1. Los juegos como creación de matemáticas.

Los que llevamos mucho tiempo, algunos más de treinta años, utilizando los juegos en nuestras clases de matemáticas, nos hemos encontrado en ocasiones con compañeros que han despreciado la utilización de dicho recurso, por considerar que no estaban en consonancia con la “seriedad” que requiere la investigación y la enseñanza de dicha disciplina. Como si lo lúdico no tuviese cabida en las matemáticas.

Posiblemente, esas personas no sepan la estrecha relación que ha habido, a lo largo de la historia, entre el juego y las matemáticas. En varios casos, las matemáticas han surgido o han evolucionado al calor de los juegos, y normalmente esos juegos han iluminado las mentes más brillantes de esa historia.

Por citar sólo unos breves ejemplos de cómo los aspectos lúdicos han estado siempre relacionados con las matemáticas, basta citar el problema de los bueyes atribuido a Arquímedes, pero también Leonardo de Pisa, más conocido como Fibonacci, planteó muchos problemas numéricos como juegos para animar a su resolución. El científico universal Gotfried W. Leibniz no pudo ser más claro con el comentario en una de sus cartas “Nunca son los hombres más ingeniosos que en la invención de los juegos... Sería deseable que se hiciese un curso entero de juegos, tratados matemáticamente". El, quizás no tan conocido, matemático italiano Leon Battista Alberti publicó en 1542 el libro *Juegos matemáticos,* donde planteaba problemas geométricos y físicos en forma de juegos y situaciones recreativas.

Pero además, hay partes de las matemáticas que han surgido a partir de juegos. Por ejemplo, el genial matemático Leonhard Euler puso los cimientos de la teoría de grafos al estudiar el paseo que realizaban los habitantes de Köninsberg (actual Kaliningrado). La Teoría de Juegos fue desarrollada por el matemático húngaro-estadounidense John Von Neumann, junto al economista alemán Oskar Morgenstern. Esta teoría y su aplicación a la economía le valieron al matemático estadounidense John Nash el Premio Nobel de Economía en 1994.

Pero si hay una parte de las matemáticas que deja clara evidencia de cómo el juego puede servir para, tras su investigación, dar pie a un desarrollo matemático, esa es la probabilidad y el azar. Ya el matemático italiano Gerolamo Cardano (1501 – 1576) escribió el libro *Liber de ludo aleae* , que no fue publicado hasta 1663, donde hacía un estudio de los juegos de azar.

Ese estudio se adelantó casi un siglo a la consulta que hizo el Caballero de Meré a los matemáticos Pierre de Fermat y Blaise Pascal, de cuya correspondencia saldrían las bases para la fundamentación teórica de la probabilidad. Aunque sería el matemático neerlandes Christiaan Huygens el primero en publicar en 1656 un libro sobre probabilidad con el título *De Ratiociniis in Ludo Aleae*
.

Otros muchos matemáticos estudiaron los juegos de azar, como el francés Pierre Rémond de Montmort, que publicó en 1708 la primera edición de *Essai de Analyse sur les jeux de hazards*, en el que dedicaba su segunda parte a los juegos de cartas y la tercera a los juegos de dados.

También el suizo Jakob Bernouilli escribió *Ars Conjectandi*, que no se publicó hasta 1713, ocho años después de su muerte. Y en 1812 se publicó
Théorie analytique des probabilités
de Pierre Simón Laplace con un estudio analítico de los juegos.

Hay muchos más nombres famosos de las matemáticas que han tenido relación con los juegos. Se dice que el alemán Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855) era un gran aficionado a los juegos de cartas, e incluso anotaba cuidadosamente las jugadas en que participaba para estudiarlas posteriormente.

Con esto hemos querido dejar de manifiesto que los grandes nombres de las matemáticas siempre han estado fascinados por las matemáticas que regían los juegos. Pero es que esa fascinación sigue vigente y matemáticos más recientes no sólo han estudiado los juegos, sino que han inventado algunos muy interesantes. Como el que queremos presentar hoy, un curioso solitario con cartas que permite investigar con números.

2. El prolífico Arthur Cayley.

Lo primero es hablar un poco del inventor del juego, ya que no es uno de los nombres que suele sonar a los aficionados matemáticos.

El británico Arthur Cayley (1821 – 1895) está considerado como uno de los fundadores de la escuela de matemáticas puras en su país. Se educó en el conocido Trinity College de Cambridge, donde estudió y fue profesor Isaac Newton, estudiando derecho y matemáticas. Aunque inicialmente ejerció como abogado, desde 1863 fue profesor de matemáticas puras en la Universidad de Cambridge en la cátedra sadleiriana.

Cayley es uno de los matemáticos más prolíficos de la historia, sólo por detrás de Euler y Cauchy, ya que escribió casi mil artículos, lo que equivale a trece volúmenes con toda su obra [i]. Se puede ver que sólo la lista de artículos incluidos en la colección ocupa 68 páginas.

Aunque desarrolló sus estudios en muchas partes de la matemática, es conocido por sus avances en el álgebra lineal. Fue el introductor del concepto de matriz, estudiando sus propiedades y también desarrolló las características y propiedades de los determinantes, siendo quien creó la actual notación. Pero también estudió los invariantes algebraicos o la geometría n-dimensional, o introdujo la noción de grupo abstracto. Además, llegó a la conclusión de que la geometría métrica estaba incluida en la proyectiva, lo que fijó el rumbo para que años más tarde Felix Klein abordara las geometrías no euclídeas.

Descubrió muchos otros elementos, por ejemplo, los octoniones, que son una extensión no asociativa de los cuaterniones y que suelen recibir el nombre de números de Cayley. Aunque hay otros elementos que llevan su nombre como el Grafo de Cayley, un grafo que nuestra la estructura de un grupo. Y muchos teoremas que llevan su nombre en colaboración con otros matemáticos.

Comentar para acabar, que recibió muchos méritos en su país, por ejemplo la Medalla de la Reina, la Medalla de Morgan o la Medalla Copley, de la Royal Society a la que pertenecía, y que en la Luna existe un cráter nombrado en su honor.

En 1857 publicó un pequeño artículo en la revista *Quarterly Journal of pure and Applied Mathematics* con el título “A problem in permutations” donde proponía, en la página 79 del volumen 1 de la revista, el juego La Ratonera (Mousetrap) que presentamos en este artículo.

3. La ratonera.

El juego inventado por Cayley es un solitario que es muy interesante para trabajar el concepto de permutación. Aunque se puede trabajar directamente con números, es mucho más atractivo afrontarlo utilizando cartas tal como lo propuso el creador.

Vamos a proponerlo como nos gusta presentarlo y después veremos sus variaciones.

Tomamos las trece cartas de un palo de la baraja, en el que suponemos que la J tiene el valor de 11, la reina (la Q) valdría 12 y el rey (la K) equivaldría al 13.

Se mezclan las 13 cartas obteniendo una permutación de las treces cartas, y se comienza el juego. Aunque mi amigo Raúl Ibáñez, en el artículo de donde he sacado este juego, plantea jugar con las cartas boca abajo, a mí me gusta más tener la cara de las cartas a la vista.

La dinámica del juego es muy simple. Se comienza a contar por 1 hasta 13, si la carta que tenemos delante no coincide con el número que acabamos de decir, se coloca esa carta detrás del mazo. Si la carta coincide con el número que decimos en ese momento, se deja sobre la mesa y comenzamos a contar de nuevo desde uno con el mazo tal como nos ha quedado. Si en algún momento llegamos a contar 13 y ninguna de las cartas que nos queda en la mano ha coincidido en su momento con el orden que hemos ido contando, la partida se pierde. Solo se gana si se consigue colocar todas las cartas sobre la mesa.

En el planteamiento original de Cayler, las cartas se colocaban formando un círculo. Lo que nosotros hemos propuesto es equivalente pues al colocar las cartas, que no se pueden apartar, detrás del mazo en realidad estamos jugando como si las cartas estuviesen en círculo. El juego se puede plantear para una serie menor de cartas, basta que tengamos n cartas numeradas del 1 al n y realicemos con ellas una permutación.

Veamos un ejemplo utilizando sólo seis cartas. Partimos de la distribución de la imagen siguiente.

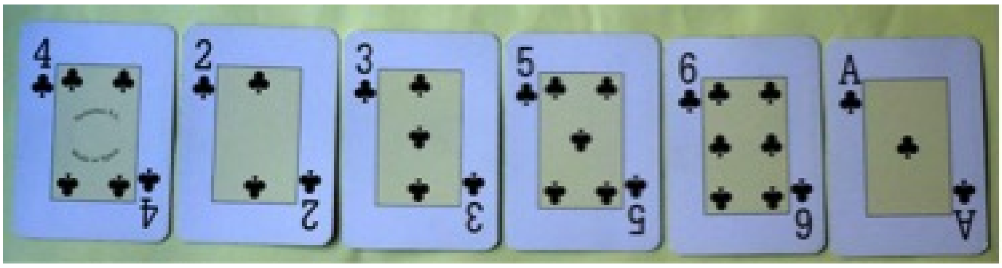

Imagen 1: Permutación de 6 perdedora.

El primer en salir sería el 3, pues al contar 3 nos encontraríamos con esa carta. Nos quedarían las cartas ordenadas como 5 6 1 4 2. Al empezar a contar de nuevo desde uno, el 4 estaría en su lugar correspondiente, luego sería la siguiente carta en salir y la distribución que nos quedaría sería 2 5 6 1 y si de forma cíclica contamos desde 1 hasta 6 ya no podríamos sacar ninguna otra carta, luego hemos acabado la partida y perdido.

Veamos otro ejemplo, ahora con la siguiente distribución de cartas.

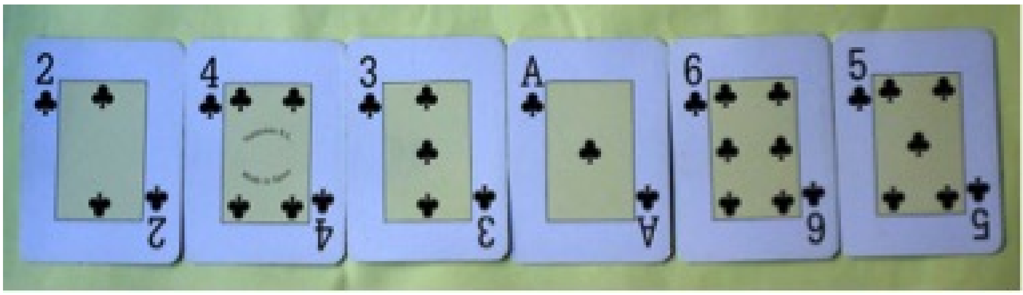

Imagen 2: Permutación de 6 ganadora.

Vamos a colocar una tabla donde veamos las cartas como van saliendo y como queda el orden en el mazo.

Cartas que salen	Orden resultante en el mazo
	2 4 3 1 6 5
3	1 6 5 2 4
3 1	6 5 2 4
3 1 4	6 5 2

3 1 4 5

2 6

3 1 4 5 6

2

3 1 4 5 6 2

Por lo que con esta distribución ganamos la partida.

El planteamiento del juego puede ser, como hemos dicho, como solitario. Tomamos las treces cartas, las barajamos aleatoriamente y comprobamos si el resultado obtenido es ganador o no. Incluso si jugamos varias partidas, ya que son muy rápidas, estudiar en qué proporción ganamos o, por ejemplo, en qué proporción de juegos no podemos separar ni una carta siquiera.

Pero vamos a ver que el estudio da para algo más profundo.

4. Investigación combinatoria.

En el artículo que hemos comentado, en apenas 25 líneas Cayley plantea su juego de cartas, da algunas soluciones y deja una última frase indicando que el juego requiere una teoría general. A Cayley lo que le interesaba era el estudio de qué permutaciones eran ganadoras y cómo encontrar el número de casos en que se descartaban una determinada cantidad de cartas. Por ejemplo, si partimos del mazo con 13 cartas, en cuantas de las 6.227.020.800 permutaciones posibles se consiguen separar 3 cartas. Dado el número de permutaciones posibles podemos suponer que no es un problema fácilmente resoluble sin herramientas matemáticas muy potentes.

Muchos matemáticos han recogido el reto de Cayley y han investigado el juego. El primero el propio Cayley. En la misma revista en que presentó el juego, pero en el volumen 15 de 1878, apareció un nuevo artículo con el título “On the game of Mousetrap” en el que estudiaba todas las opciones para un caso particular de cuatro cartas.

Lo curioso de esta revista, que puede consultarse en internet [ii] , es que incluía un total de 16 artículos del propio Cayley, tratando temas tan diversos como problemas goniométricos, determinantes, superficies cuárticas, función arcoseno de números complejos, etc..

En la misma revista aparecía un artículo del político y matemático Adolph Steen (1816 – 1886) con el título “Some formulae respecting the game of mousetrap” en el que, como indicaba su título, mostraba algunas fórmulas relacionadas con el juego. En ellas estudiaba cuántas permutaciones de n cartas cumplían que la primera carta en salir era una determinada de antemano, por ejemplo la j, siendo $1 \leq j \leq n$, y otras fórmulas similares.

En este artículo había algunos errores que se corrigieron en 1993 en el artículo “Mousetrap” [iii] publicado en el volumen 1 de la revista *Combinatorics, Paul Erdős is Eighty* por el británico Richard Guy y el canadiense Richard Nowakowsky. También en el artículo de 1994 publicado por Daniel Mundfrom, de la Universidad de Kentucky Oriental, con el título “A problema in permutations: the game of Mousetrap” [iv] y aparecido en la revista *European Journal of Combinatorics* .

Pero el juego ha seguido interesando a los matemáticos. En 2009 el informático británico Michael Spivey publicó, en la última revista anterior, el artículo “Staircase rook polynomials and Cayley's game of Mousetrap” [v] , en el que estudia polinomios que calculan la cantidad de permutaciones en que se elimina una carta determinada o una pareja de cartas determinadas.

El estudio de las permutaciones que son ganadoras, o que permiten separar alguna carta, es fácil para pocos valores. En el segundo artículo de Cayley sobre La Ratonera, del que hemos hablado en este epígrafe, el propio creador del juego hace un estudio de completo de las soluciones que podemos obtener con cuatro cartas, podemos verlo en la siguiente imagen extraída de la revista *Quarterly Journal of pure and Applied Mathematics.*

On the Game of Mousetrap. 9

case of four cards, the different arrangements, with the cards thrown out in each are

1, 2, 3, 4	1,
1, 2, 4, 3	1, 3, 4, 2,
1, 3, 2, 4	1,
1, 3, 4, 2	1,
1, 4, 2, 3	1, 2, 3, 4,
1, 4, 3, 2	1,
2, 1, 3, 4	3, 4,
2, 1, 4, 3	—
2, 3, 4, 1	—
2, 3, 1, 4	4,
2, 4, 1, 3	—
2, 4, 3, 1	3, 2,
3, 1, 2, 4	4,
3, 1, 4, 2	—
3, 2, 1, 4	4, 2, 1, 3,
3, 2, 4, 1	2, 3,
3, 4, 1, 2	—
3, 4, 2, 1	—
4, 1, 2, 3	—
4, 1, 3, 2	3,
4, 2, 1, 3	2, 1, 3, 4,
4, 2, 3, 1	3, 1, 2, 4,
4, 3, 1, 2	—
4, 3, 2, 1	—

or, classifying these so as to show in how many arrangements a given card or permutation of cards is thrown out, we have the table

No.	Thrown out.
9	none
4	1
1	3
2	4
1	3, 2
1	2, 3
1	3, 4
1	1, 3, 4, 2
1	1, 2, 3, 4
1	4, 2, 1, 3
1	2, 1, 3, 4
1	3, 1, 2, 4,
24	

VOL. XV. C

Imagen 3: página del artículo de Cayley

cartas puede apreciarse que hay 9 permutaciones en las que no se puede extraer ninguna carta.

5. La sucesión A007709.

En 1964 el matemático británico-estadounidense Neil Solane creó la base de datos OEIS [vi] , iniciales en inglés de la Enciclopedia On-line de Secuencias de números Enteros. Aunque no sé el dato actualizado, hace dos años el número de sucesiones y series incluidas en la base de datos sobrepasaba las 300.000. Cualquier persona puede incluir una secuencia numérica de enteros que no esté incluida, si es que la encuentra.

En esa base de datos existen un total de 27 resultados relacionados con el juego Mousetrap.

Entre ellas, podemos citar la sucesión A007709, incluida por el propio Sloane, que nos da el número de combinaciones ganadoras en el juego según el número de cartas. Esa sucesión es:

1, 1, 2, 6, 15, 84, 330, 1812, 9978, 65503, 449719, 3674670, 28886593, 266242729, 2527701273, 25749021720

Los primeros números son fáciles de comprobar.

Si tenemos una sola carta, hay una sola permutación, el 1, que es ganadora.

Si tenemos dos cartas, tenemos dos posibles permutaciones 1 2 ó 2 1, de la que la primera sería la solución.

Si tenemos tres cartas, las soluciones ganadoras posibles son 1 3 2 y 3 2 1.

Para cuatro cartas, tenemos la solución en el artículo de Cayley que vimos en la imagen 3.

Para cinco cartas, las permutaciones que separan todas las cartas son las siguientes:

1, 2, 5, 3, 4

1, 3, 2, 5, 4

1, 5, 2, 4, 3

1, 5, 4, 2, 3

1, 5, 4, 3, 2

2, 1, 3, 5, 4

2, 1, 5, 4, 3

2, 5, 1, 4, 3

2, 5, 3, 1, 4

3, 2, 1, 5, 4

4, 1, 3, 5, 2

4, 2, 3, 5, 1

4, 2, 5, 1, 3

5, 2, 1, 4, 3

5, 4, 3, 1, 2

La serie A002467, también de Sloane, nos da el número de permutaciones que permiten separar al menos una carta. Él la plantea colocando n cartas y n sobre numerados y da el número de soluciones en el que, al menos 1 de las cartas está en el sobre con su número. Esta sucesión comienza por los números.

1, 1, 4, 15, 76, 455, 3186, 25487, 229384, 2293839, 25232230, 302786759, 3936227868, 55107190151, 826607852266

Si restamos esos valores del número de permutaciones posibles según el número n: 1, 2, 6, 24, 120, 720, etc… nos daría el número de permutaciones en donde no se separa ninguna carta. Esto ocurre, lógicamente, en aquellos casos en que en la permutación de partida no hay ninguna carta en su lugar correspondiente.

Para terminar, citar la serie A028305, también de Sloane, en el que aparece un triángulo numérico en el que aparecen el número de permutaciones en las que se pueden sacar desde 0, 1, 2,… hasta n cartas. Por ejemplo, en la cuarta fila del triángulo nos encontramos con los valores 9, 6, 3, 0, 6 que corresponden a los que vimos en el segundo artículo de Cayley.

6. La permutación ganadora óptima.

Dentro de las permutaciones ganadoras, aquellas que permiten separar todas las cartas, ha habido una que siempre ha interesado a los matemáticos y es aquella en que las cartas salen en su orden lógico, es decir, la primera carta en salir es el 1, la segunda el 2, la tercera el 3 y así hasta la última que sería la n, si estamos jugando con n cartas.

El propio Arthur Cayley, en el artículo donde presentaba el juego en 1857, incluía las permutaciones ganadoras óptimas desde una hasta ocho cartas. Eran las siguientes:

1

1 2

1 3 2

1 4 2 3

1 3 2 5 4

1 4 2 5 6 3

1 5 2 7 4 3 6

1 6 2 4 5 3 7 8

Para conseguir encontrar de qué permutación debemos partir para obtener al final las cartas ordenadas no es necesario estudiar todos los casos si no que es más fácil utilizar métodos de resolución de problemas para lograrlo. En concreto, podemos hacer el camino contrario suponiendo el problema resuelto hasta llegar al punto de partida. Vamos a verlo para encontrar cuál sería la permutación de nueve cartas que daría el orden natural en la extracción de cartas.

9

La última carta a sacar debe ser la 9, pero no hay problemas pues basta contar hasta nueve para que

9 8

La anterior debe ser la 8. Como habrá dos cartas sólo, tendremos una en la posición impar y otra en la

7 9 8

Cuando nos quede también la 7, tendremos tres cartas, luego deberemos contar cíclicamente dos vec

8 6 7 9

Al añadir la 6 y tener, por tanto, cuatro cartas, deberemos dar una vuelta completa y en la siguiente en

8 6 7 9 5

Al incluir el 5 y tener cinco cartas, el 5 va precisamente en la posición 5, sin afectar al orden de las de

7 9 5 4 8 6

El 4 debe ir en la posición cuarta para salir y debe llevar delante tres cartas que, al aplicar el juego, de

8 6 3 7 9 5 4

Lo que se ha hecho con el 4 se repite con el 3, que debe ir en la tercera posición y llevar delante las d

4 2 8 6 3 7 9 5

Hacemos lo mismo con el 2, en este caso sólo la última carta del paso anterior debe ir delante.

1 4 2 8 6 3 7 9 5

Y el último paso es el más simple, pues la carta 1, yendo en la primera posición será la primera en sal

Luego, para nueve cartas, la permutación que permite obtener todas las cartas en orden sería 1 4 2 8 6 3 7 9 5.

Pero hay otro método que permite hallar cuál es la permutación ganadora óptima de la que debemos partir. Para ello, suponemos que partimos de la permutación genérica dada por *a b c d e f g h i* y vemos en qué orden deben salir las cartas y a qué letra corresponden. En la siguiente tabla tenemos el proceso.

Valor que sale	Orden que queda
a = 1	b c d e f g h i
c = 2	d e f g h i b
f = 3	g h i b d e

b = 4

d e g h i

i = 5

d e g h

e = 6

g h d

g = 7

h d

d = 8

h

h = 9

Por tanto, para ganar ordenadamente, la permutación inicial es: 1 4 2 8 6 3 7 9 5 como vimos antes.

Si se encuentra con ganas, nuestro lector puede utilizar uno de los dos métodos para hallar la permutación inicial deseada y puede comprobarla con las siguientes soluciones para 10, 11, 12 y 13 cartas

1 9 2 9 7 3 10 5 6 4

1 10 2 9 6 3 5 8 7 4 11

1 6 2 7 5 3 11 12 8 4 9 10

1 8 2 5 10 2 12 11 9 4 7 6 13

7. Y algo más con lo que jugar.

Una vez practicado el juego y visto en qué casos se gana y en cuáles no, hay una serie de cuestiones que se pueden plantear y que cualquier alumno, que haya entendido el juego, está en disposición de investigar. Veamos algunas de ellas.

a) ¿Qué ocurre con el juego si partimos con n cartas y conseguimos sacar n – 1 cartas?

La respuesta es evidente, que se ha ganado en el juego pues al quedar una sola carta, basta contar hasta su número para que también podamos descartarla. Por eso, en la serie A028305 de la que hablamos antes, en todas las filas del triángulo el penúltimo número siempre es cero. Es decir no puede haber ninguna permutación de n cartas en las que sólo podamos extraer n – 1 cartas.

b) Dado que en todos los casos de n cartas podemos encontrar en qué permutación se obtiene que las cartas extraídas siguen el orden natural, ¿es posible encontrar una permutación que al extraer las cartas queden en orden inverso al natural, es decir que queden en el orden n, n – 1, n – 2, ….., 2, 1?

La respuesta también es fácil de deducir. No es posible conseguir el orden inverso pues si la primera carta que se extrae es la que tiene el valor n quiere decir que hemos tenido que llegar hasta el lugar n para extraer la primera carta y, por ello, las anteriores no está ninguna en su lugar adecuado y como ese orden no cambia al extraer la última, ya no podríamos extraer ninguna más.

Podemos comprobarlo en la imagen 3 con las soluciones de Cayley, aquellas permutaciones en las que el primero en salir es el 4, ya no se puede sacar ninguna carta más.

c) Una vez que hemos visto cómo conseguir una permutación a partir de una solución, como hemos hecho en el epígrafe anterior, se pueden plantear retos en esa línea. Por ejemplo, encontrar la permutación original que al extraer las cartas nos da el orden de extracción el siguiente: 5 2 6 1 3 4.

Siguiendo el razonamiento del epígrafe anterior obtendríamos la permutación inicial 2 4 6 1 5 3.

Se podría plantear como juego inverso a la ratonera. Elegir una permutación aleatoria de n números y buscar la permutación de partida. El problema es que no toda permutación de n elementos se puede conseguir en el juego de La Ratonera. Por ejemplo, si en lugar de partir de la permutación anterior planteamos la distribución 5 2 6 1 4 3 nos encontramos con que no hay solución pues el último en salir debe ser el 3, si el siguiente en salir debe ser el 4, la distribución, en ese momento, sería 3 4, pero en esa distribución sale primero el 3 y luego el 4, no al revés.

d) Una vez visto el juego y su desarrollo tanto en la forma normal como en la inversa, podemos trabajar con números más grandes de 13 pues ya no trabajaríamos con cartas y así podríamos trabajar con permutaciones de 20 números naturales.

e) Otra investigación sería trabajar con números que no sean consecutivos. Por ejemplo, con los números impares de una cifra y deberíamos buscar permutaciones que sea ganadoras, por ejemplo, la 5 7 3 1 9 cuya solución es 3 1 5 7 9.

Los matemáticos, antes citados, Richard Guy y Richard Nowakowski plantearon en, el libro de Guy, *Unsolved Problems in Number Theory* de 1981 un versión que llamaron ratonera modular [vii]
, en la que, una vez terminado de contar hasta n sin conseguir extraer ninguna carta más, se vuelve a comenzar desde 1 hasta que se consigan eliminar todas las cartas o se llegue a un bucle infinito. Con esta versión, si repasamos los casos que estudió Cayley en su segundo artículo y en los que se extraía alguna carta, pero no se conseguía ganar, tendríamos, con este método, los siguientes resultados.

Original
Método Cayley
Ratonera modular
{1, 2, 3, 4}
{1}

{1, 2, 3, 4}

{1, 3, 2, 4}

{1, 2}

{1, 2}

{1, 3, 4, 2}

{1}

{1, 2, 3, 4}

{2, 3, 1, 4}

{4}

{4, 1}

{3, 1, 2, 4}

{4}

{4, 1}

{3, 2, 1, 4}

{2, 1}

{2, 1}

{3, 2, 4, 1}

{2, 3}

{2, 3}

{4, 1, 3, 2}

{3}

{3, 4, 1, 2}

{4, 2, 3, 1}

{2}

{2, 1}

Como es lógico, aquellas permutaciones en las que en una primera vuelta no se ha podido sacar ninguna carta, no sufren variación aunque se aplique el método modular. En los cálculos anteriores (donde puede haber algún error, como en todo lo anterior cuando a uno ya le varían los números) se ha utilizado la fórmula modular contando siempre de 1 a 4, incluso en los casos en que ya ha salido el 4.

En el libro Guy y Nowakowski estudiaron diversas posibilidades y demostraron que si n es un número primo entonces solo hay dos tipos de permutaciones, ganadoras o desarreglos, es decir que no podemos quitar ninguna.

Si consideramos la ratonera modular para tres cartas obtenemos los siguientes resultados.

Inicial

{1, 2, 3}

{1, 3, 2}

{2, 1, 3}

{2, 3, 1}

{3, 1, 2}

{3, 2, 1}

Resultado

[1, 2, 3]

[1, 2, 3]

[3, 1, 2]

[–]

[–]

[2, 1, 3]

En el artículo de Raúl Ibáñez donde encontré el juego, se cita otro modo de jugar de forma modular. El reto es jugar con varias copas de las 13 cartas, por ejemplo, con dos palos completos o con las 52 cartas de la baraja de póker. Por si alguien tiene interés en dedicarle tiempo, yo ahí lo dejo.

Para acabar sólo comentar que en el planteamiento del juego inicial siempre se ha propuesto trabajar con una baraja francesa, pero como lo suyo es estudiar permutaciones de números, es perfectamente posible trabajar con una baraja española, a ser posible de 48 cartas, es decir, con 8 y 9. La mayoría de lo presentado en este artículo funciona exactamente igual con ella.

Sí quiero dejar un último consejo. Aunque se puede trabajar directamente con las permutaciones de números, es aconsejable comprobar los resultados obtenidos utilizando las cartas, ya que por experiencia sé que no es raro que algún número baile sin darnos cuenta.

8. Referencias bibliográficas.

Creo que no dispongo de ningún libro donde se cite el juego, por lo que toda la información está extraída de internet y algunos de los resultados son de elaboración propia. Aparte de los artículos originales cuya referencia están en las notas finales, el artículo donde encontré el juego y la principal información, repetida en el resto de artículos en español que he encontrado, es:

Ibáñez, Raúl (2017): *La ratonera, el juego de Cayley*. Consultado el 06/04/2020

https://culturacientifica.com/2017/01/25/la-ratonera-juego-cayley/

Aunque he utilizado poco de ese material, la biografía más extensa y detallada sobre Arthur Cayley la he encontrado en la página de biografías de la Universidad de St. Andrews.

http://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Cayley.html

Notas:

[i] En la página de *Internet Archive* se pueden consultar los 13 volúmenes de "The collected mathematical papers of Arthur Cayley". Por ejemplo, en la siguiente dirección accedemos a la lista de artículos incluidos en la compilación https://archive.org/details/collectedmathem17caylgoog/page/n3/mode/2up/search/cayley+mousetrap?q=cayley+mousetrap .

En Internet se pueden encontrar también, en otros lugares, ejemplos en pdf de algunos de sus artículos. Por ejemplo, en la página de la Universidad de Michigan hay en pdf 100 artículos publicados entre 1841 y 1851. La lista de páginas está en https://quod.lib.umich.edu/cgi/t/text/text-idx?c=umhistmath;idno=ABS3153.0001.001 .

En otra página hay un volumen entero de la colección el VIII. Incluye unas abundantes notas biográficas del autor. Se puede consultar en: https://geographiclib.sourceforge.io/geodesic-papers/cayley-V8.pdf . No he conseguido localizar en la misma página más volúmenes salvo el VII para el que basta sustituir en la dirección al final V8 por V7.

[ii] En la página de la Universidad de Göttingen puede consultarse la revista y, teóricamente, descargarse en pdf sin otros requerimientos, pero al intentarlo suele dar error.

https://gdz.sub.uni-goettingen.de/id/PPN600494829_0015?tify={%22pages%22:[3],%22view%22:%22export%22}

[iii] El artículo está en pdf en la dirección: https://oeis.org/A002467/a002467_1.pdf .

[iv] Abstract en la dirección https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0195669884710572?via%3Dihub

[v] Se puede descargar desde la dirección http://www.math.ups.edu/~mspivey/MousetrapFinal2.pdf .

[vi] https://oeis.org/?language=spanish

[vii] En la siguiente dirección se da información sobre opciones de la ratonera modular y, aunque no está muy actualizado, podemos encontrar información interesante. http://www.dmmm.uniroma1.it/~alberto.bersani/mousetrap.html