

ABC, 6 de Marzo de 2018
CIENCIA - El ABCdario de las matemáticas
Fernando Corbalán

En «La vida es una curva (I)» el matemático Fernando Corbalán escribe sobre una curiosa línea que es braquistócrona, en la que el tiempo de descenso es mínimo, y tautócrona, en la que el tiempo de llegada no depende de la altura



Un cicloide en una pista para actividades deportivas - WIKIPEDIA

Hace muchos años, una canción famosa afirmaba «La vida es una tómbola». Yo más bien creo que podemos utilizar la misma tonadilla para proclamar: «La vida es una curva». Y no solo por aquello de que **la estructura de la vida está inscrita en la doble hélice del ADN**, sino porque, por más que se empeñen las matemáticas y la civilización en encontrar rectas y ángulos rectos,

lo que vemos a nuestro alrededor es más curvo que recto

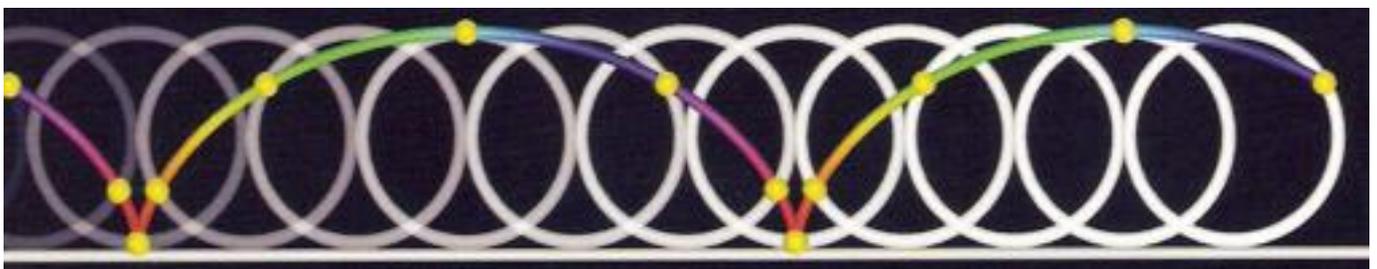
. Con el añadido de una tendencia personal hacia las curvas, que comparto con el gran arquitecto Oscar Niemeier («No es el ángulo recto lo que me atrae, ni la línea recta, dura, inflexible creada por el hombre. Lo que me atrae es la curva libre y sensual») y el poeta Jesús Lizano («Mi madre decía: a mí me gustan las personas rectas. A mí me gustan las personas curvas, las ideas curvas, los caminos curvos, porque

el mundo es curvo/ y la Tierra es curva/ y el movimiento es curvo

»). Por eso iniciamos con la cicloide una serie sobre algunas curvas especiales y sus peculiaridades.

El movimiento de un punto en una rueda

Vamos a pensar en **una circunferencia que gira sin resbalar y un punto fijo de ella**. Al dar una vuelta completa, ¿qué curva traza ese punto? A bote pronto parece que es fácil la respuesta: es también una circunferencia. Pero una vez más la evidencia nos juega malas pasadas. Así es que para visualizarla miramos la rueda de una bicicleta y nos fijamos en la trayectoria que recorre la válvula que se utiliza para hincharla. La curva que resulta, que no es una circunferencia, y que se ve en la figura, se llama cicloide.



Trayectoria de un punto fijo en una circunferencia que gira sin resbalar

Una curva de origen tan poco sofisticado parece que debería tener unas propiedades muy normales, y sin embargo no es así, sino que veremos que merece una etapa de «La vida es una curva». Si nos vamos a la historia y llegamos a [Johann Bernoulli](#) (1667-1748), miembro destacado de la familia con más matemáticos brillantes, que en 1696 propuso a la comunidad **el reto de encontrar la curva del descenso rápido**

. Es decir: «Entre las infinitas curvas que unen los dos puntos dados o que pueden dibujarse

del uno al otro, elegir una tal que si la curva se reemplaza por un tubo delgado o ranura en los que se coloca una pequeña esfera y se deja caer, entonces esta esfera pasaría de un punto al otro en el tiempo más breve posible». Destaquemos que no se trata de longitud mínima (en cuyo caso sería una recta), sino del

tiempo mínimo en pasar de uno a otro

, lo que le da un gran valor por la optimización de la movilidad.

Varias mentes brillantes de la pequeña comunidad matemática propusieron cinco soluciones al reto que coincidían en dar la cicloide como respuesta. Además de las del propio autor del desafío, entre estas estaban las de su hermano mayor, **Jacob Bernoulli** (1655-1705), **Leibnit**

z
(1646-1716),

L'Hôpital

(1661-1704) y

Newton

(1643-1727).

Con este problema, esta constelación de talentos hacían nacer el cálculo de las variaciones

, una nueva rama de las matemáticas, en la que el objetivo de los problemas no era buscar puntos de una curva con una propiedad prefijada, sino encontrar curvas (o funciones) que satisficieran una determinada propiedad.

Propiedades de la cicloide

La primera de ellas es la de la exigencia de Bernoulli, lo que se llama la **curva braquistócrona** : la de

[descenso más rápido entre dos puntos](#)

. Como la rapidez es una de las características de nuestro tiempo, se puede utilizar este perfil para los toboganes de los parques de atracciones; y si no siempre se hace es por las dificultades de diseño. También podemos recuperarlo si queremos hacer algún tobogán familiar.

De hecho, **la cicloide es en general la curva del perfil de los toboganes de patinaje** (cada vez más presentes en nuestras ciudades, y que se conocen como «half») para llegar abajo de la forma más rápida.

Pero la cicloide tiene otra propiedad inesperada y sorprendente, la **tautocronía**, que significa que si un móvil se desplaza a lo largo de la curva, en caída libre, llegará al punto más bajo de la curva en un

t

tiempo que no depende de la altura del punto de salida

. Esto se puede visualizar colocando dos cicloides iguales enfrentados y dejando caer dos bolas, cada una desde un punto cualquiera de cada una de las cicloides y comprobando que llegan las dos a la vez al punto más bajo en que se juntan las cicloides.

Esa propiedad fue utilizada por el astrónomo holandés Huygens (1629-95) en 1673, en su obra «*Horologium Oscillatorium*», para la construcción de péndulos, que permitían obtener relojes exactos (un problema hoy menor, puesto que hay relojes incorporados a la inmensa mayoría de aparatos que utilizamos, pero que ha supuesto un desafío importante para la humanidad a lo largo de la historia).

El péndulo cicloidal de Huygens

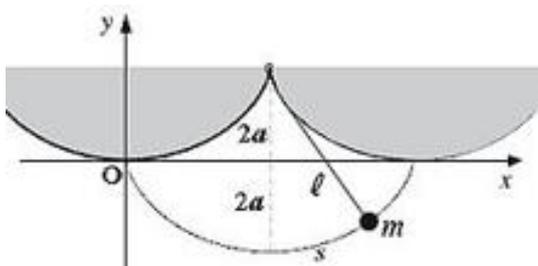
El péndulo cicloidal que propuso Huygens tiene el hilo suspendido entre dos contornos sólidos con la forma de arcos de cicloide tangentes en su punto de unión. Al oscilar el péndulo, el hilo va de uno a otro de esos dos contornos, y la longitud del péndulo queda disminuida en una proporción que depende de la amplitud de las oscilaciones. Huygens mostró que si la circunferencia que genera los dos contornos cicloidales tiene un radio la cuarta parte de la longitud del hilo del péndulo entonces la masa del péndulo describe un arco de cicloide cuya circunferencia generatriz tiene el mismo radio. Y así

se tiene un péndulo cuyas oscilaciones son exactamente iguales

, es decir un

[péndulo isócrono](#)

, que permite construir relojes precisos.



Péndulo isócrono. Los péndulos alcanzan su amplitud al mismo tiempo - WIKIPEDIA

De esta forma **se pudo comenzar a resolver un problema muy importante para la navegación** : la determinación precisa de la longitud del lugar en que se encontraban (la otra coordenada, la latitud podía conocerse con medidas astronómicas). Problema que fue objeto de ofertas de recompensas importantes por parte de las autoridades inglesas, y que no fue resuelto satisfactoriamente hasta un siglo después, por medio del cronómetro marino de John Harrison.

Área y longitud

También la longitud de la cicloide y el área que limita (en una vuelta de la circunferencia) tienen unos valores sorprendentes. La longitud L de la cicloide, contra lo que sería esperable, no depende de π y es igual a ocho veces el radio r de la circunferencia que la engendra:

$$L = 8r$$

En cuanto al área A que limita la cicloide con la recta de desplazamiento del círculo de radio r que la genera es el triple del área de ese círculo:

$$A = 3\pi r^2$$

O sea que si ponemos dentro de la figura de la cicloide el círculo que lo genera, resulta que las tres partes que hemos marcado tienen la misma superficie.

