UNIVERSITAT AUTÒNOMA DE BARCELONA

INAUGURACIÓ DEL CURS ACADÈMIC 1987/1988

EUCLIDES
AB OMNI NÆVO VINDICATUS:
SIVE
CONATUS GEOMETRICUS
QUO STABILIUNTUR
Prima ipſa univerſæ Geometriæ Principia.
AUCTORE
HIERONYMO SACCHERIO
SOCIETATIS JESU
In Ticinenſi Univerſitate Matheſeos Profeſſore.
OPUSCULUM
EX.^{MO} SENATUI
MEDIOLANENSI
Ab Auctore Dicatum.

MEDIOLANI, MDCCXXXIII.
Ex Typographia Pauli Antonii Montani. *Superiorum permiſſu.*

UNIVERSITAT AUTÒNOMA
DE BARCELONA

INAUGURACIÓ
DEL
CURS ACADÈMIC
1987-1988

Lliçó inaugural del curs acadèmic 1987-1988, que versarà sobre: **Evolució dels fonaments de la matemàtica i relacions amb la física**
a càrrec del Dr. Albert Dou i Masdexexàs

Memòria del curs acadèmic 1987-1988, a càrrec del Dr. Joan Botella Corral, Secretari General

BELLATERRA, OCTUBRE 1987

LLIÇÓ INAUGURAL

EVOLUCIÓ DELS FONAMENTS DE LA MATEMÀTICA I RELACIONS AMB LA FÍSICA

A CÀRREC DEL

DR. ALBERT DOU I MASDEXEXÀS

EVOLUCIÓ DELS FONAMENTS DE LA MATEMÀTICA I RELACIONS AMB LA FÍSICA*

Excm. i Magfc. Sr. Rector, professors, alumnes, senyores i senyors.

El tema d'aquesta lliçó ha resultat de conjuminar dos factors: d'una part, que hi tingui certa competència, de manera que hi pugui dir quelcom que no sigui banal i sigui original, i d'altra banda, que el puguin trobar interessant un bon nombre d'universitaris. En concret, tractaré dels fonaments de la matemàtica i ho faré, naturalment, des d'una perspectiva de matemàtic. Dintre d'aquesta, apel·laré a la història de las matemàtiques i de la filosofia de la ciència. També tindré particularment presents les relacions de la matemàtica amb la física, com a ciència paradigmàtica de les ciències de la natura.

Dividiré l'exposició en tres parts. La primera versarà sobre el naixement de la matemàtica moderna i de la filosofia de la ciència durant els segles VI-IV aC a Grècia. La segona part, més breu, tractarà de la creació de les geometries no euclidianes, com una de les causes més influents en l'evolució dels fonaments de la matemàtica. La tercera i última part estarà dedicada a algunes consideracions sobre la situació actual.

* En virtut de causes poc previsibles sóc el primer professor emèrit d'aquesta Universitat. Aquesta és la raó per la qual el Sr. Rector i el seu equip m'han fet l'honrós encàrrec de pronunciar aquesta lliçó inaugural.

1. Els *Elements* d'Euclides

S'accepta en general que el naixement de les matemàtiques modernes té lloc a Grècia, i més concretament a Jònia, amb Tales de Milet (625-545), i al sud d'Itàlia amb Pitàgores (segle VI aC). Per altra part, no hi ha dubte que el text *Elements* d'Euclides (aprox. 300 aC), l'obra científica més important que jamai s'hagi escrit, és una obra magnífica de matemàtiques modernes. Aquests dos fets són els que m'han determinat a elegir aquest període de tres segles per veure com es planteja la concepció de les matemàtiques, i en particular com es relacionen amb la física.

No és que abans dels grecs no hi hagués hagut matemàtiques profundes i bones. Nasqueren probablement a Egipte i a Babilònia, de les necessitats d'un calendari i de l'agricultura; però gairebé segur que hi hagué també matemàtics abans dels grecs, que les cultivaren i trobaren resultats, motivats exclusivament per la curiositat. Pensem, per exemple, que els babilonis coneixien un sistema de numeració posicional i de base seixanta, unes fórmules aritmètiques ben sofisticades en el càlcul d'àrees i volums i, sobretot, una tècnica de resolució de l'equació de segon grau amb una possibilitat tan gran com es desitgés d'aproximar les solucions.

Però l'originalitat dels problemes geomètrics que es planteja Tales, de les especulacions numèriques dels pitagòrics, i sobretot la profunditat de l'anàlisi filosòfica i epistemològica que en sorgeix, potser com a conseqüència de la crisi provocada per la descoberta dels incommensurables, fins a reeixir a construir un sistema axiomàtic genètic de geometria que ha perdurat més de dos mil anys, justifiquen àmplament l'elecció del segle VI aC com el de la naixença de les matemàtiques actuals.

Els *Elements* d'Euclides són una acurada exposició de tota la tasca realitzada i acumulada durant els segles VI-IV aC.

Conseqüentment, en aquesta primera part tractaré primer del naixement de les matemàtiques modernes fins a Euclides, exclusivament. Després faré un estudi dels *Elements,* fixantme en particular en la seva epistemologia. Finalment, del que hagi dit anteriorment en trauré unes conseqüències sobre la naturalesa de les matemàtiques d'aquest període i sobre les seves relacions amb la física.

1.1. Els «teoremes» matemàtics més antics que coneixem són deguts a Tales i, exceptuant petites variants, són els següents:

a) Tot diàmetre d'un cercle el divideix en dues parts iguals.
b) Els angles oposats pel vèrtex són iguals.
c) Tot angle inscrit en un cercle i que subtendeix un diàmetre d'aquest és recte.
d) Els angles a la base d'un triangle isòsceles són iguals[1].

No sabem com els va demostrar, excepte l'últim, la demostració del qual és molt probable que sigui la suggerida per Aristòtil[2]. És una demostració curta que es fonamenta en un axioma comú i en l'evidència de dues premisses.

Entre les múltiples preguntes que suggereixen aquests teoremes, n'hi ha dues d'especialment importants i, per altra banda, força òbvies.

La primera és: ¿com fou que Tales i Pitàgores arribaren a plantejar-se tal tipus de qüestions, segons sembla absolutament per primera vegada en la història?

La segona és: ¿què entenem per demostració?

M. Martínez Pérez intenta contestar ambdues preguntes. Pel que toca a la primera assenyala una crisi de creences i la subsegüent motivació per a una recerca de veritats «demostrades». Quant a què entenien per «demostració», assenyala, seguint el filòleg A. Szabo, que el seu «significat arcaic era el de "mostrar", "fer veure", no d'una manera intel·lectual i abstracta, sinó amb els ulls, "fer concretament visualizable"»[3].

Òbviament, el concepte de demostració irà evolucionant des de Tales fins a Euclides, però sembla que des del primer moment hi trobem el constituent més característic, que és el d'una sèrie concatenada de raonaments, de manera que cada nova proposició que s'afegeixi a la sèrie sigui evidentment certa. També el contingut de l'aritmètica i de la geometria irà augmentant, i atenyerà resultats molt interessants, com els relatius a nombres primers, a la quadratura de les lúnules d'Hipòcrates i al teorema de Pitàgores, per exemple. Al voltant del 430 aC, Hipòcrates de Quios escrigué el primer text d'*Elements* de Geometria, que desgraciadament no ha arribat fins a nosaltres.

Una sacsejada important en aquesta evolució fou la produïda probablement pel pitagòric Hípasos de Metapont (finals del segle V aC) amb el descobriment de segments incommensurables, com de la diagonal del pentàgon regular respecte del seu costat, o de la diagonal del quadrat respecte del seu; és a dir, la impossibilitat que diagonal i costat respectiu puguin tenir una mesura comuna ni que sigui molt petita. Aquest resultat, extraordinari de debò i que creava serioses dificultats als pitagòrics, hagué de contribuir poderosament a una desconfiança de la intuïció geomètrica i a un refinament del mètode matemàtic.

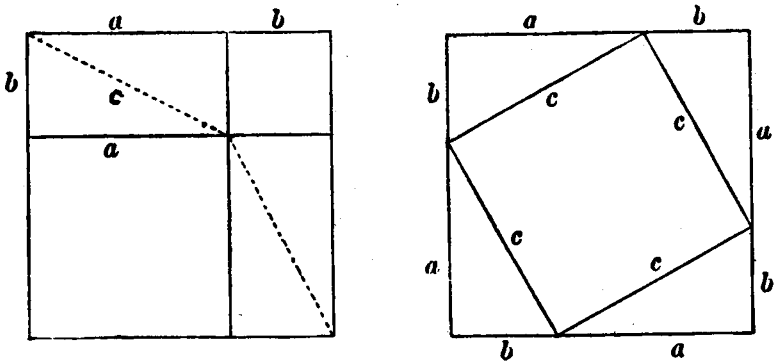
Abans d'entrar en l'estudi dels *Elements* d'Euclides, mencionem que després d'Hipócrates hi hagué encara dos matemàtics més, Leont (segle IV aC) i Teudi de Magnèsia (membre de l'Acadèmia de Plató), que escrigueren sengles *Elements* de geometria. Desgraciadament, aquests textos tampoc s'han conservat. L'últim mencionat, el de Teudi, fou probablement com un llibre de text dintre de l'Acadèmia, i sembla que va servir a Euclides com a punt de partida dels seus famosos *Elements*.

1.2. Exposaré primer, i necessàriament amb molta brevetat, el contingut dels *Elements;* i després, més detingudament, analitzaré la seva epistemologia.

1.21. Els *Elements* són una obra que consta de 13 llibres que es poden agrupar, pel que toca a la seva temàtica, en tres grups:

El primer el formen els Llibres I, III, IV, XI, XII i XIII, i tracten de geometria. Els tres primers i part del XII són de geometria plana, i la resta de geometria de l'espai.

El segon grup conté l'Aritmètica, i està format pels llibres VII, VIII i IX.



TEOREMA DE PITÀGORES

Finalment, els quatre llibres restants —II, V, VI i X— són d'allò que avui en diríem àlgebra.

Cada un d'aquests grups té el seu conjunt propi de definicions i un contingut substancialment lineal i progressiu de proposicions amb sengles demostracions, de forma que cada grup resulta dotat d'una gran unitat.

Des del punt de vista històric, els quatre primers, I-IV, són deguts principalment als pitagòrics, i sembla que hi ha una important contribució d'Hipòcrates en els llibres III i IV, dedicats al cercle. Els V i VI són deguts a Èudox (segle IV aC). Els d'aritmètica, VII-IX, són també dels pitagòrics. Els X i XIII són de Tectet (mort el 368). L'XI és obra de l'Escola jònica i el XII té diversos precursors, però el mètode d'exhaustió és d'Èudox.

Els *Elements* contenen un total de 131 definicions ben distribuïdes, generalment al començament de cada llibre o de cada grup, cinc postulats i cinc axiomes, i un total de 465 proposicions rigorosament demostrades.

Naturalment, no entraré en detalls sobre el contingut d'aquestes 465 proposicions, que avui en diríem teoremes[4]. Com a aconseguiments més impressionants es poden citar: la consecució per Èudox d'una estructura de magnituds que resol la crisis plantejada pel descobriment de segments incommensurables; la resolució exacta de l'equació de segon grau; el mètode d'exhaustió i la construcció dels políedres regulars. Crida l'atenció el fet que, endemés de la regla per traçar rectes que passin per dos punts donats i per prolongar rectes donades, s'admeti també emprar el compàs, però en canvi s'exclogui emprar la regla per resoldre el problema de trobar la inclinació (νεῦσις) que ha de tenir una recta perquè passi per un punt donat i perquè el segment de la recta interceptat per dues línies corbes donades (per exemple, una recta i una circumferència) tingui una longitud donada. L'operació era la de fixar un punt de la regla en el punt donat i després fer-la girar fins a trobar la inclinació que oferís la solució del problema[5]. Aquest maneig de la regla sembla que és emprat per Hipòcrates[6], però és exclòs en els *Elements.* A part de raons de simplicitat i de simetria, i que recta i cercle representessin trajectòries naturals, podria ser que una raó més profunda per excloure la construcció d'inclinacions fos que el cercle permetia de resoldre *exactament* l'equació de segon grau, objectiu extraordinari en la línia de la recerca babilònica i que aconseguia una bella i rodona compleció d'un problema històric; en canvi, l'admissió de la νεῦσις no donava lloc a unes conclusions parangonables.

1.22. L'epistemologia dels *Elements* ve donada pel tipus de demostració que es fa de cada proposició i per la naturalesa de les definicions, postulats i axiomes que s'hi empren.

1.221. El tipus de demostració és perfecte. Cada proposició comença amb un enunciat, en el qual s'expliciten suficientment les dades, i s'estableix un resultat que s'ha de demostrar. A continuació de l'enunciat, i apel·lant a un dibuix o diagrama, que és una interpretació o exemplificació geomètrica dels conceptes, funcions i relacions de l'enunciat, es repeteix el contingut d'aquest. A continuació es fa la demostració, apel·lant al diagrama en el qual també s'han dibuixat o construït les línies auxiliars que representen els conceptes, funcions i relacions pertinents a la demostració. La demostració és un raonament estrictament formal, per la qual cosa dedueix la conclusió a partir de les dades. Repetida la conclusió de forma que coincideixi amb el resultat establert en l'enunciat, es conclou generalment amb les paraules «tal com volíem demostrar». És important observar que en la deducció de la conclusió a partir de les dades, només es poden emprar les definicions, els postulats, les nocions comunes i els resultats de les proposicions ja demostrades, però no es pot apel·lar a altres propietats que potser es verifiquin en el diagrama. Aquesta apel·lació incorrecta a un diagrama pot ésser molt subtil i constitueix, per tant, un veritable perill; aquest queda generalment compensat per la gran ajuda que el diagrama presta a l'argumentació.

És obvi que amb demostracions així, si les premisses emprades són veres, la proposició o conclusió ha de ser també vera. Aquestes demostracions, tant dintre de cada proposició com en el seu conjunt, satisfan evidentment, i d'una manera admirable, aquella característica fonamental, i la més original d'una cadena rigorosa de raonaments, que vàrem indicar ja en el naixement de les matemàtiques amb Tales i Pitàgores, i que són la condició més important de l'estructura de la ciència.

1.222. Ja hem dit que hi ha 131 definicions al llarg de tots els *Elements*. Heus-ne aquí algunes de les més importants i significatives. Els *Elements* s'inicien amb el primer Llibre, el qual comença amb 23 definicions, de les quals les quatre primeres són:

«Definicions:

1. Un punt és allò que no té parts.
2. Una línia és una longitud sense amplada.
3. Els extrems d'una línia són punts.
4. Una recta és una línia que jau per igual respecte de tots els seus punts.»

La definició 15 és:

«Un cercle és una figura plana limitada per una línia tal que totes les línies rectes que cauen sobre aquesta des d'un cert punt interior a la figura són iguals entre si.»

Les dues últimes són:

«*22.* De les figures quadrilàteres, un quadrat és aquella que és a l'ensems equilateral i d'angles rectes. Un rectangle és aquella que té els angles rectes, però no és equilateral. Un rombe és aquella que és equilateral, però no té els angles rectes. Un rectangle és aquella que té els costats i els angles oposats iguals entre si, però no és ni equilateral ni d'angles rectes. I dels altres quadrilàters en direm quadrilàters genèrics.
23. Rectes paral·leles són aquelles que, estant en un

mateix pla, per més que es prolonguin en ambdós sentits no es troben mai.»

Al començament del Llibre V, les definicions tercera i quarta són:

«*3.* Una raó és una relació de mida entre dues magnituds d'una mateixa classe.

4. Es diu que dues magnituds formen raó, quan cada una admet un múltiple que és major que l'altre.»

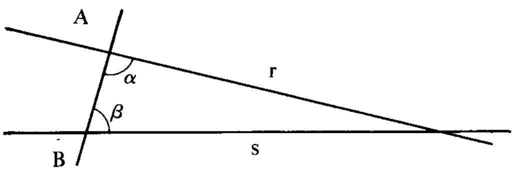
En el primer Llibre, després de les 23 definicions hi ha immediatament els únics cinc postulats i els únics cinc axiomes o nocions comunes de tots els *Elements.* Són els següents:

«Postulats

1. Es pot traçar una recta des de qualsevol punt a qualsevol punt.

2. Una línia recta delimitada es pot prolongar contínuament restant recta.

Cinquè postulat d'Euclides
geometria euclidiana.



Si $\alpha + \beta < 2$ rectes,
llavors r i s es tallen

3. Es pot traçar un cercle amb qualsevol centre i radi.

4. Tots els angles rectes són iguals entre si.

5. Si una secant talla dues rectes formant en un costat angles interiors menors que dos rectes, les dues rectes prolongades indefinidament es tallaran en aquest mateix costat.

»Nocions comunes.

1. Coses iguals a una tercera son també iguals entre si.

2. Si a coses iguals s'afegeixen coses iguals, els totals són iguals.

3. Si de coses iguals se sostreuen coses iguals, les restes són iguals.

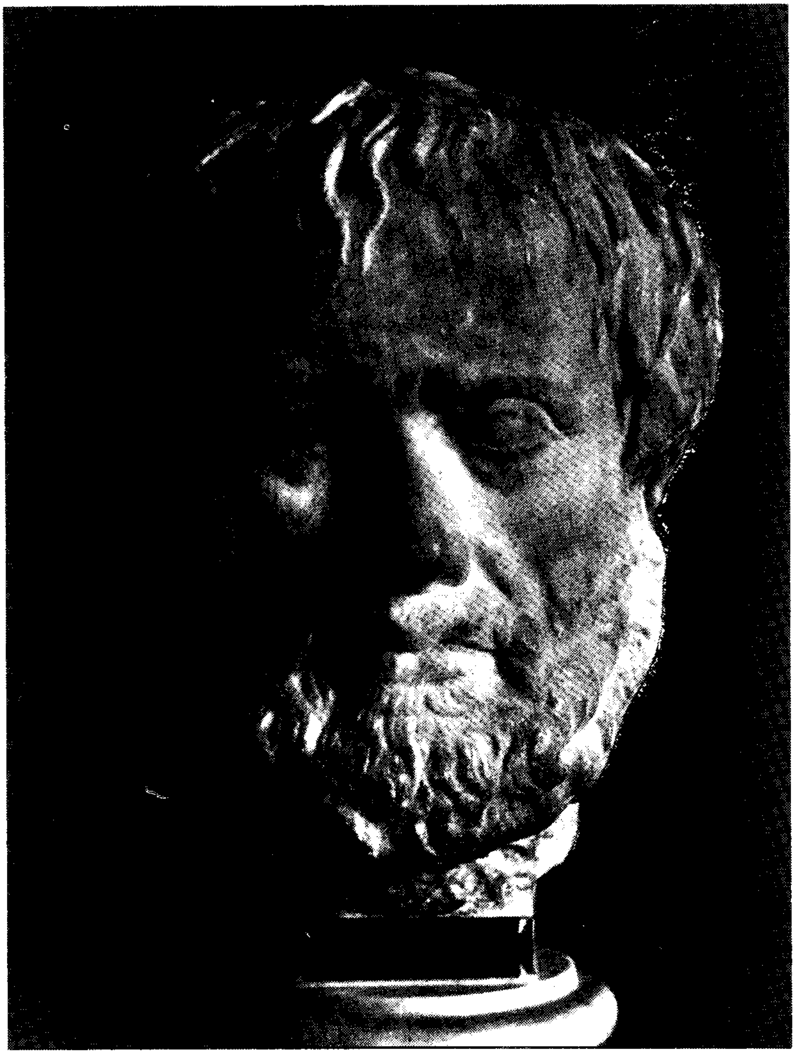
4. Les coses que són congruents entre si, són iguals.

5. El tot és major que la part.»

1.223. Per raó de les dificultats que presenten, examinarem primer les nocions comunes, després els postulats i finalment les definicions. També ens ajudarà a comprendre tota aquesta temàtica tenir present la teoria de la ciència elaborada per Aristòtil, principalment els *Analítics Posteriors.* Sembla segur que Euclides, que és de la generació següent a la d'Aristòtil, tingué present la teoria de la ciència de l'estagirita. I tant Euclides com Aristòtil és clar que coneixen els *Elements* perduts escrits per Teudi de Magnèsia. A aquests efectes, em sembla que val la pena, malgrat que sigui una mica llarg, de reproduir el text més significatiu d'Aristòtil, on es diu:

«§ *3.* Entre els principis de què ens servim en les ciències demostratives, uns són especials i altres són comuns.» «Per exemple, són principis especials les definicions de línia i de línia recta; mentre que el principi "si de coses iguals se sostreuen coses iguals les restes són iguals", és un principi comú.»

«§ *4.* També s'anomenen principis propis, l'existència dels quals s'admet sense demostració, aquelles coses en què la ciència troba les propietats essencials que estudia. Així, l'aritmètica admet sense demostració les unitats, i la geometria els punts i les línies; perquè ambdues admeten sense demostració l'existència i la definició d'aquestes. Demés, respecte de les modificacions essencials d'aquestes coses, s'admeten també sense demostració els noms de cada una d'elles. Per exemple, l'aritmètica admet també el sentit de les paraules



ARISTÒTIL

parell o senar, quadrat, cub, etc.; i la geometria els dels termes incommensurable, línia trencada, obliqua, etcètera. Però quant a l'existència d'aquestes propietats, s'ha de demostrar per mitjà de principis comuns i de proposicions ja demostrades. El mateix mètode se segueix en Astronomia.

»§ *5.* En efecte, tota ciència adquirida mitjançant demostració es refereix a tres coses: primer, a tot allò de què s'admet l'existència sense demostració; és a dir, el gènere, les modificacions essencials del qual estudia la ciència; segon, a aquells principis comuns que anomenem axiomes, d'on surten primitivament les demostracions; i per últim i en tercer lloc, a les modificacions d'aquest mateix gènere, el nom de cada una de les quals cal admetre també sense demostració.

»§ *6.* Però, pot molt ben succeir que certes ciències prescindeixin d'algunes d'aquestes tres coses». És a saber, quan resulten evidents. «Tanmateix, sempre es pot dir que naturalment es donen aquestes tres coses: allò de què es demostra quelcom, ço que es demostra, i allò per què es demostra[7].»

En aquest text es distingeixen termes primitius d'una ciència (en la primera de les tres coses); termes derivats, propietats i predicats (en la tercera); i els axiomes, o sigui, els principis especials (o axiomes propis) i els principis comuns (o axiomes lògics). Aristòtil inclou entre els principis tant els conceptes del subjecte (matèria o objecte) de la ciència, com els axiomes. Observi's que, dels conceptes primitius d'una ciència, s'han d'admetre sense demostració tant el seu significat com la seva existència; mentre que de les propietats, només s'ha d'admetre sense demostració el seu significat, però cal demostrar la seva existència.

Observi's també que, per a Aristòtil, aquestes consideracions valen no sols per a l'aritmètica i geometria, sinó també igualment per a l'astronomia, i sembla que per a totes les ciències.

a) Tornem ara a la consideració dels axiomes, postulats i definicions dels *Elements.* És clar que les «nocions comunes» equivalen als principis comuns en el sentit d'Aristòtil, qui suposa que els coneixem amb certesa a través d'una inducció intuïtiva. Des del punt de vista de la Lògica matemàtica actual, diríem que les nocions comunes dels *Elements* corresponen als axiomes lògics d'una teoria de primer ordre (amb igualtat).

b) Sembla també clar que tots cinc postulats són principis especials en el sentit d'Aristòtil. Tots tenen un sentit clar[8], i els tres primers afirmen explícitament l'existència de certes entitats; el quart potser equivalgui a negar l'existència de punts singulars; i el cinquè afirma també, sota una condició, l'existència d'un punt. Pot semblar que aquesta correspondència dels postulats amb principis especials aristotèlics resulta forçada, ja que els postulats no semblen definicions i el text aristotèlic sembla que afirma que els principis especials són definicions i afirmacions d'existència del gènere de què tracti la ciència. Sembla, efectivament, que aquí hi ha alguna confusió, que potser quedi una mica aclarida quan, a continuació, parlarem de les definicions. Amb la terminologia de la Lògica matemàtica actual, diríem que aquests postulats d'Euclides corresponen als axiomes propis o no lògics d'una teoria de primer ordre.

c) Considerem finalment les definicions dels *Elements.* Sembla clar que el concepte que Euclides empra de definició coincideix amb el mateix que té Aristòtil; així ho afirma explícitament H.D.P. Lee[9] i també W.D. Ross[10]. Però quan volem analitzar el contingut de les definicions quedem una mica perplexos. Sembla que amb l'únic nom de definició es parla de tres conceptes força diferents.

Considerem primer les definicions V.3 i V.4 que hem transcrit més amunt. La V.3 no aporta res més que un nou terme, el de raó, que en principi se'n podria prescindir, puix és com un nou símbol del «definiens», és un terme derivat del terme primitiu fonamental que és «magnitud». La causa per la qual es dóna aquesta definició és que la paraula «raó» ja figura en el llenguatge ordinari i així contribueix a simplificar i aclarir l'argumentació. De fet, aquesta definició no és mai invocada explícitament en cap de les demostracions dels *Elements.* Molt diferent és el cas de la definició V.4. Aquí tenim un veritable principi en el sentit aristotèlic. La definició dóna efectivament una «propietat essencial» del concepte de magnitud, un terme primitiu, fonamental, que pertany al «gènere» de què s'ocupa la geometria. És també obvi, en contrast amb la definició V.3, el caràcter operatiu d'aquesta definició. De fet és emprada en la demostració de la moderna i elegant proposició X,1; la qual és indispensable per a la demostració de XII,2, on per primera vegada s'aplica el profund mètode d'exhaució.

Considerem ara la definició I,15 del concepte de cercle. Com en el cas de la definició V.4 es dóna una propietat essencial del cercle i conseqüentment aquesta definició és un principi en el sentit aristotèlic. De fet s'aplica a dojo. Segons Aristòtil l'existència d'aquests principis s'ha d'admetre també sense demostració; i em sembla que Euclides entén també òbviament que l'existència d'aquests principis s'ha de postular i que són «indemostrables». En efecte, Euclides, en el postulat 3, postula l'existència o construcció de cercles. Però enlloc hi ha un postulat d'existència correlatiu del postulat V,4. Sembla efectivament un lapsus d'Euclides la manca de tal postulat. Seria més clar si, per exemple, després de les definicions del llibre V, hagués postulat explícitament que les longituds dels segments de recta, les àrees de certes figures planes i el volum de certes figures sòlides són magnituds que formen raó. Per altra part, tal postulat sembla veritablement evident quan es tracta, com és el cas dels *Elements,* de figures molt elementals. Es podria argüir que Euclides, precisament perquè és evident, el va ometre d'acord amb el que diu Aristòtil en la § 6 del text transcrit.

Des del punt de vista de les teories formals de l'actual lògica matemàtica, semblaria que no hi hagués diferència entre un postulat explícit com el tercer o el cinquè, per exemple, i el postulat implícitament definit per la definició V.4 (el postulat implicitament definit és el «postulat d'Arquímedes»). Però aquesta diferència es fa patent si considerem el postulat tercer d'Euclides juntament amb la definició I.15. La definició I.15 expressa una propietat essencial del cercle, però només nominalment; mentre que el postulat 3 afirma l'existència dels cercles. En una teoria formal de primer ordre que formalitzés la geometria del cercle, hi hauria un sol axioma propi que a l'ensems tindria el caràcter essencial de l'I,15 i l'existencial del postulat 3. Sembla, en efecte, que els cinc postulats d'Euclides s'han d'entendre com a posseint un caràcter existencial, del qual es veuen mancades les definicions. Notem també que els postulats 1, 2 i 5 d'Euclides tenen clarament un contingut simultàniament essencial i existencial.

La definició de quadrat continguda en la definició I.22 és del mateix tipus que la definició V.3. Evidentment és una definició convenient, tant per al llenguatge ordinari com per al científic, ja que permet poder emprar el terme derivat «quadrat». Ara bé, Aristòtil ens diu que hem d'entendre el que signifiquen aquestes definicions, però que la seva existència s'ha de demostrar. És obvi que Euclides considera la seva definició de quadrat de I,22 com a nominal i té bon compte de demostrar rigorosament la seva existència en la proposició I.46. També la definició I.23 de paral·leles és nominal i d'un terme derivat; i Euclides demostra l'existència de paral·lela per un punt a una recta que no passi pel punt. (El postulat 5 equival a postular que aquesta paral·lela sigui única).

Les tres primeres definicions I,1-I,3 dels *Elements,* per a molts matemàtics actuals resulten difícils d'acceptar perquè són vagues o fins i tot ambigües. Em sembla que tenen només un caràcter descriptiu i han de ser necessàriament vagues. Serveixen per determinar el gènere, del qual els *Elements* són una ciència, i que consta de punts, rectes, plans i cercles. En les teories formals actuals de primer ordre, el gènere, concret, en el sentit aristotèlic, ha desaparegut; però la unitat dels objectes, les seves funcions i relacions, queden determinades en els símbols no lògics del llenguatge formal propi de la teoria formal i en la seva estructura[11].

M. Pasch (1843-1930)[12] i D. Hilbert (1862-1943) han fet palès com es pot prescindir de les definicions primitives merament descriptives, substituint-les per definicions implícites mitjançant axiomes propis. Però llavors, la geometria es converteix en una pura teoria o ciència exclusivament formal, i no és possible saber de què tracta. Les definicions primitives descriptives són representacions o il·lustracions, quelcom així com els diagrames geomètrics que dibuixem[13], i que ens permeten connectar els llenguatges ordinari i científic. És obvi que en els *Elements* els termes tenen una referència immediata o mediata en el món de la realitat física.

1.3. La demarcació entre la matemàtica i la física és clara segons Aristòtil, si més no en primera aproximació. Aristòtil divideix les ciències en teòriques, pràctiques i productives, segons que el seu fi últim sigui el coneixement, la conducta o la producció d'objectes artificials, útils o artístics. Les ciències teòriques es divideixen en matemàtiques, física i filosofia primera o teologia. Les obres de l'*Organon,* o de lògica, no són pròpiament ciència, sinó instrument de totes les ciències.

Ara bé, «la física estudia les coses que tenen una existència separada, però que estan subjectes al canvi (o sigui, coses amb "cossos naturals", que tenen en elles un principi de moviment i de repòs); les matemàtiques estudien coses que no estan subjectes al canvi, però que no tenen existència separada (o sigui, nombres i figures espacials que només tenen una existència objectiva, en tant que qualifiquen substàncies); la teologia estudia coses que simultàniament tenen existència separada i no estan subjectes a canvi (o sigui, les substàncies que existeixen lliures de qualsevol connexió amb la matèria)»[14].

Els objectes de les matemàtiques tenen existència real. Així, els sòlids tenen existència material i són mentalment divisibles per superficies. Les superficies i línies no tenen existència material, però existeixen per la seva extensió i posició. El punt existeix només per la seva posició. De fet, no els podem concebre com a existint separats de la matèria, però son intel·ligibles i es poden estudiar considerant-los mentalment separats de la matèria. Això es fa mitjançant una abstracció que prescindeix de tot moviment i de tot allò que és mutable. En contrast, els objectes de la física aristotèlica tenen en si un principi intrínsec de moviment o de canvi, de la consideració del qual la física no en pot fer abstracció. El matemàtic fa abstracció de totes les qualitats sensibles, com calor, gravetat,... Considera únicament allò que és quantitatiu: l'aritmètica, la quantitat discreta o sense extensió; la geometria, la quantitat extensa o contínua.

«Físics, astrònoms i matemàtics, tots han de considerar línies, figures i la resta. Però els matemàtics prescindeixen del fet que siguin contorns de cossos naturals i de les propietats d'aquests cossos. Per tant, els abstreuen de les condicions físiques, puix es poden considerar mentalment separats dels cossos als quals pertanyen, i aquesta abstracció no afecta la validesa del raonament ni porta a cap falsa conclusió[15].»

Remarquem que els raonaments amb les entitats matemàtiques són completament vàlids[16]. M'atreviria a dir que les proposicions dels *Elements* no solament eren necessàries i universals, sinó també absolutament certes, o almenys així varen ser considerades per tothom durant més de dos mil anys.

Encara hi ha una altra relació entre les matemàtiques i la física aristotèliques. Em sembla que per a Aristòtil és la mateixa facultat, la raó, i la mateixa intuïció inductiva, les que ens fan conèixer els postulats o axiomes especials de les matemàtiques i les lleis de la física[17].

Des del punt de vista de les matemàtiques i la física actuals, els *Elements* tenen un caràcter doble: segueixen essent matemàtiques, sobretot perquè les matemàtiques actuals es caracteritzen per emprar una metodologia amb el mateix tipus de demostració rigorosa que crearen els grecs en els segles VI-IV aC. I són també física en el sentit actual d'aquesta disciplina. Per exemple, la geometria dels *Elements* és una geometria que avui seria geometria física, perquè per a Euclides i Aristòtil els termes de les proposicions dels Elements es refereixen amb tota exactitud als cossos naturals de la realitat del món físic, amb una referència única que és simultàniament immediata i última. És una geometria que pretén estudiar l'estructura de l'espai físic. Els objectes de la física actual, obtinguts per tematització o idealització, són molt anàlegs o els mateixos que els de les matemàtiques, però ço que caracteritza la física de sempre és que la referència última dels termes emprats ha d'ésser als cossos naturals de la realitat física.

La física matemàtica actual tingué ja un germen en el temps d'Aristòtil en les denominades ciències mixtes o intermèdies, com l'astronomia i l'òptica. Heus aquí un text interessant amb el qual acabem aquesta part:

«Les relacions entre aquelles [les ciències que són més físiques que matemàtiques, malgrat que combinen les dues disciplines, tals com l'òptica, la música i l'astronomia] i la geometria són, per dir-ho així, recíproques; puix el geòmetra considera les línies físiques però no en tant que són físiques, mentre que l'òptica considera línies matemàtiques, però en tant que són físiques i no en tant que són matemàtiques[18].»

NOTES

1. Pres de Becker, p. 24.
2. *Anal. Prim.* I, 24; 41b 13-15. També es pot veure en el text citat en la nota 1; i també en Heath, Book 1, prop. 5.
3. *Cf.* M. Martínez Pérez, p. 45.
4. Es poden consultar els llibres d'Història de les matemàtiques, per exemple de C. Boyer o de M. Kline amb les seves bibliografies. Per a una selecció Cf. A. Dou, 1986.
5. *Cf.* Heath, vol 1, pp. 150-151.
6. *Cf.* Hipòcrates de Quios, pp. 243-349.
7. *Anal. Post.* I, 10; 76a37-76b23. Per a més estudis i referències sobre aquesta qüestió, cf. W.D. Ross, 1923, pp. 41-55; H.D.P. Lee; i A. Dou, 1986.
8. Millor dit, tenien un sentit clar en temps d'Euclides. Ara, el primer s'interpreta incloent que la recta és única. El segon ara resulta ambigu: ¿implica que la longitud de la recta sigui potencialment infinita?, ¿exclou que la recta pugui retornar sobre si mateixa? El quart sembla que imposa una homogeneïtat per a tots els punts del pla, quant als angles que tinguin aquests punts per vèrtexs.
9. Lee, p. 117.
10. Ross, 1923, p. 45.
11. Vegeu per exemple, Schoenfield.
12. Vegeu Becker, pp. 200 ss.
13. Vegeu *Anal. Post.* I,10; 77a 1-4.
14. Ross, 1923, p. 62. Per a la redacció d'aquesta secció m'he valgut de l'obra de Ross, 1923, pp. 62-71; de la «Introducció» de Wicksteed a *The Physics* d'Aristòtil, IV ss. i LXXX-LXXXIX; de *Física* II.2, 193b 22-194b 15; *Anal. Post.* I.9, 76a23-25; *Metaf.* 13.3, 1078a 14-17; i alguns dels textos citats per Ross en el lloc citat.
15. *Física,* II.2, 193b31-36.
16. Vegeu *Metaf.* 13.3, 1078a14-20.
17. Vegeu *Anal. Post.* II.19,99b15-100b17. També Ross, 1923, pp. 38-41 i 54-55.
18. *Física* II., 194a7-13. Vegeu també *Metaf.* 13.3, 1078a14-20.

2. Les geometries no euclidianes

Voldria mostrar breument en aquesta segona part com i per què fan crisi els *Elements* d'Euclides. No oblidem que els *Elements* encarnaven l'ideal del que, segons Aristòtil, havia de ser una ciència, i que les seves proposicions eren tingudes com a universals, necessàries i absolutament certes. Així foren considerades unànimement per savis i científics durant vint-i-un segles. La crisi es produeix en l'estudi del cinquè postulat. La creació d'una nova geometria elemental no euclidiana, la de l'angle agut o hiperbòlica, mostra que ni la negació del cinquè postulat és logicament impossible, ni l'afirmació del mateix postulat consta que sigui un principi de la física. També mostra la fal·libilitat de la intuïció aristotèlica i assesta un cop fort a la doctrina del realisme de les entitats matemàtiques.

Seré molt breu, limitant-me a allò que sigui indispensable per mostrar ço que acabo de dir. També perquè no penso dir res de nou, i a qui vulgui una exposició més àmplia el puc remetre a diversos articles meus sobre aquest tema[19].

Després d'una introducció, faré una exposició històrica limitant-me a explicar les més importants contribucions i les significatives posicions dels tres matemàtics Saccheri, Taurinus i Gauss; acabaré aquesta part amb unes conseqüències d'allò exposat. En la introducció que segueix explicaré quin era l'estat de la qüestió; pel que es pretén em puc limitar a considerar la geometria del pla; i així ho faré, de manera que, quan parli dels *Elements,* s'ha d'entendre la geometria plana dels *Elements.*

2.1. El cinquè postulat d'Euclides, l'anomenarem $\{Q\}$. El conjunt de tots els altres axiomes i postulats (incloent-hi els que no es mencionen explícitament, perquè se suposa que són evidents) en què es basen els *Elements,* l'anomenarem $\{G\}$. Qualsevol geometria plana que satisfaci el conjunt d'axio-

EUCLIDES
AB OMNI NÆVO VINDICATUS:
SIVE
CONATUS GEOMETRICUS
QUO STABILIUNTUR
Prima ipsa universæ Geometriæ Principia.

AUCTORE

HIERONYMO SACCHERIO
SOCIETATIS JESU
In Ticinensi Universitate Matheseos Professore.

OPUSCULUM

EX.MO SENATUI
MEDIOLANENSI
Ab Auctore Dicatum.

MEDIOLANI, MDCCXXXIII.

Ex Typographia Pauli Antonii Montani. *Superiorum permissu.*

mes {G}, l'anomenarem geometria plana elemental per definició. La geometria d'Euclides en els *Elements,* o equivalentment la geometria plana euclidiana, és aquella que satisfà els axiomes {G,Q}.

Ningú dubtava que el postulat o axioma Q fos vertader, però almenys des del primer segle aC hi hagué matemàtics que intentaren demostrar Q a partir de G. Es tracta de saber, dit en termes moderns, si l'axioma Q és o no independent dels axiomes G. L'axioma Q estableix que, donada una recta *r* i un punt *A* fora de la recta, no hi pot haver més d'una paral·lela a *r* que pasi per *A;* o sigui, l'axioma Q estableix l'unicitat de la paral·lela. Es tracta de saber si aquesta unicitat de la paral·lela es pot demostrar; o sigui, si és un teorema de la geometria elemental, és a dir, la que parteix del conjunt d'axiomes {G}. Si no es pot demostrar, o sigui, si Q és independent de G, aleshores, fins i tot admetent que la geometria elemental és vertadera, es podria dubtar de la veracitat de Q, o sigui, de l'afirmació que no hi pugui haver més d'una paral·lela. Ara bé, de fet no hi ha hagut cap filòsof ni científic, durant vint-i-un segles, que hagi dubtat de la veracitat de Q.

A continuació exposaré com es va arribar a la conclusió que una geometria amb els axiomes {G,~Q}, o sigui, una geometria plana elemental en la qual per un punt *A* fora de la recta *r* es pot traçar més d'una paral·lela a *r,* és tan consistent com la geometria elemental euclidiana. Això resol la qüestió plantejada.

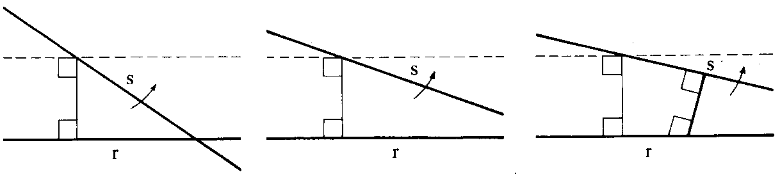
2.2. Es coneixen més d'una dotzena de pseudodemostracions del cinquè postulat, degudes a altres tants matemàtics importants.

Un dels últims fou Girolamo Saccheri (1667-1733) en el seu llibre *Euclides ab omni naevo vindicatus* (1733).

El mètode de Saccheri consisteix a construir una geometria partint dels axiomes {G,~Q}; i pretén trobar una contradicció o, més concretament, pretén demostrar Q. D'una demostració de Q se'n seguiria, mitjançant la llei de Clavius, $(-p \supset p) \supset p$, que Q és un teorema de les geometries elementals $\{G\}$. Saccheri aconsegueix desenvolupar extraordinàriament la seva geometria, demostrant rigorosament més de trenta teoremes, alguns molt xocants i profunds. Heus-en aquí un:

Dues rectes en el pla, o bé es tallen, o bé tenen una perpendicular comuna, o bé són asimptòtiques entre si; i cada un dels tres casos es dóna.

geometria hiperbòlica:



r i *s* es tallen — *r* i *s* són paral·leles asimptòtiques — *r* i *s* tenen una perpendicular comuna

En la Proposició XXXIII, Saccheri comet un complicat paralogisme i obté finalment una contradicció que li permet concloure que Q és una conseqüència lògica de G. En realitat, l'*Euclides* de Saccheri és, contra la voluntat del seu autor, el primer text de geometria no euclidiana.

És clar que Saccheri hauria subscrit les tres tesis següents:

I. «Les úniques geometries possibles són l'euclidiana $\{G,Q\}$ i l'elemental de l'angle agut $\{G,\sim Q\}$.»

II. «Les construccions geomètriques corresponen exactament a la realitat del món físic, quan aquest és considerat en la seva quantitat i es prescindeix de les qualitats sensibles» (tesi tomista).

III. «La geometria dels *Elements* d'Euclides és vertadera.» D'això, n'estava convençut abans de començar a escriure el llibre, puix era pràcticament impossible que es deslliurés de la situació filosòfica i científica contemporània.

De les tres tesis se'n dedueix que la geometria $\{G, \sim Q\}$ és físicament falsa.

El que és extraordinari en Saccheri, no és que cregués que la geometria $\{G, \sim Q\}$ era físicament falsa, sinó que també creia (abans de pseudodemostrar el teorema XXXIII) que la geometria $\{G, \sim Q\}$ era lògicament impossible. I per això estava convençut que amb el seu mètode acabaria per trobar una contradicció. Ara veiem que el seu mètode i la seva contribució havien de portar, efectivament i definitiva, a resoldre la qüestió plantejada, malgrat que la solució seria la que ell no s'havia ni imaginat.

2.3. Franz Adolph Taurinus (1794-1874) desenrotlla extraordinàriament la geometria de l'angle agut, i sense cometre cap paralogisme. Arriba, doncs, a la conclusió que la geometria $\{G, \sim Q\}$ és lògicament possible[20].

Ara bé, Taurinus subscriu també la tesi I de Saccheri. En lloc de la tesi II subscriu la tesi:

II. «Els teoremes de la geometria euclidiana són judicis sintètics *a priori*, i estableixen les condicions de possibilitat objectiva» (tesi kantiana). Aquesta tesi II* és equivalent a la II a efectes de la conclusió que en trèiem.

També subscriu la tesi III, tant per l'autoritat dels *Elements* com per la de Kant.

La conclusió és que, malgrat que la geometria $\{G, \sim Q\}$ és lògicament possible, resulta físicament falsa.

2.4. Carl Friedrich Gauss (1777-1855) és el primer que crea la geometria $\{G, \sim Q\}$, que creu que és lògicament possible i que entra en concurrència amb la geometria euclidiana sobre quina de les dues és físicament vertadera.

CARL FRIEDRICH GAUSS

Gauss coneix l'*Estètica transcendental* kantiana, i al principi no s'atreveix a contradir-la. Però ja en 1824, en una important carta a Taurinus, expressa el seu rebuig de la tesi kantiana de l'aprioritat de la geometria. En una carta ben coneguda a F.W. Bessel, de 1829, escriu: «... i la meva convicció que no podem fonamentar completament *a priori* la geometria s'ha fet, si fos possible, encara més forta. Mentrestant, tardaré encara força temps a publicar les meves molt extenses recerques sobre això, i potser no ho faci en tota la meva vida, perquè temo la cridòria dels beocis si volgués manifestar clarament el meu parer[21].»

Sembla que els beocis aquí al·ludits són els filòsofs kantians.

Gauss, segons que sembla, en aquesta època encara subscriu la tesi I: només una geometria, i aquesta elemental —o sigui, la geometria euclidiana {G,Q} o la no euclidiana {G,∼Q}—, pot ser la geometria físicament vertadera.

No pensa que ambdues puguin ésser vigents en diferents llocs o en diferents temps. Una generalització i ramificació de geometries no arribarà en matemàtiques fins a B. Riemann (1854), i en física fins a A. Einstein amb la teoria de la relativitat general.

2.5. De la creació de la geometria no euclidiana en podem treure algunes conseqüències pel que fa als fonaments de la matemàtica. La primera, i potser la més important, és que s'ha de distingir entre geometria matemàtica, que estudia entitats matemàtiques, i geometria física, que estudia l'espai del món físic.

Conseqüentment, ara podem analitzar els *Elements* d'Euclides des del punt de vista matemàtic i des del físic. Els *Elements,* considerats com a text de geometria matemàtica, són gairebé els mateixos d'abans i de sempre. Em sembla que el canvi més important és que ara, per a la veritat de les proposicions, és irrellevant el que passi en el món físic. Les úniques dues coses que fan al cas són que el conjunt de principis (axiomes, postulats i definicions equivalents a postulats) sigui consistent (és a dir, que sigui impossible que se'n puguin deduir dues proposicions contradictòries), i que les demostracions siguin correctes. Respecte de la primera, Hilbert va demostrar (1899) que la geometria euclidiana és consistent si la recta real és consistent; i quant a les demostracions, són gairebé perfectes. Els *Elements* segueixen essent un text excel·lent[22].

Des del punt de vista físic, avui els *Elements* no són un bon text de física; certament que no són un text de geometria relativista, però sí que em sembla que es poden considerar com un text de la geometria de dintre dels sistemes terrestres, i que tracta d'entitats idealitzades, que són les mateixes de què tracta la geometria euclidiana matemàtica.

Respecte del cinquè postulat d'Euclides, s'ha repetit molt, i és ben cert, que el fet que Euclides «postulés», i no ens donés una pseudodemostració, és d'un valor extraordinari. Però també sembla que el va donar com a absolutament cert, i per tant li fallà l'intuïció.

Per últim, que hi hagi infinites geometries elementals, dependents d'un paràmetre real, fa més inversemblant la doctrina d'un realisme matemàtic.

19. *Cf.* Dou 1967, 1969, 1970, 1972, 1985. Per una exposició sistemàtica i àmplia, *cf.* R. Bonola. Aquesta segona part és com un resum dels articles dels anys 1969, 1972 i del de Dou-Guzmán.

20. *Cf.* les obres de Taurinus en els articles citats en la nota 19.

21. *Cf.* qualsevol dels tres articles citats al final de la nota 19.

22. Hem suposat implícitament que el postulat 2 i les proposicions I, 12 i 16 impliquen que la recta sigui de longitud potencialment infinita. (L'alternativa seria que la recta tornés sobre si mateixa; alternativa interpretable, perquè el postulat 2 i la proposició I, 12 no són convincents, i I, 16 potser sigui un paralogisme). En els *Elements* hi ha defectes que es poden veure en les *Històries de les Matemàtiques,* per exemple la de C. Boyer. Al dir que és «excel·lent», naturalment, prescindim d'aspectes didàctics i de posada al dia.

3. La crisi del segle XX

No pot causar estranyesa que de la creació de les geometries no euclidianes se'n segueixin greus conseqüències. No és infreqüent que la resolució d'un problema que ha preocupat molt doni lloc a dos problemes tan o més difícils que el primer. Concretament, em refereixo als dos temes següents: les noves relacions que sorgeixen entre la matemàtica i la física, i el nou problema de la consistència de les matemàtiques. Naturalment, no és exclusivament la resolució de la qüestió de les paral·leles la causa dels temes esmentats, sinó que també hi contribueixen de manera important, per exemple, el gran desenvolupament de l'anàlisi, l'aritmètica dels nombres imaginaris, l'àlgebra dels quaternions, els espais n-dimensionals, etc.

El segle XIX presencia la independització de la matemàtica respecte de la física. A l'apartat 1.3 dèiem que els *Elements* tenien un caràcter doble, que eren a l'ensems matemàtiques i física segons les concepcions actuals. És obvi, en la hipòtesi que tàcitament és admesa durant bona part del segle XIX, que la geometria del món físic és una geometria elemental i, per tant, homogènia en tot l'espai, que només hi pot haver una geometria física mentre que hi ha tres o infinites geometries matemàtiques, totes relativament equiconsistents entre si. L'antiga geometria dels *Elements* s'ha desdoblat, doncs, definitivament, en una geometria matemàtica i una geometria física, com ja hem indicat.

Ara bé, per a Aristòtil i en els *Elements,* els principis especials o postulats són fruit d'una inducció intuïtiva que s'aplica al món físic. Aquesta intuïció pot ésser equivocada, però si és certera, no es pot ni plantejar la inconsistència del sistema, llevat que es qüestioni el principi de no contradicció. Però en rebutjar la intuïció aristotèlica o en esdevenir incerta, resulta que no hi ha cap garantia de certesa dels primers principis propis de la geometria matemàtica. Aquests principis no poden justificar-se per mera inducció (enumerativa), ni per demostració deductiva. Sorgeix el problema de la consistència de les matemàtiques; és a dir, ¿com sabem que no es poden donar teoremes matemàtics contradictoris? Aquesta qüestió planteja una crisi de tota la matemàtica.

Els matemàtics del segle XIX tindran un especial interès pel rigor de les matemàtiques. És necessari recuperar el *more geometrico* dels grecs. I al final del segle XIX, aquest interès, convergent amb una preocupació pels fonaments, produirà tres escoles o teories epistemològiques per assegurar la incontrovertibilitat de les matemàtiques: el logicisme de Frege, Whitehead i Russell, l'intuïcionisme de Brouwer i el formalisme de Hilbert. Totes tres resulten ben aviat clarament insatisfactòries[23]. La que més perdura i amb molts adeptes, la del formalisme, resulta també insatisfactòria per a la majoria dels matemàtics, quan en 1931 Gödel publica el teorema d'incompletesa[24].

En la resta d'aquesta tercera i última part voldria, en primer lloc, continuar amb unes observacions que em duen a formular una actual demarcació de la matemàtica que em sembla acceptable, i a discernir dues tendències en la manera com avui els matemàtics emprenen la seva tasca. Després, no sense força risc d'equivocar-me[25], explicaré la noció de veritat dintre d'una doctrina conceptualista de la matemàtica. I en tercer i últim lloc faré unes consideracions sobre les relacions entre la matemàtica i la física.

3.1. A partir de la data mencionada, 1931, s'accentua la crisi de la matemàtica. Aquesta es manifesta principalment en les diverses doctrines sobre l'ontologia de les entitats matemàtiques, sobre el sentit de la veritat i de la pèrdua de certesa i sobre la facultat humana i la manera d'aprehendre els principis; i també en la diferent manera de concebre quina és la finalitat de les matemàtiques, o potser millor, perquè les matemàtiques resulten tan útils per a la física i per a totes

KURT GÖDEL

les ciències en general. Naturalment, tots aquests aspectes estan estretament relacionats entre si. I tots configuren també les relacions i la dependència mútua entre matemàtiques i física.

Fins i tot deixant a part les doctrines empiristes sobre el coneixement matemàtic, que actualment tenen pocs adeptes[26], el nombre i varietat de les doctrines vigents sobre què són les matemàtiques és notable. S'explica aquesta diversitat per la intrínseca mal·leabilitat del coneixement matemàtic i per la riquesa d'aspectes fonamentals que s'hi poden considerar. Totes admeten l'existència d'una intuïció matemàtica que permet, almenys teòricament, conèixer els primers principis matemàtics, i també totes exigeixen un gran rigor formal i donen molta importància a aspectes formals. Malgrat tot, aquesta gran varietat no atempta contra la forta unitat epistemològica de les disciplines matemàtiques.

En efecte, la matemàtica es distingeix de la lògica perquè aquesta és una disciplina purament formal sense contingut material. Això es transparenta, per exemple, en els axiomes. Així, les teories formals de primer ordre de la lògica no tenen axiomes propis; aquests axiomes s'anomenen també no lògics, precisament perquè cauen fora de la lògica. Als efectes de precisar la demarcació de la matemàtica, em sembla bé definir la matemàtica com l'estudi dels sistemes formals que continguin axiomes propis[27]. Els axiomes d'un sistema formal lògic no defineixen cap propietat, no determinen cap entitat; en canvi, sí que ho fan els axiomes no lògics, suposant que siguin consistents. Per això, en lògica es parla de validesa, i en matemàtica de veritat.

La matemàtica també es distingeix avui força netament de la física. En efecte, cap resultat d'un experiment físic pot ser principi ni premissa intermèdia en la cadena de raonaments que constitueixin una demostració d'una proposició matemàtica (teorema). Dintre d'una teoria matemàtica, la veritat recau sobre entitats matemàtiques (individus d'un model, que només tenen existència matemàtica), sense necessitat que aquestes entitats tinguin una referència ulterior i directa a la realitat del món actual[28]. Contràriament, per a la demostració d'una proposició física (llei) és necessari que en algun lloc o d'alguna manera intervingui algun resultat d'un experiment físic. També, dintre d'una teoria física, és necessari que els individus del model tinguin, d'alguna manera, una ulterior referència a la realitat del món físic actual.

Tornant a la situació present de les matemàtiques, em sembla que hi podem distingir dues tendències. Una que, malgrat el teorema de Gödel, continua considerant les matemàtiques com una disciplina substancialment formal, com a un joc, valorant altament la motivació estètica i buscant-la en la mateixa dinàmica interna de les matemàtiques; hi ha poca preocupació per la utilitat de les matemàtiques; la veritat matemàtica és quasi una mera validesa, però en canvi pretén una certesa gairebé absoluta. Per altra banda, el fracàs de les tres escoles mencionades sobre els fonaments de la matemàtica, la crítica de Brouwer, alguns resultats paradoxals que es deriven del postulat d'elecció de Zermelo i d'alguns altres possibles postulats d'una ampliada teoria de conjunts, i, sobretot, l'esmentat teorema d'incompletesa de Gödel, han provocat una tendència cap a unes matemàtiques menys formals, més intuïtives, i amb poca preocupació per la manca de demostració de la consistència, més vinculades a la física i amb una explícita intencionalitat d'instrumentalitat per a totes les ciències; i també amb una pretensió de veritat forta, encara que reconeixent una clara pèrdua de certesa.

3.2. Voldria ara fer una anàlisi de la noció de veritat de les proposicions matemàtiques (teoremes) en una doctrina conceptualista.

Per conceptualisme matemàtic entenc una doctrina que admet una intuïció matemàtica que crea, a partir dels resultats de l'experiència sensitiva, unes entitats matemàtiques, que són conceptes mentals. Conseqüentment, és una doctrina entre l'empirisme i el realisme matemàtics. Aquesta intuïció no és la intuïció pura kantiana, perquè, encara que la ment deixi la seva empremta en els objectes que crea, i això implica un cert apriorisme, no s'admet que sigui una facultat que en la matemàtica produeixi judicis sintètics *a priori.* Ja hem vist que Gauss no admet que les proposicions de la geometria siguin sintètiques *a priori*[29], i Frege també rebutja que les proposicions de l'aritmètica siguin sintètiques *a priori*[30]; i encara que Gauss concedeix que l'aritmètica pugui ser sintètica *a priori,* i Frege ho concedeix de la geometria, tots dos ho neguen quan tracten de la seva disciplina, que coneixen molt bé, i de la qual estudien els fonaments.

Sembla que la noció de veritat s'ha d'entendre sempre dintre d'un cert univers, que s'ha d'especificar o sobreentendre. En concret, la veritat matemàtica s'ha d'entendre dintre d'una teoria matemàtica. Suposarem que es tracta d'una teoria formal de primer ordre.

En una ontologia de les matemàtiques realista, per exemple platònica o aristotèlica, la veritat d'una proposició matemàtica recau sobre els mateixos objectes o entitats matemàtiques. Hi ha d'haver una correspondència i una adequació entre la ment i la cosa. En la doctrina conceptualista, les entitats matemàtiques existeixen en la ment humana; són conceptes científics (idealitzacions) que tenen un origen últim en el llenguatge ordinari i una creixent complicació per acumulació de notes o condicions. Així, per exemple, els termes *funció, espai funcional, conjunt de solucions d'una equació diferencial,* etc. Anàlogament per a les entitats matemàtiques funcionals que transformen termes en termes, com *derivar una funció, sumar dues funcions,* etc; i el mateix per als predicats i relacions com *continuïtat, compacitat, igualtat, ordre,* etc. També tenen existència mental les fórmules, problemes, demostracions, teories, etc. O sigui, totes les entitats matemàtiques. Quan el matemàtic crea o aprèn aquests conceptes d'entitats matemàtiques, els diposita en la memòria, i és en tant que dipositats en la memòria que hi recau de manera directa i immediata la veritat d'una proposició matemàtica. Hi ha d'haver una correspondència i adequació (una identitat de contingut reconeguda) entre les entitats mentals sorgides com a conseqüència del coneixement, per demostració, d'un teorema i les prèviament concebudes i dipositades en la memòria.

Però ara, a diferència del cas d'una ontologia realista, aquesta adequació no és suficient perquè hi hagi veritat. És a dir, ara cal exigir que aquestes entitats matemàtiques existents en la ment i que serveixen per a establir la correspondència i adequació, no siguin incompatibles entre si. Això implica que hi hagi una teoria formal de primer ordre o, en general, un sistema formal en el qual es pugui portar a terme la demostració del teorema i que sigui consistent.

Ara bé, la consistència d'una teoria és equivalent a l'existència d'un model amb un univers d'individus que tinguin una existència possible. Per tant, sembla que l'exigència de consistència coincideix amb una exigència de possibilitat de realitat física. Resulta, doncs, que les condicions d'existència i la veritat matemàtiques són satisfetes només quan resulta possible per a les entitats matemàtiques que tinguin un referent en un món físic possible.

Si d'una deducció formal dintre d'un sistema formal en diem que és vàlida quan és correcta, i no vera perquè és quelcom purament formal, llavors la veritat matemàtica no es redueix a una mera validesa, sinó que exigeix una realitat dintre del món real del possible, on possible s'entén en relació amb el món de la física.

Aquesta interpretació de la noció de veritat en les matemàtiques explica el diferent grau de certesa de les proposicions matemàtiques. Així, per exemple, els teoremes de la teoria elemental *RCF* de cossos closos reals (suma, multiplicació, ordre i arrel quadrada de nombres positius) són vers amb una certesa absoluta, perquè es demostra matemàticament que aquesta teoria és completa i per tant consistent[31]. També els teoremes de l'aritmètica de Peano, formalitzada per la teoria *S* de Mendelson o la *P* de Shoenfield[32] obtenen una certesa gairebé absoluta gràcies a l'extraordinària evidència dels seus postulats. Però no es pot dir el mateix dels teoremes de la teoria de conjunts *ZF* o *NBG,* formalitzada com es pot veure en els autors esmentats[33], perquè alguns dels seus axiomes no obtenen el mateix grau d'evidència intuïtiva que en el cas de l'aritmètica de Peano.

També en resulta, de la interpretació donada, que sota la hipòtesi que la teoria de conjunts (sense l'axioma d'elecció) sigui consistent, tant la hipòtesi del continu com la de la seva negació, ambdues tenen existència matemàtica, encara que naturalment no a l'ensems, dintre d'un mateix sistema. La situació és semblant a la que hem vist del cinquè postulat d'Euclides i el de la seva negació, que ambdós tenen existència matemàtica, el primer en la geometria euclidiana i l'altre en la geometria hiperbòlica[34].

Sembla, també, que de la interpretació donada se'n pot deduir d'on poden provenir les pèrdues de certesa d'una presumpta veritat matemàtica. Aquí, contràriament al que succeeix en física, no hi pot haver pèrdua de certesa en virtut d'una confrontació experimental amb la realitat física, perquè aquesta no queda implicada en la veritat matemàtica, sinó només que com a possible.

3.3. Tot i apreciant molt la bellesa de les demostracions matemàtiques i valorant altament el seu caràcter lúdic, i havent-los fruït intensament, em sembla, malgrat tot, que és encertada la tendència actual d'una majoria de matemàtics d'atansar-se a la física, buscant-hi motivacions i línies de recerca. Ajudarà a tocar de peus a terra.

a) Recentment són nombrosos els articles o comentaris sobre la increïble aplicabilitat de les matemàtiques a la física[35]. En aquest context són remarcables dos fets que són a l'arrel de la física. Em refereixo, en primer lloc, al fet que en la natura, malgrat la seva gran complexitat, s'hi descobreixen fenòmens de gran regularitat i ordre objectius, que constituiran l'element material o simplement el contingut empíric de les lleis de la física, o més generalment de les lleis naturals; així ho expressen, per exemple, Einstein, Schrödinger i Wigner[36].

El segon fet és que, segons sembla, el gran llibre de l'univers està escrit en el llenguatge de les matemàtiques[37]. Si amb aquesta frase només es vol expressar la utilitat de les matemàtiques per a la física, sembla que no hi ha res a objectar. Però si s'entén en sentit pitagòric, com d'un misteri de la natura, aleshores em sembla que no hi ha tal. No es tracta pròpiament d'un segon misteri de la natura, sinó del misteri de la raó humana que és capaç de donar forma a les dades empíriques i de descobrir les lleis de la física.

Admesa aquesta facultat humana, no sembla tan misteriós que el llenguatge en què s'expressin les lleis de la física sigui el de les matemàtiques. Senzillament és que no n'hi ha d'altre, almenys que sigui tan apte per a créixer i desenvolupar-se com a instrument per al coneixement de la natura. Wigner assenyala «que les lleis de la natura han d'ésser ja formulades en el llenguatge de les matemàtiques perquè siguin un objecte al qual es puguin aplicar les matemàtiques aplicades». «Certament, només una fracció de tots els conceptes matemàtics és emprada en la física»; i a continuació: «L'observació, que jo conegui, que més bé explica que els conceptes matemàtics sorgeixen inesperadament en la física, és l'afirmació d'Einstein que les úniques teories físiques que acceptem de bona gana són les que són belles[38].» Em sembla que el sorprenent gran nombre d'experiències físiques que en aquest segle troben ràpidament una estructura matemàtica adequada, en la qual aquelles experiències encaixen, és degut a l'extraordinari desenvolupament exponencial de les matemàtiques en els últims tres segles. Com en un país on tothom anés nu, la decisió de vestir els animals del parc zoològic crearia dificultats per manca de vestits; però en un país com el nostre, o sigui, en la física actual, el problema no és la manca, sinó la sobra de vestits i teories matemàtiques. Aquesta extraordinària creixença de les matemàtiques passa desapercebuda. Dieudonné compara la teoria de cohomologia de feixos, creada el 1946, amb el descobriment quasi contemporani de la doble hèlix; ambdues han permès un progrés comparable, però tothom coneix el segon, mentre que tothom desconeix el primer, perquè no és ni fàcil ni interessant donar-lo a conèixer[39].

Com més les matemàtiques s'allunyen de la realitat, cal també més que ens aferrissem a atansar-les a la física, que és el mitjà que les lliga a la realitat del món.

b) Per acabar, voldria indicar dues coses en les relacions actuals entre les matemàtiques i la física que, després de tantes vicissituds des d'Aristòtil, fan recordar, em sembla, la teoria aristotèlica de la ciència. Em refereixo a la intuïció científica i a la naturalesa dels objectes de la física.

La intuïció matemàtica, i també la física, en la curta mesura en què ha quedat reflectida en aquestes pàgines, s'acosta, em sembla, a la inducció intuïtiva o intuïció descrita per Aristòtil en l'últim capítol, el II,19, dels *Analítics Posteriors.* La raó és que l'apriorisme que imposaria la ment no tindria pròpiament contingut, sinó que es reduiria a una aprehensió de la realitat, de l'ens amb els seus atributs transcendentals[40]. Naturalment, aquesta intuïció és fal·lible. Pel que es refereix a la intuïció física, em sembla que un cas paradigmàtic és la intuïció del cinquè postulat d'Euclides. Ni que ara sapiguem que és errònia, no deixa de ser extraordinàriament acurada i científica.

La física tracta de les coses del món físic. Ara bé, els conceptes directament implicats en les lleis físiques i en qualsevol text de física teòrica o física matemàtica evidentment no són els conceptes de les coses del món físic.

Conseqüentment, a la física hem de distingir, almenys, uns objectes immediats, dels quals tracten les lleis físiques, i una objectes últims, que són les coses d'aquest món en què vivim. Els objectes immediats són conceptes mentals tematitzats, o millor *idealitzats.* Aquesta idealització no afecta únicament el context o l'ambient, com quan Galileo prescindeix de la resistència de l'aire, sinó que en general serà molt més intrínseca.

Per exemple, considerem com a objecte físic immediat el conjunt de moviments d'una membrana vibrant, que incialment està plana i quieta [en un domini D acotat de $\mathbf{R}^2$], i que està subjecta, durant tot el temps de l'experiment, a un contorn regular [per exemple, pertanyent a $C^1(\delta D)$] i tal que només considerem moviments regulars [per exemple, pertanyents a $C^2(D) \cap C(\bar{D})$] provocats per forces contínues aplicades a la membrana. Aquest conjunt de moviments s'identificarà freqüentment, en un text de física matemàtica dels medis continus, amb el conjunt de solucions de l'equació canònica d'ones [$\delta^2 u/\delta t^2 - \Delta u = f$], en un espai i amb unes condicions auxiliars òbvies. Ara bé, aquest objecte de la física matemàtica descriu moviments absolutament reversibles, i això no pot succeir en els moviments de les membranes físiques, perquè no podem eliminar l'entropia.

La relació entre l'objecte immediat i l'objecte últim de la física és una relació de referència i ha de ser necessàriament establerta per un procés empíric, o sigui, una experiència objectiva, com una experimentació, observació, fet històric o, d'una manera més remota i indirecta, àdhuc potser mitjançant un experiment ideal *(thought experiment).*

Els objectes immediats de la física (o de l'economia teòrica) són els mateixos que els de les matemàtiques. Així, «moviment d'una membrana» és un terme físic i un terme matemàtic, sense que en el concepte mateix hi puguem trobar, em sembla, cap diferència. El mateix podem dir de recta, espai rimanià, conducció de calor, funció de control, funció de cost (per exemple, en un sistema econòmic regit per una equació en derivades parcials i en el qual s'ha de minimitzar la «funció de cost»). El matemàtic considera els «moviments d'una membrana» físics, però no en tant que són físics; mentre que el físic considera els «moviments d'una membrana» matemàtics, però en tant que són físics i no en tant que són matemàtics. Tot igual que en el text aristotèlic que hem citat al final de la primera part. Naturalment, «en tant que són físics» vol dir que implica necessàriament una referència a quelcom del món físic nostre; mentre que «en tant que són matemàtics» vol dir que no implica necessàriament tal referència.

Finalment, una propietat interessant dels termes matemàtics és la seva possible plurivalència. És ben conegut que els moviments o solucions de l'equació d'ones (amb una sola variable espacial) es poden referir indistintament al moviment d'aigua en un canal, a les vibracions d'un tub sonor o a les vibracions d'una corda vibrant. Matemàticament només hi ha un terme, però físicament són almenys tres, que es diferencien entre si únicament pel context de la referència última a fenòmens del món físic[41]. He dit.

23. L'arrel de la dificultat d'una fonamentació de les matemàtiques està ben exposada per M. de Guzmán en Dou-Guzmán, al final de la ponència.

24. Hi ha, naturalment, una extensíssima bibliografia sobre aquests resultats «negatius». Per a una exposició competent vegeu P. Benacerraf - H. Putnam. Per a una breu explicació vegeu Dou 1970 i Dou 1969.

25. Encara que el que dic no és improvisat, ja que ho vinc pensant de fa anys, és ben possible que algunes afirmacions concretes delatin la pressa amb què m'he vist obligat a escriure aquesta lliçó.

26. Ph. Kitcher ha escrit recentment un llibre en què elabora un empirisme, al qual dóna el títol de teoria evolucionària del coneixement matemàtic.

27. Però aquesta definició no em sembla bona per a definir el que són les matemàtiques, perquè no va a allò que n'és el cos. ¿Qui es recorda de cap sistema formal quan fa matemàtiques?

28. No s'exclou que hi sigui aquesta referència ulterior, però encara que hi sigui no és constitutiva de la veritat matemàtica. Em sembla que és necessari, i això constitueix el sentit de la veritat matemàtica, que hi hagi una possible referència ulterior a la realitat d'un món possible (*Cf.* 3.2).

29. *Cf.* l'apartat 2.4.

30. Dins *Grundlagen der Arithmetik. Cf.* Benacerraf - Putnam, pp. 107-112.

31. *Cf.* Shoenfield, § § 5.5 i 5.6, pp. 87-88.

32. *Cf.* Mendelson, cap. 3; i Shoenfield, cap. 8.

33. *Cf.* Mendelson, cap. 4; i Shoenfield, cap. 9.

34. Una qüestió diferent és si el progrés de les matemàtiques, entès potser en termes d'aplicabilitat, farà que una de les dues hipòtesis quedi incorporada a una teoria de conjunts més potent, i l'altra abandonada. *Cf.* per exemple, K. Gödel, especialment el suplement a la segona edició, pp. 269-273. Remarquem que l'argumentació donada suposa la consistència de la teoria de conjunts *ZF*.

35. Vegeu per exemple, els articles de E. Wigner i de J.M. Lévy-Leblond.

36. *Cf.* Wigner, l.c., p. 4, qui cita Schrödinger. Heus aqui un text d'Einstein en carta a M. Solovine (1952): «Trobes estrany que concebi la intel·ligibilitat del món (en la mesura en què ens és licit parlar-ne) com un miracle o misteri etern. Doncs bé, *a priori* hauria d'esperar-se un món caòtic, captable només a nivell superior pel pensament. Es podria, millor caldria esperar que el món es mostrés sotmès a llei, únicament gràcies a la nostra in-

tervenció posant-hi ordre. Seria un tipus d'ordenació com l'ordre alfabètic per a les paraules d'una llengua. Però el tipus d'ordenació que produeix, per exemple, la teoria de la gravitació de Newton, és d'un caràcter totalment diferent. Ni que els axiomes de la teoria fossin posats per l'home, l'èxit de tal empresa pressuposa un alt grau d'ordenació en el món objectiu, que *a priori* no tenim cap dret d'esperar. Aquí hi ha "el miracle" que creix contínuament amb el desenvolupament del nostre coneixement.»

37. La frase és de Galileo en *Il Saggiatore,* VI, p. 232. És citada per Lévy-Leblond, l.c. p. 75; i en Losee, p. 27.

38. E. Wigner, l.c. pp. 6-7.

39. Dieudonné, p. 16.

40. Heus aquí un text de Gödel sobre aquest tema, que reprodueixo en la seva versió revisada i augmentada: «It should be noted that mathematical intuition need not be conceived of as a faculty giving an *immediate* knowledge of the objects concerned. Rather it seems that, as in the case of physical experience, we *form* our ideas also of those objects on the basis of something else which *is* immediately given. Only this something else here is *not,* or not primarily, the sensations. That something besides the sensations actually is immediately given follows (independently of mathematics) from the fact that even our ideas referring to physical objects contain constituents qualitatively different from sensations or mere combinations of sensations, e.g., the idea of object itself, whereas, on the other hand, by our thinking we cannot create any qualitatively new elements, but only reproduce and combine those that are given. Evidently the "given" underlying mathematics is closely related to the abstract elements contained in our empirical ideas (...). It by no means follows, however, that the data of this second kind, because they cannot be associated with actions of certain things upon our sense organs, are something purely subjective, as Kant asserted. Rather, they, too, may represent an aspect of objective reality, but, as opposed to the sensations, their presence in us may be due to another kind of relationship between ourselves and reality.» Suplement a la segona edició de *What is Cantor's continuum problem?*. *Cf.* Benacerraf-Putnam, pp. 271-272.

41. Lévy-Leblond, dins l.c., pp. 80-82, indica un polimorfisme matemàtic de la física, que fa joc, diu, amb la plurivalència física dels termes matemàtics. Escriu: «Les lleis i els conceptes físics tenen la propietat de posseir diverses matematitzacions possibles.» I segueix: «Naturalment, les diverses formulacions d'una mateixa llei són rigorosament equivalents en sentit matemàtic. No ho són en el sentit de la física.» No trobo l'argument convincent. Em sembla que diferents formulacions físiques donen lloc a formulacions matemàtiques que no són «rigorosament equivalents». Les diferències entre les corresponents formulacions matemàtiques pot fer-se patent, per

exemple, en comparar les diverses teories matemàtiques a què pertanyen les diferents formulacions. Per exemple, l'axioma 4 dels *Elements,* geometria {G,Q}, els axiomes de congruència de Hilbert per a la geometria {G}, i la curvatura constant en les geometries rimanianes, totes responen al fet que les figures es puguin moure sense deformar-se; però els tres conceptes matemàtics no són equivalents si es prenen en el seu context essencial.

Referències bibliogràfiques

ARISTÒTIL, *Prior Analytics, Posterior Analytics, Physics, Metaphysics.* Loeb Classical Library.

BECKER, Oskar, *Grundlagen der Arithmetik,* Freiburg 1964.

BENACERRAF, Paul, and Hilary PUTNAM, *Philosophy of Mathematics. Selected Readings,* Prentice-Hall 1964.

BONOLA, Roberto, *La geometria non euclidea. Esposizione storico-critica del suo sviluppo,* Bologna 1906. N'hi ha una traducció anglesa per H.S. CARSLAW, Dover Publications, 1955.

BOYER, Carl B., *A History of Mathematics,* Wiley, New York 1968.

DIEUDONNÉ, Jean, *Pour l'honneur de l'esprit humain. Les mathématiques aujourd'hui,* Hachette, 1987.

DOU, Alberto, 1967, «Los paralogismos de Euclides y Saccheri en la teoría de las paralelas», *Revista de la Real Academia de Ciencias* 61 (1967) 155-174.

—, 1969, «Logical and historical remarks on Saccheri's geometry», *Notre Dame J. For. Log.* 10 (1970) 385-415.

—, 1970, *Fundamentos de la Matemática,* Labor (Nueva colección Labor), Barcelona 1970. 142 pp. (id. 1974^2).

—, 1972, «De la verdad a la validez en Geometría (1733-1871)». *Pensamiento* 28 (1972) 413-429.

—, 1986, «Euclides». Dins *Historia de las matemáticas hasta el siglo XVII,* Real Academia de Ciencias, Madrid 1986.

DOU, Alberto y Miguel de GUZMÁN, «Grandeza y miseria de las matemáticas». Dins *Fragmentariedad de las ciencias,* editat per A. Dou, Ediciones Mensajero, Bilbao 1985, pp. 179-213.

EUCLIDES, Στοιχεῖα. Edició crítica en grec i traducció al llatí per I.L. HEIBERG, Teubner, Leipzig 1883. N'hi ha una traducció a l'anglès: *Cf.* HEATH.

GAUSS, Carl Friedrich, *Werke,* vol. 8, p. 200.

GÖDEL, Kurt, «What is Cantor's continuum problem?», dins BENACERRAF - PUTNAM, pp. 258-273.

Greek Mathematical Works. Vol. I: *Thales to Euclid.* Vol II: *Aristarchus to Pappus of Alexandria,* Loeb Classical Library.

GUZMÁN, Miguel de. *Cf.* DOU-GUZMÁN.

HEATH, Thomas L., *The Elements of Euclid,* Dover, New York 1956.

HILBERT, David, *Grundlagen der Geometrie,* 1899. Novena edició, Teubner, Stuttgart 1962.

HIPÒCRATES de Quios. Dins *Greek Mathematical Works. Cf.* les cites que figuren en les entrades *νεύειν* i *νεῦσις*, II, 672-673.

KITCHER, Philip, *The Nature of Mathematical Knowledge,* Oxford University Press, New York 1983.

KLINE, Morris, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times,* Oxford University Press, Nova York 1972.

LEE, H.D.P., «Geometrical method and Aristotle's account of first principles». *The Classical Quarterly* 29 (1955) 113-124.

LÉVY-LEBLOND, Jean-Marc, «Física y matemáticas». Dins *Pensar la matemática,* traduït per Carlos BIDON-CHANAL del francès *Penser les mathématiques,* Éditions du Seuil, 1982. Tusquets editores, Barcelona 1984, pp. 75-92.

LOSEE, John, 1972, *Introducción histórica a la filosofía de la ciencia.* Traducción del inglés por A. MONTESINOS. Alianza Universidad, 1976.

MARTÍNEZ PÉREZ, Mariano, «Los orígenes del método axiomático-deductivo», dins *Historia de la matemática hasta el siglo XVII,* Real Academia de Ciencias, Madrid 1986.

MENDELSON, Elliot, *Introduction to Mathematical Logic,* Van Nostrand, Princeton NJ 1964, segona edició 1979.

PUTNAM, Hilary. *Cf.* BENACERRAF-PUTNAM.

ROSS, W.D., *Aristotle,* Methuen, London 1923. Cinquena edició revisada 1949.

SACCHERI, Girolamo, *Euclides ab omni naevo vindicatus,* Milano 1733.

TAURINUS, Franz Adolph, *Theorie der Parallellinien,* 1825. Textos reproduïts a Oskar BECKER.

WICKSTEED, Philip H., *«Introduction»* a ARISTOTLE'S *The Physics,* vol. I. Loeb Classical Library.

WIGNER, Eugene P., «The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences», *Communications on P. and A. Mathematics,* 13 (1960) 1-14.