***LEYENDO A EUCLIDES***
***de Beppo Levi***
***(Libros del zorzal, 2000)***
***223 páginas***

A fines de los años 30, perseguido por Mussolini, llegó a la Universidad del Litoral un hombre diminuto, de aspecto frágil y frente ancha. Era Beppo Levi, uno de los matemáticos más importantes del siglo XX. Se lo había contratado como investigador en uno de los primeros institutos especializados que tuvo el país, pero por una de las clásicas paradojas argentinas, pronto sobrevino una intervención arrasadora y Levi acabó dando clases rutinarias para alumnos de primer año. Fue también en Rosario donde se publicó por primera vez Leyendo a Euclides. Casi 50 años después, un grupo de discípulos reedita esta incursión casi detectivesca en el pensamiento socrático.

Para entender la importancia de este libro suyo hay que tener en cuenta que los axiomas de Euclides para la geometría no sólo fueron y son aún en gran medida el paradigma del modo de operar de la razón matemática, sino que cristalizaron también una estética casi imperativa para esa razón, con implicaciones múltiples en la filosofía que llegan hasta hoy: la estética del balance delicado entre simplicidad y alcance, entre un mínimo de presupuestos y un máximo de consecuencias derivables.

En efecto, la atracción y seducción del modelo euclideano reside en que a partir de nociones elementales como punto, recta, círculo, y sólo cinco axiomas que vinculan de manera casi obvia estas nociones, puede desarrollarse de teorema en teorema toda la geometría clásica, es decir, la totalidad de la geometría que conocía la humanidad hasta no hace mucho tiempo y que Kant creyó la única posible: la que se corresponde con la forma en que vemos al mundo y sirve a cartógrafos, arquitectos y agrimensores para todos los usos diarios.

La larga influencia del procedimiento axiomático en la filosofía puede rastrearse en la Etica de Spinoza, cuyo subtítulo es "Demostrada según el orden geométrico", y también en la búsqueda de Descartes de una verdad a partir de la cual construir, por pasos puramente lógicos, un sistema de pensamiento inexpungable. Pero quizá la historia más conocida en torno a la geometría euclideana es la que tiene que ver con el quinto postulado: *Dada una recta y un punto fuera de ella, hay una única recta paralela a la dada que pasa por ese punto.*

De los cinco axiomas éste era, aun para Euclides, el menos obvio, y en las demostraciones trata de utilizarlo sólo cuando es estrictamente necesario.

Durante dos mil años se pensó que tal vez sería posible probar este quinto axioma a partir de los cuatro anteriores, como un teorema más, y encontrar esa demostración elusiva se convirtió en el principal problema abierto de los geómetras. En 1826, un joven estudiante ruso, Nikolay Lobachevsky, descubrió que era posible desarrollar una nueva geometría en la que fueran válidos los cuatro primeros axiomas, pero no el quinto. Posteriormente Bolyai probó algo todavía más curioso: que la nueva geometría era tan legítima y sólida como la euclideana, en tanto que si llevaba a alguna contradicción lógica, la "culpa" de esta contradicción no podría atribuirse a la negación del quinto postulado, sino a los cuatro anteriores, compartidos con la geometría clásica.

Gauss, que había llegado por su cuenta a las mismas conclusiones, observó que la existencia de una geometría no euclideana ponía en crisis la idea kantiana de una noción a priori del espacio. Este fue uno de los golpes más duros a la filosofía de Kant, al que se sumaron los experimentos sobre la geometría de la percepción visual, tampoco del todo euclideana, de Helmholtz.

El espíritu de Euclides revivió con particular fuerza a principios de 1900 en el programa de Hilbert para fundamentar la matemática. Algunas paradojas lógicas señaladas por Rusell en la teoría de conjuntos habían hecho crujir el edificio orgulloso de la matemática y mostraban la necesidad de buscar principios de corroboración que permitieran la revisión cuidadosa de cada resultado. Hilbert sostenía que debía dotarse a la matemática de un conjunto de axiomas bien determinados, como los postulados de Euclides, de modo que todo resultado que los matemáticos proclamasen como verdadero pudiera corroborarse y reobtenerse a partir de estos axiomas en una sucesión finita de pasos.

En una palabra, Hilbert procuraba identificar la noción de verdadero con la de demostrable. Pero ya en la vida real estamos acostumbrados a que estas dos nociones no siempre son equivalentes. Basta pensar en cualquier crimen con dos sospechosos. Cualquiera de los dos involucrados sabe la verdad sobre su culpabilidad o inocencia. Pero la Justicia debe reunir evidencias para decidir sobre esta cuestión y demasiadas veces los indicios no son suficientes para alcanzar la verdad.

En 1930 Kurt Gödel mostró -en lo que fue un golpe de efecto inesperado- que lo mismo ocurre en la matemática. Su célebre teorema de incompletitud dio por tierra con el programa de Hilbert al revelar que aun en el fragmento elemental de la aritmética -los números naturales, con la suma y la multiplicación- es imposible dar una cantidad finita de postulados que permitan reobtener como teoremas todos los enunciados verdaderos. La aritmética, a diferencia de la geometría clásica, es irreductible a un tratamiento axiomático.

El teorema de Gödel, convertido demasiado ligeramente en fetiche de la postmodernidad, debe verse como un resultado sobre la limitación de los métodos formales axiomáticos y, en general, sobre la limitación del lenguaje. Desde el punto de vista de la matemática, dice que hay más complejidad en el mundo de los objetos matemáticos que la que pueden dar cuenta los métodos finitistas de demostración. Dice también que la inteligencia humana es irremplazable: no puede modelarse una computadora que arroje todos los enunciados verdaderos sobre los números naturales. El factor humano insustituible es la facultad de interpretar y asignar sentido.

A la vez, el resultado de Gödel pone por primera vez en crisis la estética simplicidad-alcance tan asimilada a partir de Euclides en el pensamiento matemático: la aritmética y otros fragmentos de la matemática no pueden axiomatizarse sin perder en el camino parte de su alcance.

En una investigación anterior, el matemático francés Henri Poicaré había vuelto sobre los axiomas de Euclides para evidenciar los presupuestos ocultos detrás de los cinco axiomas: por ejemplo, la admisión tácita de que las figuras son indeformables por rotaciones y traslaciones. En un mundo de fluidos no tendría sentido la geometría euclideana. Este modo de atender a lo no dicho, y poner en evidencia lo que cada época convierte en verdad inconsciente, anticipaba en la matemática lo que fueron luego las técnicas arqueológicas de Foucault en las ciencias sociales.

Leyendo a Euclides se inscribe más bien en esta segunda línea, y puede considerarse una revisión bajo la lupa poderosa de los siglos para entender el corpus de conocimientos y el modo de razonar geométrico de la época de Euclides. En el prólogo, Levi dice que su esfuerzo al escribir este libro estaría completamente perdido sin no pudiera cautivar la atención de lectores no matemáticos. Estos lectores tendrán hoy la oportunidad única de reaprender la geometría de la mano de un matemático verdaderamente célebre (hay un teorema ya clásico del análisis que lleva su nombre).

¿Qué hay -podría preguntarse uno al terminar- detrás de esta estética que atravesó los siglos, de este afán de apresar con unas pocas propiedades, todas las consecuencias de un sistema? Los axiomas, quizá, expresan la finitud humana. Desde siempre el hombre se ha debatido con su finitud y en la matemática logró a veces con astucia derrotarla: nadie puede contar todos los números, pero sabemos escribir cualquiera de ellos y podemos hacerlo con sólo diez símbolos. Nadie puede escribir los infinitos teoremas de la geometría, pero Euclides enseñó que con suficiente paciencia podríamos derivar cada uno a partir de sólo cinco axiomas. Otras veces, sin embargo, ninguna astucia es suficiente. El ser humano es una criatura limitada, pero echa a andar hijos cuyos pasos no puede seguir, dioses que lo suceden eternamente y objetos cuya complejidad se le escapa.

(Publicado en Clarín)

## TEXTO ORIGINAL

A fines de los años 30, perseguido por Mussolini, llegó a la Universidad del Litoral un hombre diminuto, de aspecto frágil y frente ancha. Era Beppo Levi, uno de los matemáticos más importantes de este siglo. Se lo había contratado como investigador en uno de los primeros institutos especializados que tuvo el país pero por una de las clásicas paradojas argentinas, pronto sobrevino una intervención arrasadora, y Levi acabó dando clases rutinarias de análisis para los alumnos de primer año. Fue también en Rosario donde se publicó por primera vez Leyendo a Euclides. Casi cincuenta años después, un grupo de discípulos acaba de reeditar esta incursión casi detectivesca en el pensamiento socrático.

Para entender la importancia de este libro se debe tener en cuenta que los axiomas de Euclides para la geometría no sólo fueron y son todavía en gran medida el paradigma del modo de operar de la razón matemática sino que cristalizaron también una estética profunda y casi imperativa para esa razón, con implicaciones múltiples en la filosofía que llegan hasta la época contemporánea. Esa estética es la del balance delicado entre simplicidad y alcance, entre la mínima cantidad de presupuestos y la máxima cantidad de consecuencias derivables.

En efecto, la atracción y seducción del modelo euclideano reside en que a partir de nociones muy elementales como punto, recta, círculo, y sólo cinco axiomas que vinculan de manera casi obvia estas nociones entre sí, puede desarrollarse de teorema en teorema toda la geometría clásica, es decir, la totalidad de la geometría que conocía la humanidad hasta no hace mucho tiempo atrás y que Kant creyó la única posible: la geometría que se corresponde con la forma en que vemos el mundo y sirve a cartógrafos, arquitectos y agrimensores para todos los usos diarios.
La larga influencia del procedimiento axiomático en la filosofía puede rastrearse en la Etica de Spinoza, que lleva como subtítulo "Demostrada según el orden geométrico" y también en la búsqueda de Descartes de una verdad "a salvo de toda duda razonable" que pudiera servir como primer principio y punto de apoyo para construir, por pasos puramente lógicos, un sistema de pensamiento inexpungable. Pero quizá la historia más conocida en torno a la geometría euclideana es la que tiene que ver con el quinto postulado:

Dada una recta y un punto fuera de ella, hay una única recta paralela a la dada que pasa por ese punto.

De los cinco axiomas este último era, incluso para el propio Euclides, el menos obvio, y en las demostraciones trata de utilizarlo sólo cuando es estrictamente necesario. Durante dos mil años se pensó que tal vez sería posible probar este quinto axioma a partir de los cuatro anteriores, como un teorema más, y encontrar esa demostración elusiva se convirtió en el principal problema abierto de los geómetras. Finalmente un joven estudiante ruso, Nikolay Lobachevsky, descubrió en 1826 que era enteramente posible desarrollar una nueva geometría en la que fueran válidos los cuatro primeros axiomas pero no el quinto. Posteriormente Bolyai probó algo todavía más curioso: que la nueva geometría, por extraña que pudiera parecer a la intuición, era tan legítima y sólida como la euclideana, en el sentido de que si llevaba a alguna contradicción lógica, la "culpa" de esta contradicción no podría atribuírse a la negación del quinto postulado, sino a los cuatro anteriores, compartidos con la geometría clásica.

Gauss, que había llegado por su cuenta a las mismas conclusiones, fue uno de los primeros en observar que la existencia de una geometría no euclideana ponía en crisis la idea kantiana de una noción a priori del espacio. Este fue uno de los golpes más duros a la filosofía de Kant, al que se sumaron luego los experimentos sobre la geometría de la percepción visual, tampoco enteramente euclideana, debidos a Helmholtz.

**El programa de Hilbert y la incompletitud**

El espíritu de Euclides revivió con particular fuerza a principios de 1900 en el programa de Hilbert para fundamentar la matemática. Algunas paradojas lógicas señaladas por Russell en la teoría de conjuntos habían hecho crujir por primera vez el edificio orgulloso de la matemática y mostraban la necesidad de buscar principios y métodos de corroboración que permitieran la revisión cuidadosa de cada resultado. La idea detrás del programa de Hilbert era que debía dotarse a toda la matemática de un conjunto de axiomas bien determinados, como los cinco postulados de Euclides, de manera que todo resultado que los matemáticos proclamasen como verdadero -utilizando cualquier método- pudiera corrobarse y reobtenerse a partir de estos axiomas por medio de un procedimiento puramente mecánico, en una sucesión finita de pasos. En una palabra, Hilbert procuraba identificar la noción de verdadero con la noción de demostrable.

Pero ya en la vida real estamos acostumbrados a que estas dos nociones no son necesariamente equivalentes. Basta pensar en cualquier crimen con dos únicos sospechosos. Cualquiera de los dos involucrados sabe la verdad sobre su culpabilidad o inocencia: yo fui o yo no fui. Sin embargo la justicia debe reunir por otros caminos evidencias -huellas, colillas, verificación de horarios- para decidir sobre esta cuestión y demasiadas veces los indicios no son suficientes para alcanzar esa verdad. Más aún, puede ocurrir incluso que ni la culpabilidad de uno ni la inocencia del otro sean demostrables.

En 1930 Kurt Gödel mostró -en lo que fue un golpe de efecto dramático e inesperado- que exactamente lo mismo ocurre en la matemática. Su célebre teorema de incompletitud dio por tierra con el programa de Hilbert al revelar que aún en el fragmento elemental de la aritmética -los números naturales, con la suma y la multiplicación- es imposible dar una cantidad finita de postulados, a la manera de Euclides, que permitan reobtener como teoremas todos los enunciados verdaderos. Es decir, la aritmética, a diferencia de la geometría clásica, es irreductible a un tratamiento axiomático.

El teorema de Gödel, convertido demasiado ligeramente en fetiche de la postmodernidad y de los psicólogos lacanianos, debe verse como un resultado sobre la limitación de los métodos formales axiomáticos, y en general, como un resultado sobre la limitación del lenguaje. Desde el punto de vista de la matemática dice que hay más complejidad en el mundo de los objetos matemáticos de la que pueden dar cuenta los métodos finitistas de demostración. Dice también que la inteligencia y el discernimiento humano es irremplazable: no puede modelarse una computadora que arroje todos los enunciados verdaderos sobre los números naturales. El factor humano insustituible es la facultad de interpretar y asignar sentido.

A la vez, el resultado de Gödel pone por primera vez en crisis la estética simplicidad-alcance profundamente asimilada a partir de Euclides en el pensamiento matemático: la aritmética, y muchos otros fragmentos de la matemática, no pueden axiomatizarse sin perder en el camino una parte de su alcance.

**El libro de Beppo Levi**

En una investigación anterior y quizá menos conocida, el matemático francés Henri Poincaré había vuelto sobre los axiomas de Euclides para poner en evidencia los presupuestos ocultos detrás de los cinco axiomas: por ejemplo, la admisión tácita de que las figuras son indeformables por rotaciones y traslaciones. En un mundo de fluidos no tendría sentido la geometría euclideana. Este modo de prestar atención a lo no dicho, y de poner en evidencia lo que cada época convierte en verdad inconciente, anticipaba en el campo de la matemática lo que fueron luego las técnicas arqueológicas de Foucault en las ciencias sociales.

Leyendo a Euclides se inscribe más bien en esta segunda línea, y puede considerarse una revisión bajo la lupa poderosa de los siglos para entender el corpus de conocimientos y el modo de razonar geométrico de la época de Euclides. En el prólogo Levi dice que su esfuerzo al escribir este libro estaría completamente perdido si no pudiera cautivar la atención de lectores no matemáticos. Estos lectores tendrán la oportunidad única de reaprender la geometría de la mano de un matemático verdaderamente célebre (hay un teorema ya clásico del análisis que lleva su nombre) y al mismo tiempo -como dice Mario Bunge en las palabras finales- de tener con los muertos una conversación inteligente, sin recurrir a trucos espiritistas.

¿Qué hay en todo caso -podría preguntarse uno al terminar- detrás de esta estética que atravesó los siglos, detrás de este afán de apresar con unas pocas propiedades, todas las consecuencias de un sistema? Los axiomas, quizá, expresan la finitud humana. Desde siempre el hombre se ha debatido con su finitud y en la matemática ha logrado a veces con astucia derrotarla: nadie puede contar todos los números, pero sabemos escribir cualquiera de ellos y podemos hacerlo con sólo diez símbolos. Nadie puede escribir los infinitos teoremas de la geometría, pero Euclides enseñó que con suficiente paciencia podríamos derivar uno cualquiera a partir de sólo cinco axiomas. Otras veces, sin embargo, ninguna astucia es suficiente. El ser humano es una criatura limitada, pero echa a andar hijos cuyos pasos no puede seguir, dioses que lo suceden eternamente y objetos cuya complejidad se le escapa.