ABC, 23 de Enero de 2018
CIENCIA - El ABCdario de las matemáticas
Fernando Fouz

Estas antiguas tablas con operaciones geométricas colgaban de los templos y santuarios del país nipón desde el siglo XVII

Una tablilla de Sangaku - Wikipedia

En general conocemos pocas palabras japonesas. En una de las viñetas de Mafalda aprendimos el término “ikebana”, referido al arte floral en la decoración; el término “sudoku” lo tenemos muy reciente aunque nos parezca conocerlo de siempre; Arnold Schwarzenegger nos dejó el famoso “sayonara baby” (“sayonara” significa “adiós” pero con un sentido de despedida definitiva) y, también, lo aprendimos en los primeros dibujos animados japoneses que veíamos en la televisión. Se completa la gama con “origami” , que es el término japonés para la papiroflexia, y algunos pocos términos más que los videojuegos y el cómic nos han enseñado…

El título de este artículo nos aporta una nueva palabra que, a los que nos movemos en este mundo de la divulgación de las Matemáticas, nos resulta familiar: **Sangaku**. Es una palabra japonesa que literalmente significa “tablilla de madera” y, en particular, se refiere a las **tablas de madera que se colgaban en los templos budistas y santuarios sintoístas** , y que, generalmente, contenían relevantes **descubrimientos matemáticos de contenidos geométricos** . Al parecer, este hecho de colgar las tablillas en los templos tenía el doble significado de, por un lado, agradecer a los dioses de esos templos los descubrimientos y, por otro, dar honor a sus autores.

Sí conviene recalcar que el término "sangaku" no da nombre a la matemática japonesa, sino solo a estas tablillas de contenidos matemáticos, pues el nombre de la matemática en general era, y es, "wasan" (otra palabra pues que añadir a nuestro pequeño vocabulario). En este artículo damos cuenta de dos de estos problemas.

Los problemas

Tabilla Sangaku - Wikipedia

Los problemas que aparecen en las tablillas son, en su mayoría, geométricos pero hay algunos aritméticos y algebraicos. Para estos cálculos recurrían a un conjunto de símbolos que representaban a los números enteros y que recibían el nombre de “sangi”, que eran pequeñas líneas colocadas vertical y horizontalmente, lo que sencillamente llamaríamos “palotes” y que, por ejemplo, usamos cuando hacemos recuentos de votos a mano alzada. Además, si estaban escritos en rojo eran números positivos, y en negro, negativos, pues la única diferencia para el número positivo y negativo era el color.

Es interesante señalar que estas tablillas estaban hechas por personas de diversa procedencia, había desde samurais hasta comerciantes pasando por granjeros e incluso niños, no solo por lo que hoy en día llamaríamos un matemático profesional. Es importante citar que **sólo se escribía el problema y no su solución**, lo cual podía tener una cierta postura de **desafío** para los que estuviesen interesados en el tema. Los problemas en su mayoría son de **geometría plana** aunque, algunos de ellos, son **problemas tridimensionales** en los que intervienen esferas o agrupaciones de ellas, e incluso, entre los que yo conozco, uno está referido a la **intersección de un cilindro y una esfera.**

Estas tablillas se construyeron durante el periodo EDO que duró desde 1603 hasta 1867. En este punto me imagino que, si usted es aficionado a los crucigramas, habrá identificado el nombre de EDO, pues es la respuesta a la clásica pregunta de “Antiguo nombre de la ciudad de Tokio”. Efectivamente, ese antiguo nombre de Tokio, “bautiza” a un período de más de dos siglos. Podemos situarnos en esas fechas con nuestra historia española y matemática europea. En el Arte es la aparición del Barroco y pintores como Velázquez (1599-1660), en Literatura es el Siglo de Oro, Lope (1562-1635), Calderón (1600-81), etc. Tristemente no podemos hablar de grandes matemáticos. Nos tenemos que ir a Europa: **Fermat** (1601-1665), **Descartes** (1596-1650), **Leibnitz** (1646-1716), **Newton** (1643-1727), por citar a algunos de los importantes.

El periodo está caracterizado por el aislamiento de Japón del mundo occidental, lo que provocó que no se conociese en Japón el gran desarrollo que en esos siglos tuvo la Matemática en Europa, de tal manera que algunos teoremas, que llamaríamos “europeos”, fueron también encontrados independientemente por japoneses. Este hecho hace que, en los libros de Geometría japoneses, figuren los nombres de matemáticos japoneses desconocidos en teoremas que en Occidente tienen nombres de reconocidos matemáticos. Hay que señalar

que **algunos de estos descubrimientos tienen fecha anterior a su “descubrimiento occidental”.** Uno de los problemas que veremos más adelante (perteneciente a la prefectura de Gumma de 1824) es por ejemplo una variante del **“Teorema de las circunferencias tangentes de Descartes”.**
Afortunadamente esto dejó de ocurrir hace tiempo y, hoy en día, los matemáticos japoneses, no solo son conocidos, sino también, de primer nivel, Por ejemplo, **la demostración de la conjetura de Taniyama–Shimura**, le permitió a **Andrew Wilkes** demostrar el archifamoso **“Último teorema de Fermat”.**

Para los amigos de la Historia hay que señalar que la de Japón está dividida en periodos que van desde el primero, llamado Jomón (8000-300 a.c.) hasta el actual, el decimocuarto, que recibe el nombre de Heisei (1989-...). Este período lo creó el actual emperador **Akihito** a la muerte de su padre **Hirohito** y, según acaba de informar en el pasado mes de diciembre, abdicará del trono el 30 de abril de 2019. Ese día acabará el periodo Heisei y se creará uno nuevo.

La aparición de las tablillas en este periodo Edo va desde la más antigua conservada de 1683 en la prefectura de Tochigi, hasta la de Kinshouzan en 1865. En algunos casos se descubrieron muchos años más tarde de su creación. Por ejemplo, una tablilla realizada en 1814, se descubrió en 1994. Actualmente se conservan algo más de 800 tablillas pero se sabe que su número ha sido muy superior, pues se han perdido o quemado un gran número de ellas.

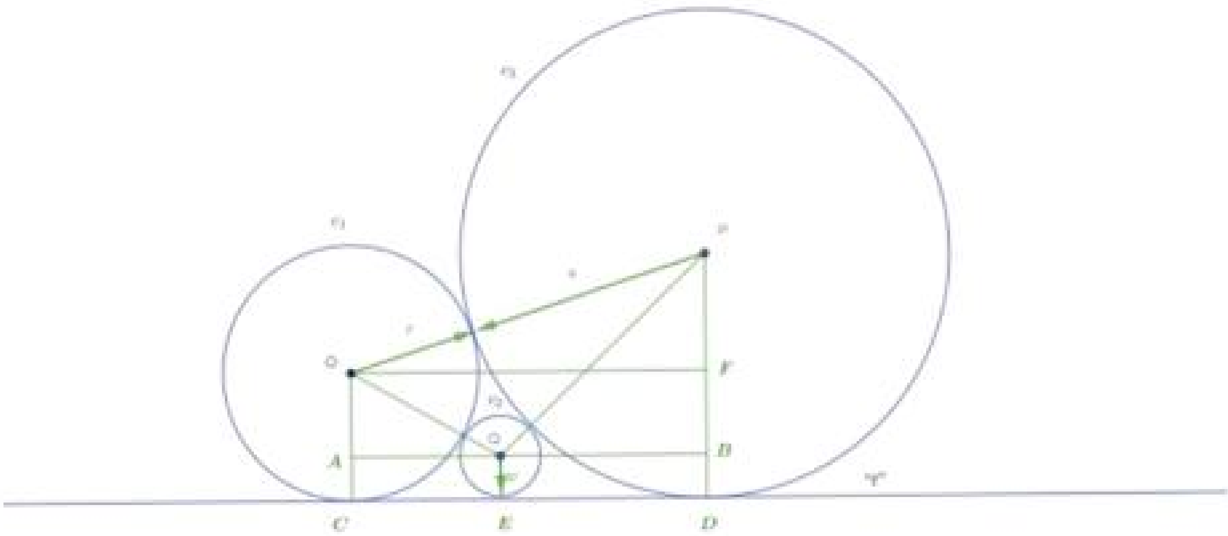
Respecto al contenido concreto de los problemas, en la mayoría intervienen circunferencias tangentes entre ellas o a rectas. Los cálculos para su resolución necesitan ecuaciones lineales o de segundo grado, muchas de ellas obtenidas a partir del teorema de Pitágoras, en el que los valores de los catetos e hipotenusa se calculan a partir de propiedades de la tangencia entre circunferencias y rectas.

[Para aquellos lectores interesados en conocer más este tema, en la revista “Investigación y Ciencia”, número de julio de 1998, hay un artículo de Tony Rohtman con una amplia, documentada e interesante la historia de la matemática japonesa (wasan) de todas las épocas y, en especial, se incluye todo el Sangaku.]

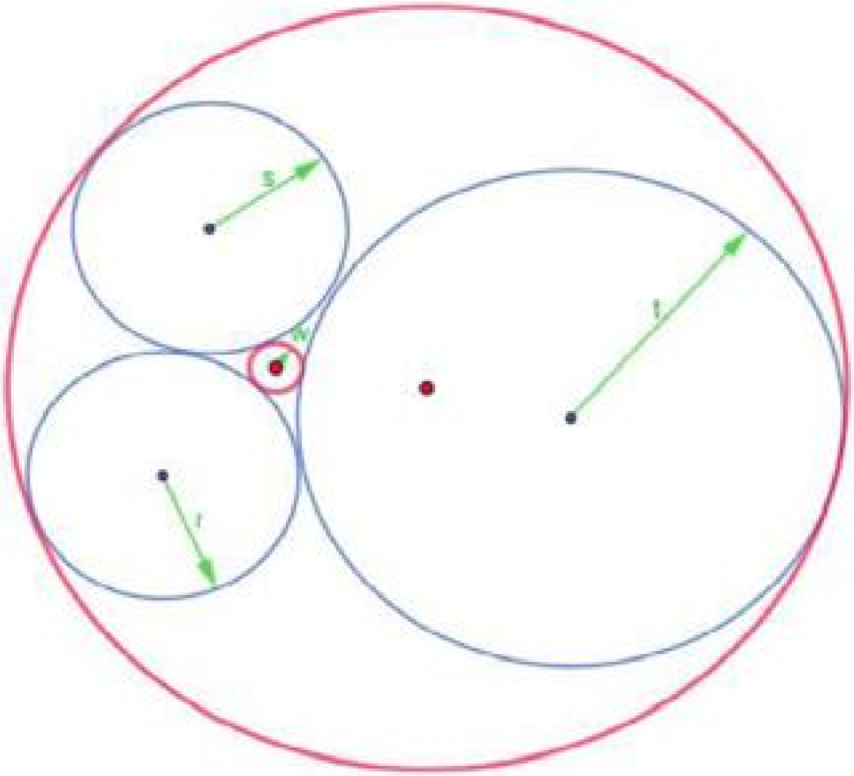
Problema 1: Tres circunferencias tangentes entre sí y a una recta

Está fechado en 1824 en la prefectura (jurisdicciones territoriales de Japón) de Gunma. Su enunciado es el siguiente: “Las tres circunferencias de la figura son tangentes entre sí y a la recta horizontal “t”. Establecer la relación entre sus radios”. En Japón se le conoce por **“Tercer Teorema de Mikami y Kobayashi”**

.



Antes de resolverlo lo comparamos con su “versión occidental”, pues se trata de un caso particular del problema de las circunferencias tangentes de Descartes, que se refiere a calcular la relación de los radios de cuatro circunferencias cada una tangente a las otras tres. En él, Descartes plantea la solución en términos no del valor de los radios de las circunferencias sino de su curvatura (recíproco de su radio). El problema y su solución fueron presentados por Descartes en una carta datada en 1643 y dirigida a la princesa **Elizabet de Bohemia**.



[illegible]

$$\left(\frac{1}{s^2}+\frac{1}{r^2}+\frac{1}{w^2}+\frac{1}{u^2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s}+\frac{1}{r}+\frac{1}{w}+\frac{1}{u}\right)^2$$

Aunque en la formulación de Descartes cada una de esas fracciones es sustituida por su inversa, es decir, por la curvatura de cada circunferencia ($k = \pm\frac{1}{radio}$) que, como vemos, puede ser positiva o negativa y, en muestro caso con la palabra radio, estamos considerando a: "s, r, w, u". Sustituyendo u = ∞, tenemos la situación del problema nº 1 antes propuesto pues, una recta, es una circunferencia de radio infinito o, lo que es lo mismo, curvatura cero.

¿Cómo se resuelve el problema de Mikami y Kobayashi? Bueno..., pues con el Teorema de

$$CD = OF = \sqrt{(r+s)^2 - (r-s)^2} = 2\sqrt{rs}$$

Del mismo modo obtendríamos para los otros pares de circunferencias que:

$$CE = 2\sqrt{rw} \quad \text{y} \quad ED = 2\sqrt{sw}$$

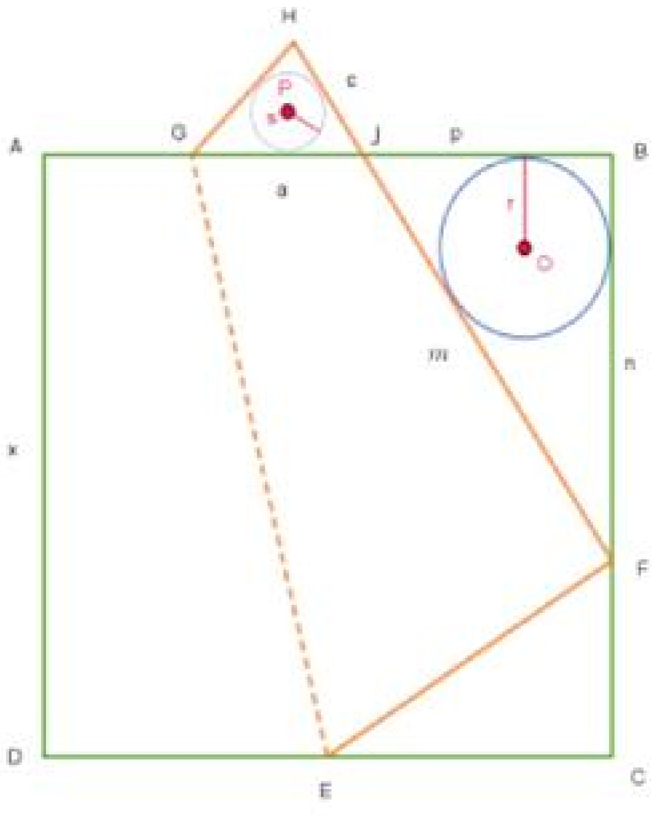
La suma de estos dos últimos es el segmento anterior CD, por lo que tendremos:

$$2\sqrt{rs} = 2\sqrt{rw} + 2\sqrt{sw}$$

Si dividimos por: $2\sqrt{rsw}$, obtenemos:

$$\frac{1}{\sqrt{w}} = \frac{1}{\sqrt{s}} + \frac{1}{\sqrt{r}}$$

[illegible]



[illegible]

$$\frac{m}{a} = \frac{r}{s} = \frac{p}{c}$$

de donde podemos deducir las igualdades:

$$\begin{cases} r\,a = m\,s = s\,(x - c) \\ r\,c = p\,s = s\,(x - a - b) \end{cases}$$

al restar una de otra se obtiene que:

$$r\,(a - c) = s\,(a + b - c) \qquad [1]$$