Escrito por Guillermo Martínez
Lunes 01 de Junio de 2009 11:18

Artículo de Guillermo Martínez, publicado recientemente en La Nación.
Hay un blog www.godelparatodos.blogspot.com dedicado a reflexionar sobre el libro, incluir bibliografía on line y otras lecturas recomendadas, material gráfico, entrevistas,…

El teorema de incompletitud de Gödel es uno de los resultados más profundos y paradójicos de la lógica matemática. Es también, quizá, el teorema que ha ejercido más fascinación en ámbitos alejados de las ciencias exactas. Autores como Lacan, Kristeva, Deleuze, Lyotard, Debray, y muchos otros han invocado a Gödel y sus teoremas en arriesgadas analogías. Junto con otras palabras mágicas de la escena posmoderna como “caos”, “indeterminación”, “aleatoriedad”, el fenómeno de incompletitud se ha asociado también a supuestas derrotas de la razón y al fin de la certidumbre en el terreno más exclusivo del pensamiento: el reino de las fórmulas exactas. Pero qué dice (y qué no dice) el teorema de Gödel

El teorema de Gödel trata de la distancia, y la diferencia, entre la verdad en matemática y la parte de verdad que puede demostrarse a partir de axiomas, en esos textos con fórmulas y pasos lógicos encadenados que los matemáticos llaman *demostración*. En otras disciplinas es claro que lo verdadero no necesariamente coincide con lo demostrable. Basta pensar en un crimen en un cuarto cerrado con dos únicos sospechosos junto al cadáver. Cada uno de estos dos sospechosos sabe toda la verdad sobre el crimen, que puede resumirse en la frase “Yo fui” o “Yo no fui”. Sin embargo, si el juez no dispone de la confesión directa del culpable, debe intentar un camino indirecto: recolección de evidencias materiales, verificación de horarios y coartadas, etcétera.

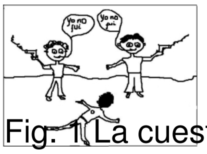

Fig. 1 La cuestión de lo demostrable empieza cuando los dos dicen “Yo no fui”.

Muchas veces este camino indirecto no alcanza a demostrar, de acuerdo con los estrictos requisitos legales, ni la culpabilidad de uno ni la inocencia del otro. También en la arqueología hay una obvia distancia entre la verdad (las costumbres y rituales de una civilización extinguida tal como fueron) y la parte de verdad que puede ser reconstruida a partir de hallazgos en las excavaciones. Sin embargo, en su disciplina, los matemáticos siempre pensaron -por lo menos hasta el siglo XIX- que los mundos de lo verdadero y lo demostrable eran identificables, y que cualquiera fuera la verdad que pudieran observar en el cielo platónico de los objetos matemáticos (cierto orden, ciertas conexiones, cierto patrón de regularidad), esa verdad podría reobtenerse “por escrito” mediante el método axiomático, como tesis de una demostración.

A principios del siglo XX hubo una crisis en los fundamentos de la matemática, a partir de una paradoja que descubrió Bertrand Russell en la teoría de conjuntos. El propio Russell, por un lado, y David Hilbert, por otro, se propusieron entonces la tarea de reconstruir todo el edificio de la matemática a partir de axiomas indudables, y de una teoría de la demostración "segura" que permitiera chequear y reobtener todas las pruebas matemáticas sin necesidad de recurrir a la inteligencia, por métodos puramente mecánicos. El programa formalista de Hilbert tenía el objetivo de refundar la matemática a partir de la teoría más elemental (y más probada en la historia): la *aritmética*, esto es, los números que usamos para contar, con las operaciones habituales de suma y multiplicación, tal como se aprenden en la escuela primaria.

Hilbert se proponía, por un lado, dar axiomas que permitieran obtener, via demostraciones "seguras", todos los enunciados verdaderos de la aritmética. La coronación de su programa sería dar una prueba también "segura" de consistencia para la aritmética, que alejara para siempre la posibilidad de volver a encontrar las temidas paradojas y contradicciones. Hasta 1930 estaba trabajando en esta última demostración. Pero en 1931, el teorema de Gödel dio por tierra con sus esperanzas:

Gödel probó que *cualquiera fuera el sistema de axiomas que se propusiera para la aritmética, si ese sistema era consistente (es decir, si no llevaba a contradicciones) había enunciados verdaderos que no podían ser demostrados por el sistema* .

Es decir, el teorema de Gödel replica la situación del crimen con dos sospechosos: para cada sistema axiomático propuesto para la aritmética, hay enunciados que, por la exigencia del protocolo fijado, el sistema no puede ni probar ni refutar.

El teorema de Gödel destruyó una por una todas las esperanzas de Hilbert: en primer lugar mostró la imposibilidad de fundar toda la aritmética sobre axiomas. Aún peor, uno de los enunciados no demostrables exhibidos por Gödel fue, justamente, la propiedad de consistencia, lo que liquida también el plan de Hilbert de dar una fundamentación última y absoluta para la matemática a partir de la aritmética. Como una última ironía, la demostración dada por Gödel para su teorema sí es perfectamente "segura" y cumple todos los requisitos formales.

Por qué el teorema de Gödel interesó (y debe interesar) fuera de la matemática

El fenómeno de incompletitud que descubrió Gödel pronto interesó a diversas disciplinas de las ciencias sociales. Bien mirado, es muy razonable que así sea: los distintos campos del conocimiento, las distintas doctrinas, las distintas ideologías, tienen un aire de familia con los sistemas axiomáticos. En cada disciplina hay algunos “primeros principios”, declarados o encubiertos, que vertebran y dan curso a las argumentaciones lógicas a partir de ellos. La filosofía del materialismo postula que existe la materia y que la conciencia es sólo un estado de organización y evolución posterior. El idealismo sostiene un orden de primacía inverso. Descartes intentó un cuidadoso camino “hacia atrás” para llegar a una verdad indudable y desarrolló su pensamiento a partir de su único y famoso axioma: *Pienso, luego existo*. El primer axioma del psicoanálisis es la existencia del inconsciente. Y la teoría política tiene como axioma la lucha de clases, que las teorías de la social-democracia consideran posible de armonizar y las teorías revolucionarias postulan como irreconciliable. Aún en escuelas de pensamiento contrapuestas, una vez fijados y determinados estos primeros principios, muchas veces antagónicos, hay un modo similar de devanar argumentos, un protocolo lógico que hasta cierto punto se comparte. De manera que la forma en que se expresa el conocimiento en diversos campos tiene algo del mecanismo de los sistemas axiomáticos: unos pocos principios “duros” y firmemente asentados y una devanación de argumentos que justifican todas las demás afirmaciones en base a esos primeros postulados. No es extraño entonces que la clase de limitación para los sistemas formales que marca el teorema de Gödel haya hecho reflexionar a otros pensadores sobre los fundamentos de sus propias disciplinas. Sin embargo, muchas veces, las extrapolaciones apresuradas y las analogías demasiado ligeras han llevado a conclusiones tremendistas, erróneas, a veces incluso risibles.

Dentro de nuestro libro analizamos y discutimos diversos intentos de extrapolación del teorema de Gödel en otros ámbitos: Julia Kristeva en la semiología, Deleuze y Guattari en la filosofía, Régis Debray en la política, Jean-François Lyotard en la epistemología, Jacques Lacan en el psicoanálisis.

Lacan y una analogía arriesgada

Nos detenemos en particular en el caso de Lacan, porque invoca en sus lecciones reiteradamente el teorema de Gödel, no sólo para su definición de lo Real (dentro de su tríada de lo Real, lo Imaginario y lo Simbólico) sino también para una analogía que tiene consecuencias directas en la práctica psicoanalítica. Lacan afirma que la experiencia del análisis instaura un discurso con una estructura lógica. Y solamente con esto infiere, a través de la analogía con el resultado de Gödel, que en ese discurso habrá “fallas” o aberturas lógicas, donde estaría lo que “puede salir del lenguaje”. Dentro de la analogía, estas fallas se corresponderían con los enunciados indecidibles que quedan fuera del alcance de los sistemas propuestos para la aritmética. Y son sobre todo estas fallas, enfatiza, el modelo “de lo que debe interesar a los analistas”.

Sin embargo, Lacan parece desconocer que dentro de la matemática hay también muchas teorías que *sí son completas* (como la teoría de los números complejos y varios otros ejemplos que damos en nuestro libro), teorías en las que todo lo verdadero es demostrable, no hay “fallas” y nada “se sale del lenguaje”. Incluso, algunas de estas teorías completas parecen en principio más apropiadas que la aritmética para modelar discursos lógicos. Es decir, el fenómeno de incompletitud convive en la matemática con el fenómeno de completitud. Pero Lacan nunca justifica con argumentos *propios de la teoría psicoanalítica* por qué el discurso lógico que proviene del análisis se asemejaría más a la aritmética elemental que a una de estas tantas otras teorías completas. Esta cuestión es crucial porque, tal como está planteada, la elección de Lacan a favor de la aritmética parece totalmente arbitraria: un ejemplo elegido *ad hoc* para dar visos de argumentación a lo que parece en el fondo más bien un acto de fe.

Por qué y cómo escribimos este libro

Justamente, lo que nos intrigó a nosotros cuando estudiamos en profundidad la demostración original de Gödel, es detectar el elemento matemático que permite “dividir aguas” entre las teorías completas e incompletas. Ambos fenómenos, como dijimos, conviven en la matemática, y hay ejemplos curiosos de teorías matemáticas en apariencia muy parecidas entre sí que resultan una completa y otra incompleta. ¿Podría aislarse exactamente un hecho matemático, un síntoma, siempre presente, que diera lugar a la incompletitud?

Durante más de cuatro años nos reunimos una vez por semana, en un café de Cabildo y Lacroze, para pensar sobre esto, para analizar distintos ejemplos e imaginar y refinar conjeturas. El café en algún momento cerró y nosotros todavía seguíamos descendiendo a los niveles más abstractos de la prueba, como un juguete que desarmábamos incesantemente de todas las formas posibles, pero que se negaba a revelar su mecanismo secreto. Finalmente encontramos, en lo más íntimo de los argumentos, ese único hecho que pone en marcha toda la maquinaria de la demostración de Gödel y revela la *razón matemática* por la que la aritmética es incompleta (ver recuadro). Era tan nítido, tan elegante, tan *elemental*, que inmediatamente pensamos: ¡tenemos que contarlo! Nos dimos cuenta, sobre todo, de que a partir de este hecho podíamos reescribir la demostración del teorema de Gödel de manera que cualquiera que hubiera terminado el colegio primario podría entenderla. Pero por qué no, entonces, nos preguntamos, escribir un libro que pusiera al alcance de todos no sólo las ideas principales detrás del teorema, con sus alcances e implicaciones filosóficas, sino también una demostración accesible, con todos los detalles. Durante todo otro año escribimos *Gödel (para todos)* con un escalonamiento muy cuidadoso, para que cada lector pueda llegar tan lejos como se lo proponga. Lo concebimos como un juego por etapas, con la esperanza de que los lectores se desafíen a sí mismos a pulsar *enter* al final de cada capítulo para pasar al próximo nivel. El juego empieza realmente desde cero. Y el premio es una de las más grandes hazañas de la inteligencia humana, que cruza de lado a lado el pensamiento contemporáneo.