Repasamos en esta reseña y en la del próximo mes, ejemplos, ambos en películas de animación, en los que las matemáticas han sido las responsables de merecer y conseguir el más preciado de los galardones del mundo cinematográfico: el Oscar® de Hollywood.



Si preguntáramos, a modo de curiosidad, a personas elegidas al azar, qué le sugiere la palabra PIXAR, seguramente sólo acertarían a decirnos algo coherente algunos aficionados al cine, padres de niños menores de diez años y algún amante de los dibujos animados, menor de cuarenta años, probablemente. Sonsacando lo más aprovechable, nos dirían que se trata de un estudio cinematográfico de animación por ordenador subsidiario de *Walt Disney Studios* y propiedad de
The Walt Disney Company
, con sede en Emeryville, California, Estados Unidos. Seguramente también nos dirían que fueron los que sacaron las películas Disney de la ñoñería con que los sucesivos responsables de la empresa fueron encorsetándolas, tras la muerte de su fundador (ñoñería en algunos aspectos, como los insufribles números musicales, porque en otros no se cortaban un pelo si tenían que mostrar los más bajos instintos; en definitiva, la doble moral yanki de la que ya se ha hablado muchas veces).

Lo cierto es que la aparición de estos estudios de animación, con técnicas distintas a las

clásicas (No se le puede negar a Walt Disney sus innovaciones y avances en animación; invirtió mucho tiempo y dinero en su mejora, lo que no hicieron los herederos de su emporio) y argumentos más atractivos, revolucionaron este tipo de películas, además de atraer no sólo a públicos infantiles. Una de sus señas de identidad fue el diseño realista de personajes y fenómenos naturales por ordenador. Y para lograrlo necesitaron muchas matemáticas y muy novedosas.

Así lo indican los responsables de efectos visuales en las numerosas charlas y conferencias que han impartido por todo el mundo. Pero no solo montando un par de presentaciones llamativas y epatantes, sino poniendo por delante artículos serios de investigación que además coloca la empresa a disposición libre de todo aquel que quiera acercarse a ellos en su página web.

Si echáis un vistazo a alguno de ellos, como curiosidad simplemente, comprobareis que no los puede leer cualquiera, sino que hay matemáticas muy avanzadas detrás de ellos. Cuesta, al menos para el que esto escribe, tratar de explicar de manera sencilla lo que hay detrás de muchos de ellos. Lo intentaré con un par de conceptos que han desarrollado, simplificando mucho las cosas.

Paralelamente, describiré la trayectoria del científico que logró con su primer trabajo para PIXAR la preciada estatuilla con un cortometraje: Tony DeRose.



Tony DeRose es actualmente científico sénior y director del grupo de investigación de *Pixar Animation Studios*. Se licenció en Física en la Universidad de California, Davis, y se doctoró en Informática de la Universidad de California, Berkeley. Entre 1986 a 1995, DeRose fue profesor de informática e ingeniería en la Universidad de Washington, y trabajando en un grupo de investigación centrado en la representación de superficies y otros problemas geométricos motivados por gráficos por ordenador.

En varias entrevistas y en las charlas que imparte, remarca que siempre le fascinó la parte aplicada de las matemáticas. Desde niño le apasionaba la capacidad de cálculo de las matemáticas, lo que podía saber y averiguar sin necesidad de medir físicamente las magnitudes o esperar a que se produjeran los experimentos. Al acabar sus estudios universitarios e iniciar los de posgrado comenta que se le presentaban dos opciones: tratar de mejorar 400 años de físicos brillantes, o quedarse esencialmente en la planta baja de los gráficos por ordenador, ya que prácticamente no se sabía nada del tema en aquel momento. Eligió esta segunda opción, trasladándose a Berkeley, incorporándose al equipo de Brian Barsky, que estaba trabajando en representaciones de superficies, *splines*, y cosas de ese estilo. Ahí fue donde encontró la belleza de hacer matemáticas constructivas, y los gráficos por ordenador fueron una forma de hacerlas visuales, tangibles.

En aquel momento, muy cerca, literalmente en frente a su puesto de trabajo, George Lucas había contratado a Edwin Catmull para iniciar *The Graphics Group*, la división computacional de *Lucasfilm* que tras ser adquirido en 1986 por el co-fundador de *Apple Computer*, Steve Jobs, pasó a ser *Pixar Animation Studios*. Catmull se había graduado en la Universidad de Utah, doctorándose posteriormente en Ciencias de la Computación. Creó en 1972 el primer dibujo en animación 3D, una recreación de su propia mano izquierda. Quedó tan realista que fue aprovechada para la película ***Mundo futuro*** (*Futureworld*, Richard T. Heffron, EE. UU., 1976) (la secuela de la célebre ***Almas de metal*** (*Westworld*, Michael Crichton, EE. UU., 1973)). Catmull formaría parte del comité asesor en la tesis doctoral de DeRose. Catmull ha ganado cuatro Premios de la Academia por sus proezas técnicas y ha colaborado en crear algunos de los principales softwares de imágenes generadas

por computadora en los que confían los animadores en la actualidad.

Diez años después, ya siendo profesor en la Universidad de Washington, Ed Catmull propone a DeRose trabajar más estrechamente en gráficos después del enorme éxito obtenido por la película ***Toy Story*** (*Toy Story*, John Lasseter, EE. UU., 1995), primera producción en la historia de la animación totalmente realizada con CGI (*Computer Generated Images*). Catmull fue el diseñador del software de renderización de imágenes de la película, además de productor.

Además del público y la crítica, técnicos y especialistas de todo tipo valoraron muy positivamente muchos aspectos de *Toy Story*. La historia enganchó al público, los personajes de juguete eran creíbles, convincentes, pero observaron que, cada vez que aparecía un ser humano en la pantalla, la cosa no cuadraba tan bien; de hecho, se apreciaban discordancias. Decidieron que uno de los objetivos en futuros trabajos debería ser mejorar la presencia de personas, tanto gráfica como argumentalmente. Y aquí es donde entró DeRose junto a un completo equipo de informáticos, ingenieros y matemáticos.

Matemáticas pioneras

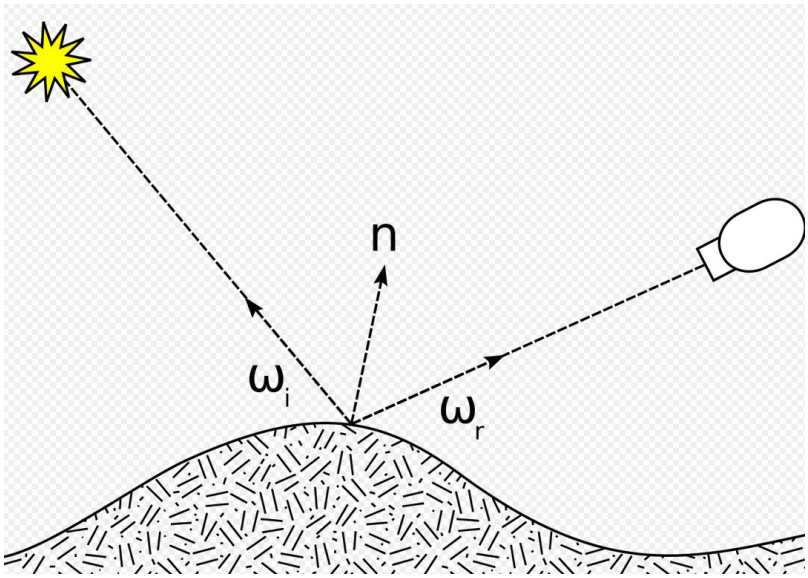
En sus conferencias divulgativas, DeRose suele remarcar la importancia de las matemáticas en la concepción de este tipo de películas. "*No debería sorprender en absoluto que las matemáticas desempeñen un papel relevante* ", comenta. “ *Las imágenes resultantes son todas digitales. Tres números definen cada píxel, uno para la cantidad de rojo, verde y azul. Todo lo que tenemos básicamente son números que representan posiciones de geometría y valores de grados de libertad* , *por lo que tiene que haber un gran cálculo en el camino* ".

Hablemos de tres ideas, utilizadas en otros tantos apartados de animación de gráficos. La iluminación global de una escena implica simular cómo la luz rebota en un entorno: "*Matemátic amente, dados dos puntos cualesquiera, pongamos y* , *z* , *es necesario calcular cuánta luz viaja desde y hacia z.*
Uno de los instrumentos utilizados para modelizar esta situación es la

función de distribución de reflectancia bidireccional

,
f
r
(
w
i
,
w
r
)
(
BRDF
, siglas en inglés). Fue definida hacia 1965 por el físico
Fred Nicodemus
, del siguiente modo

$$f_r\,(w_i,\,w_r) = \frac{dL_r(w_r)}{dE_i(w_i)}$$



En la imagen, tenemos sobre un punto situado en una superficie opaca, tres direcciones: w_i indica la luz entrante desde la fuente de luz,
w
r
es la luz reflejada y apunta hacia la cámara (o al espectador, en general) que recoge la luz percibida, y

n
indica la superficie normal. La función está definida como el cociente entre la variación de la *radiancia L*
(potencia por unidad de ángulo sólido en la dirección de un rayo por unidad de área proyectada perpendicular al rayo) y la variación de la
irradiancia E
(potencia por unidad de superficie).

Ese cálculo de la cantidad de luz entre dos puntos, hay que hacerlo para cada par de puntos en el entorno, que, al ser un espacio continuo, se convierte en una integral: la denominada ***ecuación de renderizado***
. En el enlace se accede a un artículo sobre esta ecuación de
James T. Kajiya
de 1986 en el que la aplica en la computación gráfica. Se trata de una
ecuación integral
que describe la cantidad total de luz emitida desde un punto a lo largo de una dirección de visualización particular, dada una función para la luz entrante y una función de distribución de reflectancia bidireccional. Básicamente, la luz saliente de cada punto es la suma de la luz emitida y la luz reflejada. Ésta última, la luz reflejada, es la suma de todas las direcciones de la luz entrante multiplicada por la reflexión superficial y el coseno del ángulo incidente. Lo que los ordenadores hacen es aproximar esa la ecuación integral mediante un conjunto de ecuaciones lineales. Hay una ecuación para cada punto de cada objeto que aparece en cada secuencia. De media, entre un millón y diez millones de puntos por cada cuadro de película. Estimen el número de ecuaciones total. Existen diferentes técnicas de representación realista para resolver este tipo de ecuaciones.

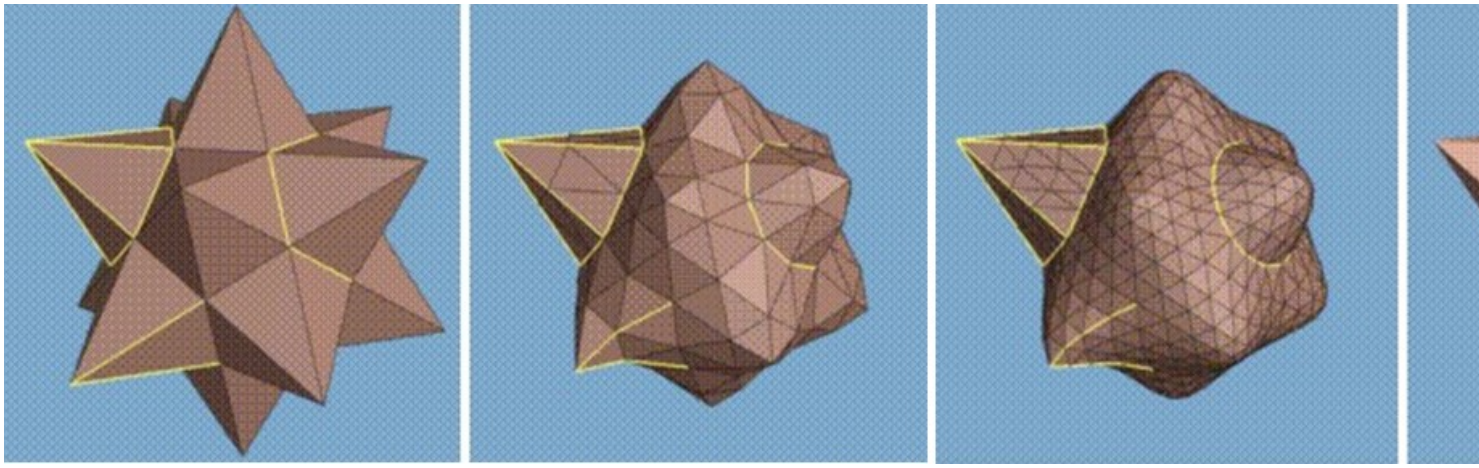
Resolver la ecuación de renderizado para cualquier escena dada es el principal desafío en el renderizado realista. Un enfoque para hacerlo se basa en ***métodos de elementos finitos***. Otro enfoque diferente utiliza los
métodos Monte Carlo
, dando lugar a muchos algoritmos diferentes. Por otra parte, aunque la ecuación de renderizado es muy general, no es capaz de contemplar todos los aspectos del reflejo de la luz. Entre sus limitaciones se encuentran los efectos no lineales, el efecto Doppler, la polarización, la fosforescencia, las interferencias, entre otras.

Subdivisión de superficies

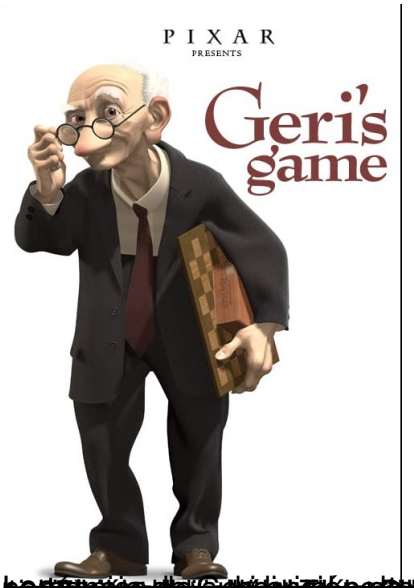
Otro aspecto presente en la animación de gráficos por ordenador es la representación de superficies tridimensionales complejas de manera eficiente en un ordenador, preservando en la medida de lo posible la ilusión de suavidad. El modo más extendido ha sido la utilización de NURBS (*B-splines racionales no uniformes*). Pero un gran inconveniente de utilizar NURBS es

el requisito de que las redes de control (el conjunto de puntos de control) tenga que ser una cuadrícula rectangular regular. Esa elección limita mucho el tipo de objetos que pueden representarse porque no existen procedimientos de refinado local de la superficie, dando lugar a abombamientos u otros defectos del dibujo final.

Una alternativa es la técnica de las ***superficies de subdivisión***, definidas como límite de un proceso de refinamiento infinito. Este método mejora muchas de las deficiencias de los NURBS. Por ejemplo, las imágenes que se muestran a continuación, a partir de una malla de control inicial, se pasa a un proceso de refinamiento mediante iteraciones. Las imágenes muestran el resultado con una etapa, dos y la final con un refinamiento infinito, respectivamente.

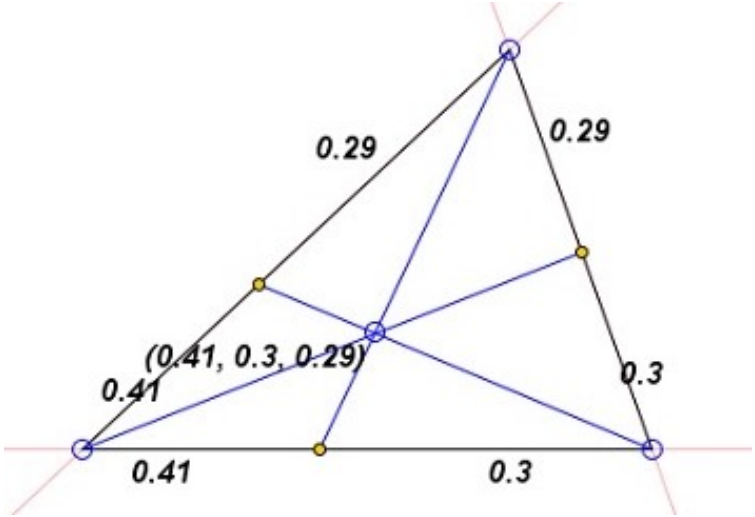


Las superficies de subdivisión son fáciles de implementar, pueden modelar superficies de tipo topológico arbitrario y, como se ha indicado, la continuidad de la superficie se puede controlar localmente. Aunque las superficies de subdivisión se conocen desde hace quince años, su uso se ha visto obstaculizado por la falta de una forma cerrada: se definen solo como límite de un procedimiento infinito.



Coordenadas armónicas

Un tercer aspecto novedoso en las técnicas de animación mediante ordenador es la creación y el control de las deformaciones de volumen utilizadas para articular personajes. Para ello, los ingenieros de Pixar han recurrido a las ***coordenadas armónicas***. Las coordenadas armónicas son una generalización de las
coordenadas baricéntricas
que se pueden extender a cualquier dimensión; describen cómo se mueven los puntos interiores dentro de polígonos en el plano o poliedros en el espacio.



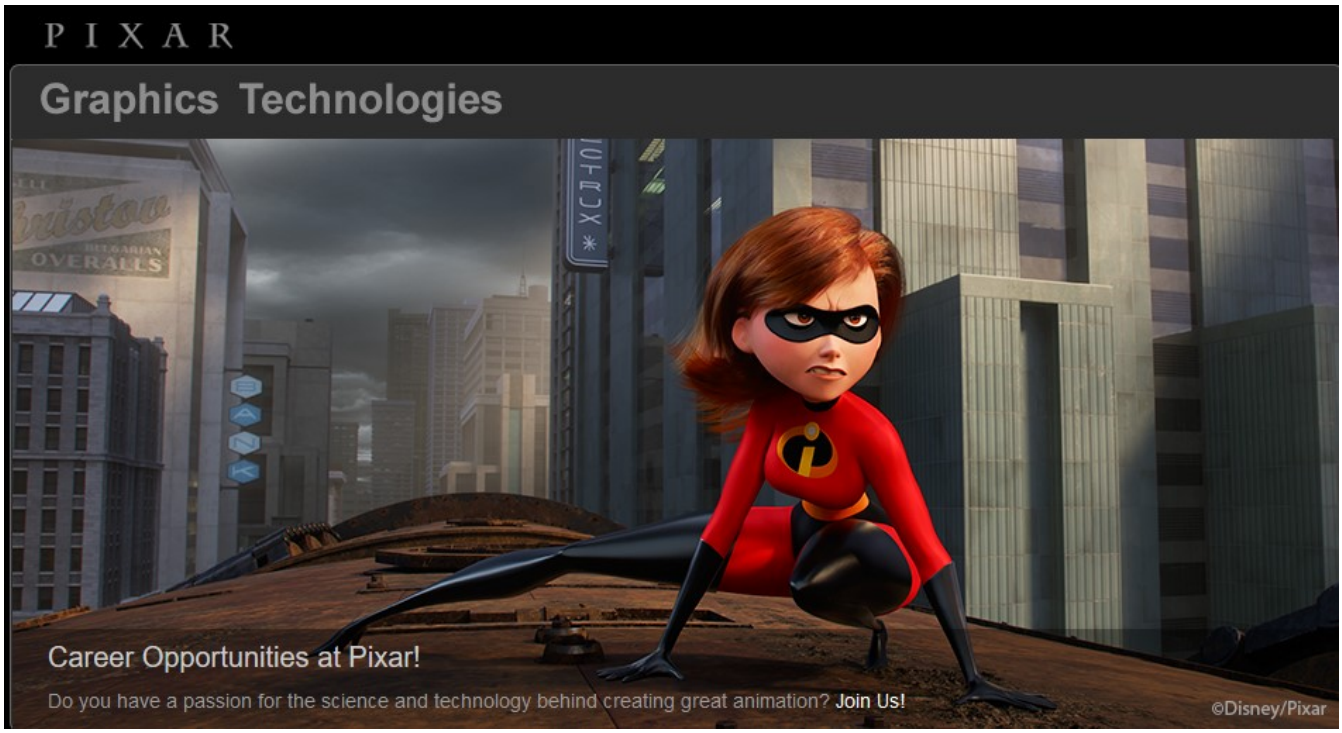
Las coordenadas baricéntricas son ternas de números (t_1, t_2, t_3) que responden a masas situadas en los vértices de un triángulo de referencia. En la imagen tenemos las coordenadas baricéntricas (0.41, 0.3, 0.29). Una característica es que la suma de esos tres valores es la unidad, y que esas masas determinan entonces un punto
P

, que es el
baricentro
geométrico
de las tres masas (de ahí su nombre). Las coordenadas baricéntricas fueron descubiertas por Möebius en 1827, y tiene muchas aplicaciones que el lector interesado puede consultar en cualquier texto de
geometría afín
.

Sobre las coordenadas armónicas y su utilización en el modelo gráfico por ordenador puede verse este video de apenas seis minutos de duración (en inglés). Gracias a este tipo de coordenadas, los animadores reducen considerablemente el tiempo y el esfuerzo que dedican a mover los objetos.

Una visita a *Pixar in a box*

En un loable intento por promocionar las materias STEM relacionadas con el trabajo de los estudios Pixar, han incorporado a su página web, con la colaboración de un centro educativo, unas unidades básicas (con vídeos explicativos, ejercicios, animaciones, etc.) que explican lo que se necesita en la realización de una película. A esta sección la han llamado *Pixar in a box*. Entre el material desarrollado hay algunas unidades de matemáticas, muy elementales (es una sección dirigida a un público más bien joven), pero no triviales (el cálculo de curvas de Bézier, por ejemplo, muy útil en la animación por ordenador, no puede decirse que sea evidente).


PIXAR
Graphics Technologies
Career Opportunities at Pixar!
Do you have a passion for the science and technology behind creating great animation? Join Us!
©Disney/Pixar