profesorado Universitario de Matemáticas por Universidades y areas.

Universidad de CADIZ

Area de conocimiento	Función	_ 1940	1941-45	1946-50	1951-55	1956-60	1961-65	Total	
ANALISIS MATEMATICO	Cat. Univ.	--	--	--	1	--	--	1	
	Prof. Tit. Univ.	--	--	--	--	2	--	2	
	Cat. Esc. Univ.	--	--	--	--	--	--	--	
	Prof. T. E. Univ.	--	--	--	--	--	--	--	
DIDACTICA DE LA MATEMATICA	Cat. Esc. Univ.	1	--	--	--	--	--	1	
	Prof. T. E. Univ..	--	--	--	--	2	--	2	
ESTADISTICA E INVESTIGACION OPERATIVA	Cat. Univ.	--	--	--	1	--	--	1	
	Prof. Tit. Univ.	--	--	--	--	--	--	--	
	Cat. Esc. Univ.	--	--	--	--	--	--	--	
	Prof. T. E. Univ.	--	--	1	--	--	--	1	
MATEMATICA APLICADA	Cat. Univ.	--	--	--	--	--	--	--	
	Prof. Tit. Univ.	--	--	--	--	--	--	--	
	Cat. Esc. Univ.	1	--	--	--	--	1	2	
	Prof. T. E. Univ.	--	1	2	--	1	--	4	

APENDICE B2

Estudio demográfico Profesorado Universitario de Matemáticas por Universidades y areas.

Universidad de CANTABRIA

Area de conocimiento	Función	– 1940	1941-45	1946-50	1951-55	1956-60	1961-65	Total
ALGEBRA	Cat. Univ.	--	--	1	--	--	--	1
	Prof. Tit. Univ.	--	1	1	1	--	--	3
	Cat. Esc. Univ.	--	--	--	1	--	--	1
	Prof. T. E. Univ.	--	--	--	--	--	--	--
ANALISIS MATEMATICO	Cat. Univ.	--	2	2	--	--	1	5
	Prof. Tit. Univ.	1	--	1	--	5	--	7
	Cat. Esc. Univ.	--	--	--	--	--	--	--
	Prof. T. E. Univ.	1	--	--	--	--	--	1
DIDACTICA DE LA MATEMATICA	Cat. Esc. Univ.	--	--	--	--	--	--	--
	Prof. T. E. Univ..	--	--	--	--	--	1	1
ESTADISTICA E INVESTIGACION OPERATIVA	Cat. Univ.	--	--	--	--	--	1	1
	Prof. Tit. Univ.	--	--	--	--	--	--	--
	Cat. Esc. Univ.	--	--	--	--	--	--	--
	Prof. T. E. Univ.	--	--	--	--	--	--	--
MATEMATICA APLICADA	Cat. Univ.	--	--	1	1	--	--	2
	Prof. Tit. Univ.	2	--	1	2	--	1	6
	Cat. Esc. Univ.	2	--	1	--	--	--	3
	Prof. T. E. Univ.	--	1	2	1	2	--	6

APENDICE B2

Estudio demográfico Profesorado Universitario de Matemáticas por Universidades y areas.

Universidad CASTELLANO MANCHEGA

Area de conocimiento	Función	– 1940	1941-45	1946-50	1951-55	1956-60	1961-65	Total
DIDACTICA DE LA MATEMATICA	Cat. Esc. Univ.	--	--	--	--	--	--	--
	Prof. T. E. Univ..	1	--	1	--	1	--	3
ESTADISTICA E INVESTIGACION OPERATIVA	Cat. Univ.	--	--	--	--	--	--	--
	Prof. Tit. Univ.	--	--	--	--	--	--	--
	Cat. Esc. Univ.	--	--	--	--	--	--	--
	Prof. T. E. Univ.	--	--	1	--	--	--	1
MATEMATICA APLICADA	Cat. Univ.	--	--	--	--	--	--	--
	Prof. Tit. Univ.	--	--	--	--	--	--	--
	Cat. Esc. Univ.	--	--	--	--	--	--	--
	Prof. T. E. Univ.	--	--	--	--	--	1	1

APENDICE B2

Estudio demográfico Profesorado Universitario de Matemáticas por Universidades y areas.

Universidad CENTRAL DE BARCELONA

Area de conocimiento	Función	– 1940	1941-45	1946-50	1951-55	1956-60	1961-65	Total	
ALGEBRA	Cat. Univ.	--	--	1	--	1	--	2	
	Prof. Tit. Univ.	1	1	--	--	2	2	6	
	Cat. Esc. Univ.	--	--	--	--	--	--	--	
	Prof. T. E. Univ.	--	--	--	--	--	--	--	
ANALISIS MATEMATICO	Cat. Univ.	2	1	--	--	--	--	3	
	Prof. Tit. Univ.	--	--	1	1	1	--	3	
	Cat. Esc. Univ.	--	--	--	--	--	--	--	
	Prof. T. E. Univ.	--	--	--	--	--	--	--	
ASTRONOMIA	Cat. Univ.	--	1	--	--	--	--	1	
	Prof. Tit. Univ.	1	--	8	3	2	1	15	
DIDACTICA DE LA MATEMATICA	Cat. Esc. Univ.	--	--	--	--	1	--	1	
	Prof. T. E. Univ..	--	1	1	1	3	--	6	
ESTADISTICA E INVESTIGACION OPERATIVA	Cat. Univ.	--	1	--	--	1	1	3	
	Prof. Tit. Univ.	--	--	--	--	4	2	6	
	Cat. Esc. Univ.	--	--	--	--	--	--	--	
	Prof. T. E. Univ.	--	--	--	--	--	--	--	
GEOMETRIA Y TOPOLOGIA	Cat. Univ.	1	--	1	--	--	--	2	
	Prof. Tit. Univ.	--	1	2	--	1	--	4	
MATEMATICA APLICADA	Cat. Univ.	1	--	1	--	--	--	2	
	Prof. Tit. Univ.	--	--	--	--	3	3	6	
	Cat. Esc. Univ.	--	--	--	--	--	--	--	
	Prof. T. E. Univ.	--	--	--	--	--	--	--	

APENDICE B2

Estudio demográfico Profesorado Universitario de Matemáticas por Universidades y areas.

Universidad COMPLUTENSE DE MADRID

Area de conocimiento	Función	– 1940	1941-45	1946-50	1951-55	1956-60	1961-65	Total	
ALGEBRA	Cat. Univ.	--	--	1	--	2	--	3	
	Prof. Tit. Univ.	1	1	1	--	4	1	8	
	Cat. Esc. Univ.	1	--	--	--	--	--	1	
	Prof. T. E. Univ.	1	--	--	2	1	--	4	
ANALISIS MATEMATICO	Cat. Univ.	2	1	1	1	--	--	5	
	Prof. Tit. Univ.	--	1	2	3	2	--	8	
	Cat. Esc. Univ.	--	--	--	--	--	--	--	
	Prof. T. E. Univ.								
ASTRONOMIA	Cat. Univ.	2	1	--	--	--	1	4	
	Prof. Tit. Univ.	1	3	3	5	4	4	20	
DIDACTICA DE LA MATEMATICA	Cat. Esc. Univ.	1	--	--	--	--	--	1	
	Prof. T. E. Univ..	1	1	--	2	4	3	11	
ESTADISTICA E INVESTIGACION OPERATIVA	Cat. Univ.	1	3	1	2	--	1	8	
	Prof. Tit. Univ.	--	--	1	5	4	1	11	
	Cat. Esc. Univ.	--	--	--	--	--	--	--	
	Prof. T. E. Univ.	1	--	--	2	--	1	4	
GEOMETRIA Y TOPOLOGIA	Cat. Univ.	3	1	--	--	--	--	4	
	Prof. Tit. Univ.	--	1	4	1	1	--	7	
MATEMATICA APLICADA	Cat. Univ.	--	--	2	--	--	1	3	
	Prof. Tit. Univ.	--	4	2	2	3	--	11	
	Cat. Esc. Univ.	--	--	--	--	--	--	--	
	Prof. T. E. Univ.	--	--	--	--	--	1	1	

APENDICE B2

Estudio demográfico Profesorado Universitario de Matemáticas por Universidades y areas.

Universidad de CORDOBA

Area de conocimiento	Función	– 1940	1941-45	1946-50	1951-55	1956-60	1961-65	Total	
ALGEBRA	Cat. Univ.	--	--	--	--	--	--	--	
	Prof. Tit. Univ.	--	--	--	--	--	--	--	
	Cat. Esc. Univ.	--	1	--	--	--	--	1	
	Prof. T. E. Univ.	--	--	--	--	--	--	--	
ANALISIS MATEMATICO	Cat. Univ.	--	--	--	--	--	--	--	
	Prof. Tit. Univ.	--	--	--	--	--	1	1	
	Cat. Esc. Univ.	--	--	--	--	--	--	--	
	Prof. T. E. Univ.	--	--	--	--	--	--	--	
DIDACTICA DE LA MATEMATICA	Cat. Esc. Univ.	--	--	--	--	--	--	--	
	Prof. T. E. Univ..	--	--	1	--	2	--	3	
ESTADISTICA E INVESTIGACION OPERATIVA	Cat. Univ.	--	--	1	--	--	--	1	
	Prof. Tit. Univ.	--	--	1	--	1	-	2	
	Cat. Esc. Univ.	--	--	--	--	--	--	--	
	Prof. T. E. Univ.	--	--	--	--	--	--	--	
MATEMATICA APLICADA	Cat. Univ.	--	--	--	--	--	--	--	
	Prof. Tit. Univ.	1	--	1	--	1	1	4	
	Cat. Esc. Univ.	--	--	--	--	1	--	1	
	Prof. T. E. Univ.	--	--	1	1	1	1	4	

APENDICE B2

Estudio demográfico Profesorado Universitario de Matemáticas por Universidades y areas.

Universidad de EXTREMADURA

Area de conocimiento	Función	– 1940	1941-45	1946-50	1951-55	1956-60	1961-65	Total	
ALGEBRA	Cat. Univ.	--	--	--	--	1	--	1	
	Prof. Tit. Univ.	--	--	--	--	1	--	1	
	Cat. Esc. Univ.	--	--	--	--	--	--	--	
	Prof. T. E. Univ.	--	--	--	--	--	--	--	
ANALISIS MATEMATICO	Cat. Univ.	--	1	1	--	1	--	3	
	Prof. Tit. Univ.	--	--	--	--	3	2	5	
	Cat. Esc. Univ.	--	--	--	--	--	--	--	
	Prof. T. E. Univ.	--	--	--	--	1	--	1	
ASTRONOMIA	Cat. Univ.	--	--	--	--	--	--	--	
	Prof. Tit. Univ.	--	--	--	1	--	--	1	
DIDACTICA DE LA MATEMATICA	Cat. Esc. Univ.	--	--	--	--	--	--	--	
	Prof. T. E. Univ..	--	--	2	2	2	1	7	
ESTADISTICA E INVESTIGACION OPERATIVA	Cat. Univ.	--	--	--	--	1	--	1	
	Prof. Tit. Univ.	--	--	--	--	--	1	1	
	Cat. Esc. Univ.	--	--	--	--	--	--	--	
	Prof. T. E. Univ.	--	--	--	1	--	--	1	
MATEMATICA APLICADA	Cat. Univ.	--	--	--	--	--	--	--	
	Prof. Tit. Univ.	--	--	--	--	--	1	1	
	Cat. Esc. Univ.	1	--	--	--	1	--	2	
	Prof. T. E. Univ.	--	--	1	--	3	1	5	

çAPENDICE B2

Estudio demográfico Profesorado Universitario de Matemáticas por Universidades y areas.

Universidad de GRANADA

Area de conocimiento	Función	– 1940	1941-45	1946-50	1951-55	1956-60	1961-65	Total	
ALGEBRA	Cat. Univ.	--	--	--	--	--	--	--	
	Prof. Tit. Univ.	--	--	2	2	3	1	8	
	Cat. Esc. Univ.	--	--	--	--	--	--	--	
	Prof. T. E. Univ.	--	--	--	--	--	--	--	
ANALISIS MATEMATICO	Cat. Univ.	--	1	--	--	1	--	2	
	Prof. Tit. Univ.	--	1	2	2	4	--	9	
	Cat. Esc. Univ.	--	--	--	--	--	--	--	
	Prof. T. E. Univ.	--	--	--	--	--	--	--	
ASTRONOMIA	Cat. Univ.	--	--	--	--	--	--	--	
	Prof. Tit. Univ.	--	1	2	--	1	--	4	
DIDACTICA DE LA MATEMATICA	Cat. Esc. Univ.	--	--	1	--	--	1	2	
	Prof. T. E. Univ..	--	1	8	2	5	1	17	
ESTADISTICA E INVESTIGACION OPERATIVA	Cat. Univ.	--	--	2	1	1	--	4	
	Prof. Tit. Univ.	--	--	--	1	6	3	10	
	Cat. Esc. Univ.	--	--	--	--	2	1	3	
	Prof. T. E. Univ.	--	--	--	2	--	1	3	
GEOMETRIA Y TOPOLOGIA	Cat. Univ.	--	1	--	--	--	--	1	
	Prof. Tit. Univ.	--	--	--	2	3	1	6	
MATEMATICA APLICADA	Cat. Univ.	--	--	1	--	1	--	2	
	Prof. Tit. Univ.	--	--	--	1	--	1	2	
	Cat. Esc. Univ.	2	1	--	--	--	--	3	
	Prof. T. E. Univ.	2	--	1	--	2	3	8	

APENDICE B2

Estudio demográfico Profesorado Universitario de Matemáticas por Universidades y areas.

Universidad de LA LAGUNA

Area de conocimiento	Función	– 1940	1941-45	1946-50	1951-55	1956-60	1961-65	Total	
ALGEBRA	Cat. Univ.	--	--	1	--	--	--	1	
	Prof. Tit. Univ.	--	--	--	--	--	--	--	
	Cat. Esc. Univ.	--	--	--	--	--	--	--	
	Prof. T. E. Univ.	--	--	--	--	--	--	--	
ANALISIS MATEMATICO	Cat. Univ.	--	--	--	--	--	1	1	
	Prof. Tit. Univ.	--	--	1	2	4	--	7	
	Cat. Esc. Univ.	--	--	--	--	--	--	--	
	Prof. T. E. Univ.	--	--	2	1	--	--	3	
ASTRONOMIA	Cat. Univ.	1	--	--	--	--	1	2	
	Prof. Tit. Univ.	--	--	--	--	--	1	1	
DIDACTICA DE LA MATEMATICA	Cat. Esc. Univ.	1	--	--	--	--	1	2	
	Prof. T. E. Univ..	--	1	--	1	4	--	6	
ESTADISTICA E INVESTIGACION OPERATIVA	Cat. Univ.	--	1	--	--	--	--	1	
	Prof. Tit. Univ.	--	--	--	--	1	3	4	
	Cat. Esc. Univ.	--	--	--	--	--	--	--	
	Prof. T. E. Univ.	--	--	--	--	--	--	--	
GEOMETRIA Y TOPOLOGIA	Cat. Univ.	--	--	--	--	--	--	--	
	Prof. Tit. Univ.	--	--	--	--	1	1	2	

APENDICE B2

Estudio demográfico Profesorado Universitario de Matemáticas por Universidades y areas.

Universidad de LEON

Area de conocimiento	Función	– 1940	1941-45	1946-50	1951-55	1956-60	1961-65	Total	
ALGEBRA	Cat. Univ.	--	--	--	--	--	--	--	
	Prof. Tit. Univ.	--	--	--	--	--	--	--	
	Cat. Esc. Univ.	--	--	--	--	--	--	--	
	Prof. T. E. Univ.	--	--	1	--	--	--	1	
ANALISIS MATEMATICO	Cat. Univ.	--	--	--	--	--	--	--	
	Prof. Tit. Univ.	--	--	--	--	--	--	--	
	Cat. Esc. Univ.	--	--	--	--	--	--	--	
	Prof. T. E. Univ.	--	--	--	1	1	--	2	
DIDACTICA DE LA MATEMATICA	Cat. Esc. Univ.	--	--	--	--	--	1	1	
	Prof. T. E. Univ..	--	--	1	--	--	--	1	
ESTADISTICA E INVESTIGACION OPERATIVA	Cat. Univ.	--	--	--	--	--	--	--	
	Prof. Tit. Univ.	--	--	--	--	--	--	--	
	Cat. Esc. Univ.	--	--	--	--	--	--	--	
	Prof. T. E. Univ.	--	--	--	--	1	1	2	
MATEMATICA APLICADA	Cat. Univ.	--	--	--	--	--	--	--	
	Prof. Tit. Univ.	--	--	--	--	--	2	2	
	Cat. Esc. Univ.	--	1	--	1	--	--	2	
	Prof. T. E. Univ.	--	--	--	--	2	--	2	

APENDICE B2

Estudio demográfico Profesorado Universitario de Matemáticas por Universidades y areas.

Universidad de MALAGA

Area de conocimiento	Función	– 1940	1941-45	1946-50	1951-55	1956-60	1961-65	Total	
ALGEBRA	Cat. Univ.	--	--	--	1	--	--	1	
	Prof. Tit. Univ.	--	--	--	1	--	--	1	
	Cat. Esc. Univ.	--	--	--	--	--	--	--	
	Prof. T. E. Univ.	--	--	1	--	--	--	1	
ANALISIS MATEMATICO	Cat. Univ.	2	--	--	--	--	--	2	
	Prof. Tit. Univ.	1	--	--	--	1	1	3	
	Cat. Esc. Univ.	--	--	--	--	--	--	--	
	Prof. T. E. Univ.	--	--	--	--	--	--	--	
DIDACTICA DE LA MATEMATICA	Cat. Esc. Univ.	--	--	--	--	--	--	--	
	Prof. T. E. Univ..	--	1	1	4	1	1	8	
ESTADISTICA E INVESTIGACION OPERATIVA	Cat. Univ.	--	1	--	--	--	--	1	
	Prof. Tit. Univ.	--	1	1	--	1	--	3	
	Cat. Esc. Univ.	--	--	--	--	--	--	--	
	Prof. T. E. Univ.	--	--	--	--	--	--	--	
GEOMETRIA Y TOPOLOGIA	Cat. Univ.	--	1	1	--	--	--	2	
	Prof. Tit. Univ.	--	--	--	--	--	--	--	
MATEMATICA APLICADA	Cat. Univ.	--	--	1	--	--	--	1	
	Prof. Tit. Univ.	--	1	1	--	--	--	2	
	Cat. Esc. Univ.	--	--	--	--	--	--	--	
	Prof. T. E. Univ.	--	2	--	1	--	--	3	

APENDICE B2

Estudio demográfico Profesorado Universitario de Matemáticas por Universidades y areas.

Universidad de MURCIA

Area de conocimiento	Función	– 1940	1941-45	1946-50	1951-55	1956-60	1961-65	Total	
ALGEBRA	Cat. Univ.	--	--	1	--	--	--	1	
	Prof. Tit. Univ.	--	--	2	1	2	--	5	
	Cat. Esc. Univ.	--	--	--	--	--	--	--	
	Prof. T. E. Univ.	--	--	--	--	--	--	--	
ANALISIS MATEMATICO	Cat. Univ.	1	1	--	--	--	--	2	
	Prof. Tit. Univ.	--	1	--	1	3	1	6	
	Cat. Esc. Univ.	--	--	--	--	--	--	--	
	Prof. T. E. Univ.	--	--	--	--	--	--	--	
DIDACTICA DE LA MATEMATICA	Cat. Esc. Univ.	1	--	--	--	--	--	1	
	Prof. T. E. Univ..	--	--	4	1	--	1	6	
ESTADISTICA E INVESTIGACION OPERATIVA	Cat. Univ.	1	--	--	--	--	--	1	
	Prof. Tit. Univ.	1	--	--	--	--	--	1	
	Cat. Esc. Univ.	1	--	--	--	--	--	1	
	Prof. T. E. Univ.	--	--	--	--	--	--	--	
GEOMETRIA Y TOPOLOGIA	Cat. Univ.	--	--	--	--	--	--	--	
	Prof. Tit. Univ.	--	--	--	1	--	--	1	
MATEMATICA APLICADA	Cat. Univ.	--	--	--	--	--	--	--	
	Prof. Tit. Univ.	1	--	--	--	--	--	1	
	Cat. Esc. Univ.	1	--	--	--	--	--	1	
	Prof. T. E. Univ.	--	--	--	--	4	2	6	

APENDICE B2

Estudio demográfico Profesorado Universitario de Matemáticas por Universidades y areas.

Universidad NACIONAL DE EDUCACION A DISTANCIA

Area de conocimiento	Función	– 1940	1941-45	1946-50	1951-55	1956-60	1961-65	Total	
ANALISIS MATEMATICO	Cat. Univ.	--	--	--	1	--	--	1	
	Prof. Tit. Univ.	--	1	--	1	--	1	3	
	Cat. Esc. Univ.	--	--	--	--	--	--	--	
	Prof. T. E. Univ.	--	--	--	--	--	--	--	
ESTADISTICA E INVESTIGACION OPERATIVA	Cat. Univ.	1	--	1	--	--	--	2	
	Prof. Tit. Univ.	--	--	--	1	1	1	3	
	Cat. Esc. Univ.	--	--	--	--	--	--	--	
	Prof. T. E. Univ.	--	--	--	--	--	--	--	
GEOMETRIA Y TOPOLOGIA	Cat. Univ.	--	--	--	--	1	--	1	
	Prof. Tit. Univ.	--	--	--	--	1	2	3	
MATEMATICA APLICADA	Cat. Univ.	--	--	--	--	--	--	--	
	Prof. Tit. Univ.	--	1	--	--	1	--	2	
	Cat. Esc. Univ.	--	--	--	--	--	--	--	
	Prof. T. E. Univ.	--	--	--	--	--	--	--	

APENDICE B2

Estudio demográfico Profesorado Universitario de Matemáticas por Universidades y areas.

Universidad de OVIEDO

Area de conocimiento	Función	– 1940	1941-45	1946-50	1951-55	1956-60	1961-65	Total	
DIDACTICA DE LA MATEMATICA	Cat. Esc. Univ.	2	--	--	--	--	--	2	
	Prof. T. E. Univ..	1	1	2	--	--	--	4	
ESTADISTICA E INVESTIGACION OPERATIVA	Cat. Univ.	--	--	1	--	--	--	1	
	Prof. Tit. Univ.	--	--	--	1	2	--	3	
	Cat. Esc. Univ.	--	--	--	--	--	--	--	
	Prof. T. E. Univ.	--	--	--	--	1	--	1	
MATEMATICA APLICADA	Cat. Univ.	1	1	--	--	--	--	2	
	Prof. Tit. Univ.	1	--	1	--	1	--	3	
	Cat. Esc. Univ.	1	1	--	--	1	--	3	
	Prof. T. E. Univ.	--	--	1	1	--	4	6	

APENDICE B2

Estudio demográfico Profesorado Universitario de Matemáticas por Universidades y areas.

Universidad del PAIS VASCO

Area de conocimiento	Función	– 1940	1941-45	1946-50	1951-55	1956-60	1961-65	Total
ALGEBRA	Cat. Univ.	--	--	--	--	--	--	1
	Prof. Tit. Univ.	--	--	--	--	--	--	--
	Cat. Esc. Univ.	--	--	--	--	--	--	--
	Prof. T. E. Univ.	--	--	--	1	--	--	1
ANALISIS MATEMATICO	Cat. Univ.	1	--	1	--	--	--	2
	Prof. Tit. Univ.	--	1	--	2	1	1	5
	Cat. Esc. Univ.	--	--	--	--	--	--	--
	Prof. T. E. Univ.	--	--	--	--	--	--	--
DIDACTICA DE LA MATEMATICA	Cat. Esc. Univ.	1	--	--	--	1	--	2
	Prof. T. E. Univ..	--	1	1	--	1	1	4
ESTADISTICA E INVESTIGACION OPERATIVA	Cat. Univ.	--	--	--	--	--	--	--
	Prof. Tit. Univ.	2	--	--	--	--	1	3
	Cat. Esc. Univ.	--	--	--	--	--	--	--
	Prof. T. E. Univ.	--	--	--	--	--	--	--
GEOMETRIA Y TOPOLOGIA	Cat. Univ.	--	--	--	--	1	--	1
	Prof. Tit. Univ.	--	1	--	--	--	--	1
MATEMATICA APLICADA	Cat. Univ.	--	--	--	--	--	--	--
	Prof. Tit. Univ.	2	1	--	2	2	--	7
	Cat. Esc. Univ.	1	--	--	--	--	--	1
	Prof. T. E. Univ.	1	3	3	2	4	2	15

APENDICE B2

Estudio demográfico Profesorado Universitario de Matemáticas por Universidades y areas.

Universidad POLITECNICA DE CATALUÑA

Area de conocimiento	Función	– 1940	1941-45	1946-50	1951-55	1956-60	1961-65	Total
ESTADISTICA E INVESTIGACION OPERATIVA	Cat. Univ.	1	1	--	--	1	--	3
	Prof. Tit. Univ.	--	1	--	1	3	2	7
	Cat. Esc. Univ.	--	--	--	--	--	--	--
	Prof. T. E. Univ.	--	--	--	--	--	--	--
MATEMATICA APLICADA	Cat. Univ.	1	2	--	--	4	1	8
	Prof. Tit. Univ.	2	2	5	1	5	8	23
	Cat. Esc. Univ.	1	1	--	--	2	--	4
	Prof. T. E. Univ.	--	1	2	5	6	5	19

APENDICE B2

Estudio demográfico Profesorado Universitario de Matemáticas por Universidades y areas.

Universidad POLITECNICA DE VALENCIA

Area de conocimiento	Función	_ 1940	1941-45	1946-50	1951-55	1956-60	1961-65	Total	
ESTADISTICA E INVESTIGACION OPERATIVA	Cat. Univ.	--	2	--	--	--	--	2	
	Prof. Tit. Univ.	2	--	1	--	1	1	5	
	Cat. Esc. Univ.	--	1	--	--	--	--	1	
	Prof. T. E. Univ.	--	--	--	--	--	--	--	
MATEMATICA APLICADA	Cat. Univ.	--	2	3	1	2	--	8	
	Prof. Tit. Univ.	1	1	1	--	4	1	8	
	Cat. Esc. Univ.	2	--	--	--	1	--	3	
	Prof. T. E. Univ.	1	1	5	3	9	5	24	

APENDICE B2

Estudio demográfico Profesorado Universitario de Matemáticas por Universidades y areas.

Universidad POLITECNICA DE LAS PALMAS

Area de conocimiento	Función	_ 1940	1941-45	1946-50	1951-55	1956-60	1961-65	Total	
MATEMATICA APLICADA	Cat. Univ.	--	--	--	--	--	--	--	
	Prof. Tit. Univ.	--	--	--	--	2	--	2	
	Cat. Esc. Univ.	--	--	--	1	--	--	1	
	Prof. T. E. Univ.	--	--	2	2	--	--	4	

APENDICE B2

Estudio demográfico Profesorado Universitario de Matemáticas por Universidades y areas.

Universidad POLITECNICA DE MADRID

Area de conocimiento	Función	_ 1940	1941-45	1946-50	1951-55	1956-60	1961-65	Total	
ANALISIS MATEMATICO	Cat. Univ.	--	--	--	--	--	--	--	
	Prof. Tit. Univ.	--	--	1	--	--	--	1	
	Cat. Esc. Univ.	--	--	--	--	--	--	--	
	Prof. T. E. Univ.	--	--	--	--	--	--	--	
ESTADISTICA E INVESTIGACION OPERATIVA	Cat. Univ.	--	2	1	--	--	--	3	
	Prof. Tit. Univ.	2	--	--	--	2	6	10	
	Cat. Esc. Univ.	--	--	--	--	--	--	--	
	Prof. T. E. Univ.								
MATEMATICA APLICADA	Cat. Univ.	10	5	4	1	1	3	24	
	Prof. Tit. Univ.	10	7	6	6	6	15	50	
	Cat. Esc. Univ.	2	1	--	2	1	1	7	
	Prof. T. E. Univ.	5	4	2	8	14	11	44	

APENDICE B2

Estudio demográfico Profesorado Universitario de Matemáticas por Universidades y areas.

Universidad de SALAMANCA

Area de conocimiento	Función	– 1940	1941-45	1946-50	1951-55	1956-60	1961-65	Total	
ALGEBRA	Cat. Univ.	1	--	--	--	--	--	1	
	Prof. Tit. Univ.	--	--	--	--	--	--	--	
	Cat. Esc. Univ.	--	--	--	--	--	--	--	
	Prof. T. E. Univ.	--	--	--	--	--	--	--	
ANALISIS MATEMATICO	Cat. Univ.	--	2	--	--	--	--	2	
	Prof. Tit. Univ.	--	--	--	1	--	--	1	
	Cat. Esc. Univ.	--	--	--	--	--	--	--	
	Prof. T. E. Univ.	--	--	--	--	--	--	--	
ASTRONOMIA	Cat. Univ.	1	--	--	--	--	--	1	
	Prof. Tit. Univ.	2	3	2	1	--	--	8	
DIDACTICA DE LA MATEMATICA	Cat. Esc. Univ.	--	--	--	--	--	--	1	
	Prof. T. E. Univ..	--	--	1	2	--	--	3	
ESTADISTICA E INVESTIGACION OPERATIVA	Cat. Univ.	--	--	1	--	--	--	1	
	Prof. Tit. Univ.	--	--	--	--	1	--	1	
	Cat. Esc. Univ.	--	--	--	--	--	--	--	
	Prof. T. E. Univ.	--	--	--	--	--	--	--	
GEOMETRIA Y TOPOLOGIA	Cat. Univ.	3	--	--	1	--	--	4	
	Prof. Tit. Univ.	--	--	--	--	2	--	2	
MATEMATICA APLICADA	Cat. Univ.	--	--	--	--	--	--	--	
	Prof. Tit. Univ.	--	--	--	--	--	--	--	
	Cat. Esc. Univ.	1	--	--	--	--	--	1	
	Prof. T. E. Univ.	--	--	1	--	2	--	3	

APENDICE B2

Estudio demográfico Profesorado Universitario de Matemáticas por Universidades y areas.

Universidad de SANTIAGO

Area de conocimiento	Función	– 1940	1941-45	1946-50	1951-55	1956-60	1961-65	Total	
ALGEBRA	Cat. Univ.	--	2	--	--	--	--	2	
	Prof. Tit. Univ.	1	2	--	3	2	1	9	
	Cat. Esc. Univ.	--	--	--	--	1	--	1	
	Prof. T. E. Univ.	--	--	--	--	--	--	--	
ANALISIS MATEMATICO	Cat. Univ.	2	1	2	--	--	--	5	
	Prof. Tit. Univ.	--	2	1	2	2	1	8	
	Cat. Esc. Univ.	--	--	--	--	--	--	--	
	Prof. T. E. Univ.	--	--	--	--	--	--	--	
ASTRONOMIA	Cat. Univ.	--	--	--	--	--	--	--	
	Prof. Tit. Univ.	--	--	--	1	--	--	1	
DIDACTICA DE LA MATEMATICA	Cat. Esc. Univ.	1	--	--	--	--	--	1	
	Prof. T. E. Univ..	--	1	--	1	5	--	7	
ESTADISTICA E INVESTIGACION OPERATIVA	Cat. Univ.	--	--	--	--	--	--	--	
	Prof. Tit. Univ.	--	--	--	2	5	--	7	
	Cat. Esc. Univ.	--	--	--	--	--	--	--	
	Prof. T. E. Univ.	--	--	1	--	--	1	2	
GEOMETRIA Y TOPOLOGIA	Cat. Univ.	1	--	1	--	--	--	2	
	Prof. Tit. Univ.	--	--	2	4	3	1	10	
MATEMATICA APLICADA	Cat. Univ.	--	--	1	--	--	1	2	
	Prof. Tit. Univ.	--	--	--	2	4	--	6	
	Cat. Esc. Univ.	1	1	--	--	--	--	2	
	Prof. T. E. Univ.	2	1	1	2	1	--	7	

APENDICE B2

Estudio demográfico Profesorado Universitario de Matemáticas por Universidades y areas.

Universidad de SEVILLA

Area de conocimiento	Función	– 1940	1941-45	1946-50	1951-55	1956-60	1961-65	Total	
ALGEBRA	Cat. Univ.	--	1	--	--	--	--	1	
	Prof. Tit. Univ.	--	--	--	1	2	2	5	
	Cat. Esc. Univ.	--	--	--	--	--	--	--	
	Prof. T. E. Univ.	--	--	--	--	--	--	--	
ANALISIS MATEMATICO	Cat. Univ.	--	1	1	-	1	--	3	
	Prof. Tit. Univ.	1	--	3	4	2	3	13	
	Cat. Esc. Univ.	--	--	--	--	--	--	--	
	Prof. T. E. Univ.	--	--	--	--	--	1	1	
ASTRONOMIA	Cat. Univ.	--	--	--	--	--	--	--	
	Prof. Tit. Univ.	--	--	1	--	--	--	1	
DIDACTICA DE LA MATEMATICA	Cat. Esc. Univ.	--	--	--	--	--	1	1	
	Prof. T. E. Univ..	--	--	1	--	1	2	4	
ESTADISTICA E INVESTIGACION OPERATIVA	Cat. Univ.	--	1	--	1	1	--	3	
	Prof. Tit. Univ.	--	--	2	3	--	1	6	
	Cat. Esc. Univ.	--	--	--	--	--	1	1	
	Prof. T. E. Univ.	--	--	--	--	--	1	1	
GEOMETRIA Y TOPOLOGIA	Cat. Univ.	1	--	--	--	--	--	1	
	Prof. Tit. Univ.	--	--	2	1	--	1	4	
MATEMATICA APLICADA	Cat. Univ.	1	1	--	1	--	--	3	
	Prof. Tit. Univ.	--	--	3	3	1	2	9	
	Cat. Esc. Univ.	4	--	--	--	--	--	4	
	Prof. T. E. Univ.	--	--	2	5	1	2	10	

APENDICE B2

Estudio demográfico Profesorado Universitario de Matemáticas por Universidades y areas.

Universidad de VALENCIA

Area de conocimiento	Función	– 1940	1941-45	1946-50	1951-55	1956-60	1961-65	Total	
ALGEBRA	Cat. Univ.	--	--	1	--	--	1	2	
	Prof. Tit. Univ.	--	--	2	1	2	1	6	
	Cat. Esc. Univ.	--	--	--	--	1	--	1	
	Prof. T. E. Univ.	--	--	--	1	--	1	2	
ANALISIS MATEMATICO	Cat. Univ.	1	--	2	--	--	--	3	
	Prof. Tit. Univ.	--	--	2	3	2	3	10	
	Cat. Esc. Univ.	--	--	--	--	--	--	--	
	Prof. T. E. Univ.	--	--	1	--	--	--	1	
ASTRONOMIA	Cat. Univ.	--	--	--	--	--	--	--	
	Prof. Tit. Univ.	--	1	1	--	--	2	4	
DIDACTICA DE LA MATEMATICA	Cat. Esc. Univ.	3	--	--	1	--	--	4	
	Prof. T. E. Univ..	--	1	3	6	--	--	10	
ESTADISTICA E INVESTIGACION OPERATIVA	Cat. Univ.	--	--	1	--	--	--	1	
	Prof. Tit. Univ.	--	--	3	4	6	1	14	
	Cat. Esc. Univ.	--	--	--	--	--	--	--	
	Prof. T. E. Univ.	--	--	--	--	--	--	--	
GEOMETRIA Y TOPOLOGIA	Cat. Univ.	1	--	--	--	1	--	2	
	Prof. Tit. Univ.	--	--	--	4	2	--	6	
MATEMATICA APLICADA	Cat. Univ.	--	--	--	--	--	--	--	
	Prof. Tit. Univ.	--	--	2	--	2	1	5	
	Cat. Esc. Univ.	--	--	--	--	--	--	--	
	Prof. T. E. Univ.	--	--	--	--	--	--	--	

APENDICE B2

Estudio demográfico Profesorado Universitario de Matemáticas por Universidades y areas.

Universidad de VALLADOLID

Area de conocimiento	Función	– 1940	1941-45	1946-50	1951-55	1956-60	1961-65	Total	
ALGEBRA	Cat. Univ.	--	1	1	1	--	--	3	
	Prof. Tit. Univ.	--	--	1	--	2	--	3	
	Cat. Esc. Univ.	--	--	--	--	--	--	--	
	Prof. T. E. Univ.	--	1	--	--	--	--	1	
ANALISIS MATEMATICO	Cat. Univ.	2	1	--	--	--	--	3	
	Prof. Tit. Univ.	1	--	1	1	1	--	4	
	Cat. Esc. Univ.	1	--	--	--	--	--	1	
	Prof. T. E. Univ.	--	--	--	--	--	--	--	
ASTRONOMIA	Cat. Univ.	1	--	--	--	--	--	1	
	Prof. Tit. Univ.	--	--	--	--	--	--	--	
ESTADISTICA E INVESTIGACION OPERATIVA	Cat. Univ.	--	--	--	--	1	--	1	
	Prof. Tit. Univ.	--	--	3	3	--	--	6	
	Cat. Esc. Univ.	--	--	--	--	--	--	--	
	Prof. T. E. Univ.	--	--	--	1	--	--	1	
GEOMETRIA Y TOPOLOGIA	Cat. Univ.	--	1	--	--	--	--	1	
	Prof. Tit. Univ.	--	--	--	1	2	--	3	
MATEMATICA APLICADA	Cat. Univ.	--	--	--	2	--	--	2	
	Prof. Tit. Univ.	2	--	3	--	5	--	10	
	Cat. Esc. Univ.	--	1	--	--	--	--	1	
	Prof. T. E. Univ.	1	--	5	5	3	2	16	

APENDICE B2

Estudio demográfico Profesorado Universitario de Matemáticas por Universidades y areas.

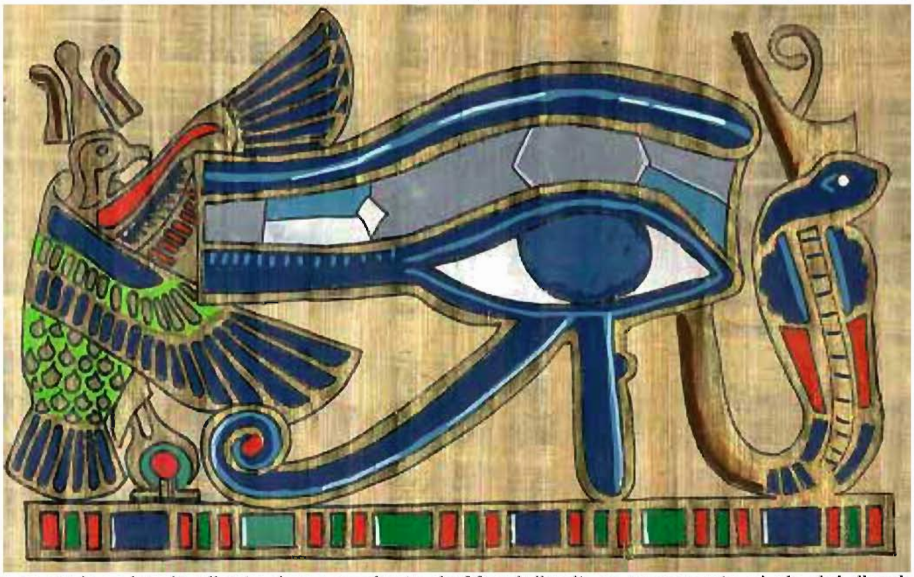
Universidad de ZARAGOZA

Area de conocimiento	Función	– 1940	1941-45	1946-50	1951-55	1956-60	1961-65	Total
ALGEBRA	Cat. Univ.	--	1	1	1	--	--	3
	Prof. Tit. Univ.	--	--	1	4	--	--	5
	Cat. Esc. Univ.	--	--	--	--	--	--	--
	Prof. T. E. Univ.	--	1	2	--	--	--	3
ANALISIS MATEMATICO	Cat. Univ.	2	1	--	--	--	--	3
	Prof. Tit. Univ.	--	1	3	2	1	--	7
	Cat. Esc. Univ.	--	1	--	--	--	--	1
	Prof. T. E. Univ.	--	--	--	1	--	--	1
ASTRONOMIA	Cat. Univ.	--	--	--	--	--	--	--
	Prof. Tit. Univ.	--	1	1	--	2	--	4
DIDACTICA DE LA MATEMATICA	Cat. Esc. Univ.	--	--	--	--	--	--	--
	Prof. T. E. Univ..	1	2	4	--	2	--	9
ESTADISTICA E INVESTIGACION OPERATIVA	Cat. Univ.	1	--	--	1	--	--	2
	Prof. Tit. Univ.	--	--	1	1	3	--	5
	Cat. Esc. Univ.	--	--	--	--	--	--	--
	Prof. T. E. Univ.							
GEOMETRIA Y TOPOLOGIA	Cat. Univ.	1	--	--	--	--	--	1
	Prof. Tit. Univ.	--	--	3	3	--	2	8
MATEMATICA APLICADA	Cat. Univ.	--	4	--	--	1	--	5
	Prof. Tit. Univ.	--	--	3	5	6	--	14
	Cat. Esc. Univ.	3	--	--	--	--	--	3
	Prof. T. E. Univ.	1	3	1	3	--	4	12

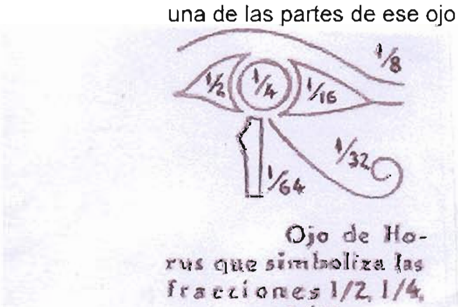
Reconocimientos:

Al Departamento de Matemáticas de la Universidad de Zaragoza y particularmente a José Antonio Martinez Herranz por su paciente y eficaz composición del texto mediante ordenador. Al Secretariado de Publicaciones de la Universidad de Zaragoza por su esmerado trabajo de publicación. Y a todos cuantos han facilitado la redacción de esta memoria, particularmente a mi mujer por sus acertadas observaciónes.

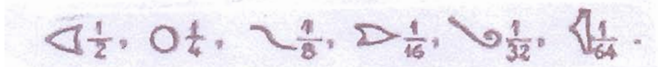
Observación: El ojo del dios Horus de la portada, se tomó de un papiro cuya fotocopia es



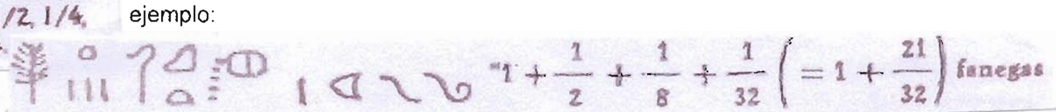
Nota: En la portada sobre la silueta de un conjunto de Mandelbrojt, se representa el ojo del dios halcón, Horus, de la mitologia egipcia con cuyas partes expresaban las distintas fracciones de numerador la unidad. En las medidas de capacidad, para los cereales y en las medidas agrarias, los egipcios han conservado un procedimiento antiquísimo para escribir las fracciones obtenidas, dividiendo por 2 la fracción inicial ½ . La figura más abajo ilustra ese procedimiento gráfico. Los símbolos de las fracciones se derivan de un mito arcaico según el cual el ojo del dios halcón, Horus, le fue arrancado y despedazado por el dios Seth. Véase tal representación y el ejemplo siguiente en el tomo primero de la "Historia General de las Ciencias" dirigida por R. Taton, edición de 1988 por la Editorial Orbis, Barcelona. En él se indica que el ojo de Horus, llamado *Udyat* -literalmente el (ojo) sano-, combina el ojo humano -iris, pupila y ceja- con los trazos cromáticos que rodean el ojo del halcón. Tomadas por separado, cada una de las partes de ese ojo mágico designan:



Ojo de Horus que simboliza las fracciones 1/2, 1/4, ... 1/64



Y como el total de esas fracciones suma 63/64, indica suponen que el 1/64 que falta (para establecer la unidad) fue procurado mágicamente por Thot, el dios Ibis, cuando consiguió encontrar y reunir el ojo despedazado para devolvérselo a su propietario. Este modo de escribir las fracciones se limita a los cereales y se cita el siguiente ejemplo:



Considera otros dos sistemas gráficos, pero lo importante es recordar que en los tres sistemas los egipcios sólo consideraban fracciones de numerador la unidad, es decir, "partes alícuotas" de la unidad.

= = = = = = =