Escrito por Carmen Arriero e Isabel García
Lunes 01 de Noviembre de 2004 16:48

Introducción

Los problemas de optimización de funciones se estudian como una aplicación del cálculo diferencial. Generalmente este tipo de problemas suelen estar contextualizados, por lo que nos sirven de ejemplo para mostrar, una vez más, la utilidad que tienen las matemáticas

En general, las dificultades que surgen en este tipo de problemas son por un lado la comprensión del enunciado y su planteamiento matemático y por otro la interpretación de los resultados en el contexto del problema.

La resolución de los problemas de optimización de funciones con Derive ayuda a mejorar las dificultadas antes mencionadas. Así, la utilización de varios métodos (algebraico y gráfico) para la resolución de un problema ayuda a su comprensión. Además resolver gráficamente estos problemas permite observar de forma conjunta el comportamiento de la función así como el de su función derivada para diferentes valores de la variable independiente y distinguir entre el valor de la variable que optimiza la función y el valor óptimo de la función.

Asimismo, el modo gráfico favorece la comprensión de los conceptos extremo relativo y extremo absoluto de una función.

El refresco

Se quiere fabricar latas de refresco cuyo contenido sea de 33 cl, de manera que el coste de la chapa sea mínimo. Halla las dimensiones que ha de tener la lata, es decir, el radio y la altura. Calcula también el valor de la superficie de chapa mínima.

Solución

Como se indica en la figura consideremos que **x** es el radio de la base y

h
su altura

La función a minimizar es la superficie del cilindro, cuya expresión viene dada por:

$S(x,h) := 2 \cdot \pi \cdot x^2 + 2 \cdot \pi \cdot x \cdot h$

Para resolver el problema se debe encontrar la fórmula de la superficie del cilindro en función de una sola variable. Dado que el volumen del cilindro es conocido esto nos permite relacionar el radio y la altura:

$1000/3 = \pi \cdot x^2 \cdot h$

SOLVE[$1000/3 = \pi \cdot x^2 \cdot h$, h, Real]

$h = 1000 / (3 \cdot \pi \cdot x^2)$

Sustituyendo el valor de **h** en la fórmula de la superficie, se obtiene:

Como la función S(x) es continua y derivable para valores de x > 0, para obtener el valor de x que minimiza la función se resuelve la ecuación S'(x) = 0

Gráficamente

Se representan simultáneamente las funciones S(x) y S'(x) para valores positivos de x y se comprueba que el valor mínimo de S(x) se alcanza para el valor de x que anula la primera derivada.

Además la gráfica nos da información acerca del valor mínimo de S(x), es decir, la superficie que minimizaría el coste de la chapa utilizada.

Algebraicamente

Para comprobar que la función alcanza un mínimo relativo en este valor de x, hay que averiguar el signo de la segunda derivada de dicha función en este punto.

Como el signo de la derivada segunda es positivo, se puede afirmar que la función S(x) alcanza un mínimo relativo en este valor de x.

Para conocer la altura, **h**, del cilindro se sustituye el valor de x en la expresión que relaciona ambas variables.

Por tanto, las dimensiones aproximadas de la lata de refresco para que la chapa empleada sea mínima son:

Radio de la

Altura = h = 7.52 cm

La superficie de la chapa utilizada es de S = 266.13 2