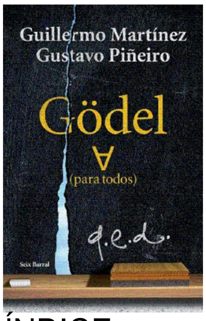

ÍNDICE

La demostración de los teoremas.

- **HOJA DE RUTA:**
  La concatenación y el Teorema de Incompletitud.
  Si hay una concatenación expresable, valen los teoremas de Gödel.
- **CAPÍTULO CINCO:**
  La versión semántica del teorema de incompletitud.
  La concatenación con punto y raya. Método de autorreferencia. “Ser verdadero” no es expresable.
  Ejercicios.
- **CAPÍTULO SEIS:**
  La versión general (sintáctica) del teorema de incompletitud. El teorema de consistencia.
  La versión general (sintáctica) del teorema de incompletitud. El Teorema de Consistencia.
  Ejercicios.
- **CAPÍTULO SIETE:**
  Hay una concatenación expresable en la aritmética.
- **CAPÍTULO OCHO:**
  Toda propiedad recursiva es expresable con la concatenación.

TERCERA PARTE

Incompletitud en un contexto general y abstracto.

- **CAPÍTULO NUEVE:**
  Incompletitud en un contexto general y abstracto.
  Una demostración intrínseca del Teorema de Gödel. La concatenación y el argumento de Gödel. Conclusiones y preguntas abiertas.
  Resolución de los ejercicios.
- **APÉNDICE I:**
  Ejemplos de teorías completas e incompletas.
- **APÉNDICE II:**
  Hitos en la historia del teorema de incompletitud.
- **Referencias:**
- **Lecturas recomendadas:**

INTRODUCCIÓN

El teorema de incompletitud de Gödel es uno de los resultados más profundos y paradójicos de la lógica matemática. Es también, quizá, el teorema que ha ejercido más fascinación en ámbitos alejados de las ciencias exactas. Ha sido citado en disciplinas tan diversas como la semiótica y el psicoanálisis, la filosofía y las ciencias políticas. Autores como Kristeva, Lacan, Debray, Deleuze, Lyotard, y muchos otros, han invocado a Gödel y sus teoremas en arriesgadas analogías. Junto con otras palabras mágicas de la escena postmoderna como "caos", "fractal", "indeterminación", "aleatoriedad", el fenómeno de incompletitud se ha asociado también a supuestas derrotas de la razón y al fin de la certidumbre en el terreno más exclusivo del pensamiento: el reino de las fórmulas exactas. Pero también desde el interior de la ciencia se esgrime el teorema de Gödel en agudas controversias epistemológicas, como la que rodea las discusiones sobre inteligencia artificial. Surgido casi a la par de la Teoría de la Relatividad, y de manera quizá más sigilosa, el teorema de Gödel se ha convertido en una pieza fundamental y una referencia ineludible del pensamiento contemporáneo.

Pero a diferencia de la teoría de Einstein, en que por la sofisticación de las ecuaciones los mejores intentos de divulgación parecen condenados a ejemplos con relojes y personas que no envejecen en viajes por el espacio -la clase de divulgación que arrancó la conocida broma de Sabato [1] -, en el caso del teorema de incompletitud hay una buena noticia, y es que puede darse una exposición a la vez rigurosa y accesible, que no requiere ninguna formación matemática, más que el recuerdo de la suma y la multiplicación tal como se enseñan en la escuela primaria.

Eso es exactamente lo que nos propusimos hacer en este libro: una exposición detallada, pero de extrema suavidad, totalmente autocontenida, que permita a las personas de cualquier disciplina que sólo tengan la imprescindible "curiosidad de espíritu" aventurarse a la experiencia de conocer en profundidad una de las hazañas intelectuales más extraordinarias de nuestra época.

Pensamos y concebimos *Gödel (para todos)* como un juego por etapas, con la esperanza de que los lectores se desafíen a sí mismos a pulsar *enter* al final de cada capítulo para pasar al próximo nivel. El juego empieza realmente desde cero y gran parte de nuestro esfuerzo fue intentar la mayor claridad posible en cada una de estas etapas para que, idealmente, cada lector pueda llegar tan lejos como se proponga.

Una palabra sobre el título: cada vez que se agrega "para todos" al título de libros de divulgación (y mucho más cuando el libro se refiere a cuestiones o autores considerados "difíciles") se sobreentiende que el "para todos" es en realidad un eufemismo entre condescendiente y piadoso, que oculta al verdadero “para los que no saben nada de nada”. No es el caso de este libro. Cuando decimos “para todos” nos referimos más bien al verdadero significado que tiene la expresión, en todo su alcance. Nuestro libro está dirigido no sólo a los que “no saben nada de nada”, sino también a los lectores que hayan leído sobre el teorema de Gödel en exposiciones parciales, y aún a los que hayan estudiado los teoremas de Gödel y sus demostraciones en profundidad. Porque si bien nuestro libro empieza de cero, llega mucho más allá de lo que se han propuesto las divulgaciones más conocidas en lengua castellana. En particular damos una demostración rigurosa y con todos los detalles de los teoremas, aunque en una aproximación diferente de la más habitual, novedosa por su sencillez, en la que utilizamos la mínima cantidad posible de tecnicismos matemáticos. Hemos incluido también un último capítulo con una investigación propia del fenómeno de incompletitud en un contexto general y problemas abiertos, para mostrar la prolongación que tienen estas ideas y las preguntas que los teoremas de Gödel, todavía hoy, siguen suscitando.

El material está organizado de la siguiente manera:

- En el primer capítulo damos un panorama general, y una primera aproximación informal, tanto de los enunciados de los teoremas de Gödel como de algunas derivaciones filosóficas.

- En el capítulo 2 exponemos el contexto histórico y el estado de la discusión en los fundamentos de la matemática en el momento en que irrumpen los resultados de Gödel. Al final del capítulo incluimos una sección sobre las tergiversaciones y errores más frecuentes en torno a la divulgación de los enunciados.
- En el capítulo 3 introducimos el lenguaje formal necesario para enunciar los teoremas con toda la exactitud necesaria, y abrir paso a las demostraciones.

Los tres capítulos terminan aparentemente de la misma manera, con el enunciado de los teoremas de Gödel. Pero nuestra intención y esperanza es que se lean, cada vez, con una comprensión más profunda, y con el nuevo sentido y la mayor precisión que se incorpora en cada etapa.

- En el capítulo 4 exponemos algunas analogías e intentos de aplicación del teorema de Gödel en distintas disciplinas sociales, fuera de la matemática. En particular analizamos textos de Julia Kristeva, Paul Virilio, Régis Debray, Gilles Deleuze y Félix Guattari, Jacques Lacan, y Jean-Francois Lyotard.

Esto concluye la primera parte.

La segunda parte está dedicada a la demostración de los teoremas. La prueba que damos tiene, creemos, la mínima cantidad posible de tecnicismos matemáticos. Mostramos, esencialmente, que toda la argumentación de Gödel puede desarrollarse a partir de un único hecho matemático: la existencia en la aritmética de una operación que refleja la manera en que las letras de un lenguaje se yuxtaponen unas a continuación de las otras para formar palabras.

La tercera parte, finalmente, está dedicada a una exploración propia sobre el fenómeno de incompletitud en un contexto más general y abstracto. Nos preguntamos cuál es hecho matemático que puede rastrearse en otros objetos, y que “divide aguas” entre teorías completas e incompletas.

Casi todos los capítulos incluyen al final una sección de ejercicios. Después de algunas dudas decidimos agregar también la resolución. Esperamos que esto sea un estímulo adicional para pensar primero “sin ayuda” una solución propia y sólo después comparar con la que proponemos en cada caso.

El libro se completa con dos apéndices: el primero, para consulta durante la lectura, reúne una variedad de teorías que sirven de ejemplo o contraejemplo a distintas afirmaciones. El segundo es una selección de textos de los propios protagonistas –Cantor, Russell, Hilbert, etc- sobre los hitos principales del fenómeno de incompletitud, que dan en conjunto una pequeña historia del tema.

Hemos dejado en el último capítulo preguntas abiertas y quizá algunos lectores se propongan también el desafío de responderlas. Otros lectores, tal vez, quieran hacernos llegar sugerencias o críticas sobre distintos puntos de nuestra exposición, o señalarnos errores que se nos hayan deslizado. Decidimos por eso abrir un blog para recibir comentarios:

www.godelparatodos.blogspot.com

Pondremos allí también en forma completa algunos de los textos citados que debimos resumir para el formato libro, y también distintos artículos de la bibliografía que nos resultaron particularmente interesantes.

Queremos finalmente agradecer a Xavier Caicedo por varias conversaciones y explicaciones esclarecedoras sobre puntos delicados de la teoría y también la lectura final generosa y atenta de Pablo Coll.

CAPÍTULO UNO. Un panorama general. (FRAGMENTO)

Lo verdadero y lo demostrable. Los sistemas axiomáticos formales. Completitud y axiomas. El infinito: La *bête noire* en los fundamentos de la matemática. El teorema de Incompletitud. La prueba original de Gödel. El Teorema de Consistencia. Extensión y alcance del teorema de Gödel. Precauciones. Gödel, las computadoras y la inteligencia artificial. Derivaciones filosóficas.
Ejemplos y ejercicios. *Hay un concepto que es el corruptor y el*
desatinador de los otros. No hablo del Mal, cuyo
limitado imperio es la ética; hablo del infinito.
Jorge Luis Borges, "Avatares de la tortuga"

§ 1. Lo verdadero y lo demostrable

El teorema de incompletitud de Gödel trata de la verdad en matemática y de la parte de verdad que puede ser comprobada a partir de axiomas, en esos fragmentos de texto de líneas sucesivas encadenadas por pasos lógicos que los matemáticos llaman *demostración*. En otras disciplinas del conocimiento siempre ha sido claro que lo verdadero no necesariamente coincide con lo demostrable. Imaginemos, para dar una analogía con la Justicia, que se comete un crimen en un cuarto cerrado y que el juez de instrucción, al llegar, encuentra que hay únicamente dos sospechosos junto al cadáver.

Fig. 1 La cuestión de lo demostrable empieza cuando los dos dicen "Yo no fui".

Cualquiera de estos dos sospechosos sabe toda la verdad sobre el crimen, que puede resumirse en la frase "Yo fui" o "Yo no fui". Es decir, la cuestión de la verdad del suceso, que hubo un crimen y hay un culpable, no está en duda. Sin embargo, si el juez no dispone de la confesión directa del culpable, debe intentar un camino indirecto: recolección de evidencias materiales, verificación de horarios y coartadas, huellas dactilares, etcétera. Muchas veces este camino indirecto no alcanza a demostrar, de acuerdo con los estrictos requisitos legales, ni la culpabilidad de uno ni la inocencia del otro. Hay una verdad, pero el método, a veces, es insuficiente para demostrarla de acuerdo a la exigencia de sus propios protocolos. Algo similar ocurre en la arqueología, en las hipótesis alrededor de una excavación. Hay también una verdad precisa, que corresponde a lo que en una época determinada fueron esos seres humanos, con sus rituales y costumbres, pero los paleontólogos sólo pueden inferir, a partir de los despojos que encuentran, versiones parciales de esa verdad. En este caso la verdad es como un límite, la sucesión en el tiempo de restos hallados, e hipótesis provisorias.

En muchos otros campos del conocimiento están representados estos dos mundos distintos, lo verdadero y lo demostrable. Aunque se solapan, no necesariamente coinciden. Curiosamente los matemáticos, por lo menos hasta el siglo XIX [2], siempre pensaron que en su disciplina los dos mundos eran identificables, y que cualquiera fuera la verdad que pudieran observar en el mundo platónico de los objetos matemáticos bajo estudio, (cierto orden, ciertas conexiones, cierto patrón de regularidad) esa verdad podría reobtenerse "por escrito" mediante el método axiomático, como tesis de una demostración. Sin embargo, el teorema de incompletitud de Gödel puso en evidencia una limitación intrínseca a las demostraciones basadas en sistemas de axiomas. Pero para entender qué dice exactamente el teorema (y qué no dice) debemos precisar mejor qué entienden los matemáticos por *demostración* y por *sistema axiomático* .

Una *demostración* en matemática es una cadena de afirmaciones, de oraciones afirmativas, en las que aparecen fórmulas y consideraciones lógicas (ver por ejemplo Fig. 2).

Fig. 2 Pizarrón con la demostración de que 1+1 = 2.

Cada una de estas afirmaciones, también llamadas *enunciados*, es, o bien un axioma, (un enunciado que se da por válido al inicio del razonamiento), o bien se obtiene de eslabones anteriores en la cadena por reglas lógicas bien determinadas.

Una vez escrita una demostración -y éste es quizá el punto más sólido de la matemática como ciencia- cualquiera puede detenerse cuanto quiera entre paso y paso para inspeccionar la corrección del argumento. Más aún, idealmente incluso una persona sin conocimientos matemáticos debería ser capaz de seguir y corroborar una demostración verificando cada una de las ligaduras lógicas. Es un procedimiento casi mecánico, similar al de la computadora que dibuja rayitas rectas, en pixels muy pequeños, sin saber que al final conformarán una figura de complejidad insospechada. Repetimos entonces: una demostración es una sucesión en general muy larga de enunciados, que se encadenan uno a otro por pasos muy elementales, estrictamente lógicos. Estos pasos pueden examinarse con todo el detenimiento necesario para tener la absoluta seguridad de que no se ha cometido ningún error. Cuando el razonamiento es profundo, la tesis, aunque se desprende necesariamente de la sucesión de

pasos, sorprende con respecto a los axiomas, de la misma manera que la secuencia de actos inocentes de un ilusionista no hace esperar el efecto maravilloso final. La inteligencia, la creatividad, estuvo *antes*, en la elección inspirada de cada paso para encontrar, entre todas las posibles bifurcaciones, el camino oculto que lleva de los axiomas a la tesis. En un ensayo en que examina "La filosofía de la composición", de Poe, Borges recuerda la justificación minuciosa, la maquinaria de cálculo intelectual que alega Poe sobre la escritura de su poema "El cuervo", y a continuación declara: "Yo, ingenuamente acaso, creo en las explicaciones de Poe. Descontada alguna posible ráfaga de charlatanería, pienso que el proceso mental aducido por él ha de corresponder, más o menos, al proceso verdadero de la creación. Yo estoy seguro de que así procede la inteligencia: por arrepentimientos, por obstáculos, por eliminaciones. La complejidad de las operaciones descriptas no me incomoda, sospecho que la efectiva elaboración tiene que haber sido aún más compleja y mucho más caótica y vacilante. Lo anterior no quiere decir que el arcano de la creación poética, de esa creación poética, haya sido revelado por Poe.
En los eslabones examinados la conclusión que el escritor deriva de cada premisa es, desde luego, lógica, pero no la única necesaria.
" [Borges]

Si cambiamos en la frase final "escritor" por "matemático" la analogía con una demostración en matemática es perfecta: porque también aquí "*en los eslabones examinados la conclusión que el* matemático *deriva de cada premisa es, desde luego, lógica, pero no la única necesaria.*
"

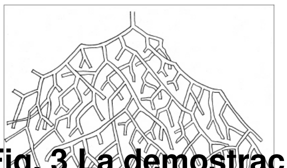

Fig. 3 La demostración como un laberinto de bifurcaciones.
El camino es "fácil" sólo después de marcado.

Notas:
[1] N. del. E.: se refieren al ensayo "Divulgación" de Uno y el universo (1945). Sabato intenta explicar a un amigo la teoría de Einstein y le habla con entusiasmo de tensores y geodésicas. El amigo no entiende una palabra. Sabato hace un segundo intento con menos entusiasmo: conserva todavía algunas geodésicas pero hace intervenir aviadores y disparos de revólver. El amigo, con alegría, le dice que empieza a entender. Sabato se dedica entonces exclusivamente a jefes de estación que disparan revólveres y verifican tiempos con un cronómetro, trenes y campanas. ¡Ahora sí entiendo la relatividad! exclama el amigo. Sí, responde Sabato amargamente, pero ahora no es más la relatividad.
[2] A principios del siglo XIX C. F.Gauss, J. Bolyai y N. Lobachevski, independientemente unos de otros, conjeturaron que la geometría obtenida al negar el quinto postulado de Euclides (llamada geometría hiperbólica) es consistente. En 1868 Eugenio Beltrami (1835-1900) demostró la consistencia en su artículo "Ensayo sobre la interpretación de la geometría no

euclidiana" donde presentaba un modelo para la geometría hiperbólica dentro de la geometría euclidiana.