Como siempre, atacando por la espalda, cuando empezamos a disfrutar de las vacaciones, aparece septiembre y el nuevo curso. En fin, que todo cada vez pasa más deprisa.

No quiero enrollarme mucho, que la reseña ya es de por si extensa (gracias Nerea por tu comprensión, sobre todo por la dificultad de repasar los símbolos matemáticos con la dificultad añadida de los editores en la red). Simplemente felicitar a todos los participantes e indicar que es el primer año de los quince del concurso que dos de ellos no han dado la película-enigma (uno por confusión con otra con ciertas similitudes, y otro, supongo, porque no ha tenido demasiado tiempo para meterse con ello). Ciertamente intenté que las cuestiones matemáticas fueran más asequibles, y las pistas sobre la película algo más difusas (a lo mejor me pasé, pero es que es, al menos para mí, un título muy conocido). Tenía ganas además de poner algún título de Fritz Lang, uno de mis realizadores favoritos (tengo muchos, pero Lang fue un *cr*

ack
, ya desde la etapa muda). No es su mejor película, obviamente, pero fue la que más me cuadró para esta propuesta “para todos los públicos” (y en este caso me refiero desde el punto de vista de aceptación por la mayor parte de todos; no voy a meter en estas cosas a Bergman o Tarkovski, como cualquiera puede comprender).

Cuestiones Matemáticas

M – 1.- Si nos dijeran que la suma de un número de cuatro dígitos y sus cuatro dígitos resulta ser 2019. ¿De qué número de cuatro dígitos hablamos?

Llamemos n a dicho número. Es obvio que $n < 2019$. Entonces la cifra de unidad de millar será 1 o 2, y la suma de las tres otras cifras (unidades, decenas y centenas) es como máximo 27 (porque 9 x 3 = 27 en el caso extremo). Por tanto, la suma de los dígitos del número que buscamos es a lo sumo 29, y entonces $n \geq 1990$.

Llamemos S a la suma de n y los dígitos que lo forman, y sea d un dígito cualquiera.

- Si $n = 2010 + d$, entonces $S = 2010 + 2 + 1 + 2d$; cuando $S = 2019$, entonces $d = 3$, posible solución
n
=
2013
.

- Si $n = 2000 + d$, entonces $S = 2000 + 2 + 2d$, con lo que S sería un número par, y nunca podría ser 2019, que es impar.

- Si $n = 1990 + d$, entonces $S = 2009 + 2d$. Cuando $S = 2019$, $d = 5$, posible solución. Entonces $n = \mathbf{1995}$.
- Si $n = 1980 + d$, entonces $S = 1998 + 2d$, y como en el primer caso, S sería par, con lo que nunca podría ser 2019.

- Si $n = 1970 + d$, entonces $S = 1987 + 2d$. Para que S fuera 2019, entonces d debería ser 16, lo cual es absurdo porque
d
es un dígito.

En principio, hay dos posibles soluciones. Después de resolver la siguiente cuestión, la **M – 2**, deduciremos cuál de los dos valores es el buscado.

M – 2.- La diferencia de años entre el número anterior y el año de estreno de la película tiene el mismo número de divisores que el propio año de estreno de la película. ¿Serán suficientes esos datos para determinar dicho año de estreno? Dar un razonamiento a favor o en contra.

Adelantándonos un poco, y utilizando información que posteriormente averiguaremos, como el año de estreno de la película es $1955 = 5 \cdot 17 \cdot 23$, el número de divisores es 8 de acuerdo con una conocida expresión (si $n = p_1^{d1} \cdot p_2^{d2} \cdot \ldots \cdot p_r^{dr}$, entonces el número de divisores de n es el producto

$$div(n) = (d_1 + 1)\,(d_2 + 1)\,\ldots\,(d_r + 1)$$

De las dos posibles soluciones del apartado anterior **M – 1,** como $1995 - 1955 = 40 = 2^3 \cdot 5$ (que tiene 8 divisores también ya que son (3+1) (1+1), de acuerdo con la fórmula anterior), pero $2013 - 1955 = 58 = 2 \cdot 29$, tiene sólo (1+1) (1+1) = 4 divisores. Por tanto, la solución de
M – 1
es
1995
.

Sin ningún otro dato adicional, **no es posible determinar el año** x de estreno si no lo supiéramos, ya que, según el enunciado, lo que debe cumplirse es que
div
(1995 –
x
) =
div
(
x

), y eso lo cumplen un montón de valores de
x
: 1955, 1957, 1961, 1965, 1969, 1971, 1975, 1981, 1985, 1993. En definitiva, que harían falta más datos para determinar el año.

M – 3.- La acción tiene lugar en el siglo de las luces, en un año tal que al ser dividido por 2 y por 4 da resto 1, y al hacerlo por 3 y por 5 da resto 2. ¿A qué año nos referimos?

El siglo de las luces es el siglo XVIII, de modo que buscamos un valor entre 1701 y 1800. Al tener los restos y los divisores, parece un claro ejemplo de utilización del conocido como ***teore ma chino de los restos***
. Veamos si ese resultado nos lleva a la solución. Si
n
es el número que buscamos, los datos que nos dan son

$n \equiv 1 \bmod 2$

$n \equiv 1 \bmod 4$

$n \equiv 2 \bmod 3$

$n \equiv 2 \bmod 5$

La primera condición nos indica que $n = 2k + 1$, para algún valor de k. Sustituyendo ese valor en la tercera condición, tenemos que

$2k + 1 \equiv 2 \bmod 3$

Simplificando llegamos a que $2k \equiv 1 \bmod 3$. Para despejar k, basta con multiplicar la congruencia por un valor que nos dé coeficiente uno para k módulo 3. Eso se logra al multiplicar por 5, ya que $10 \equiv 1 \bmod 3$. Eso nos lleva a que $k \equiv 5 \bmod 3$, y por tanto k es de la forma $k = 3t + 5$, para algún valor de t. Sustituyendo k en la igualdad que teníamos de n, llegamos a que

$$n = 2(3t + 5) + 1 = 6t + 11$$

Del mismo modo que en el paso anterior, sustituimos en la cuarta condición, teniendo que

$$6t + 11 \equiv 2 \bmod 5,$$

es decir, $6t \equiv 1 \bmod 5$. Multiplicando la ecuación por 6, se concluye que $t \equiv 6 \bmod 5$, es decir, que $t = 5r + 6$, para algún valor de r. Sustituyendo ese valor en la última expresión que habíamos deducido para n, se tiene que

$$n = 6\ (5r + 6) + 11 = 30\ r + 47$$

Finalmente, empleando el segundo dato (que me lo he saltado por simple despiste), tendremos que

$30\ r + 47 \equiv 1 \bmod 4$,

o lo que es igual, $30\ r \equiv -46 \bmod 4$, o análogamente, $2r \equiv 2 \bmod 4$, o $r \equiv 1 \bmod 4$. De ahí,

$n = 30(4s + 1) + 47 = 120\ s + 77$

Para $s = 14$ encontramos el único valor entre 1701 y 1800, que resulta ser **1757**.

M – 4.- En un cierto día, la luna se ve con la sombra pasando a través de puntos diametralmente opuestos. Si el centro del arco circular que se está formando se encuentra en la circunferencia de la luna, determinar la proporción exacta de la luna que no está en la sombra. ¿Cuál es dicha proporción (en modo exacto)?

Llamemos r al radio de la luna y C su centro. Sea R el radio del arco circular que forma la sombra y O el centro de dicho arco. Sean P y Q los puntos donde la sombra corta a la circunferencia de la luna. Sea x el área del triángulo POQ, y el área de la región entre PQ y el arco que pasa por P y Q centrado en

O
, y
z
el área de la región limitada entre los dos arcos (o sea el área de la sombra).

Como $PC = CQ = r$, $OP = OQ = R$, y el ángulo POQ es de 90 grados (dado que PQ es un diámetro), entonces
$R = 2r$, y por tanto, $R = \sqrt{2}$
r. Entonces

$x + y = ¼ \pi R^2 = ¼ \pi (\sqrt{2}$
$r)^2 = ½ \pi r^2$.

También se observa que la suma de las superficies y y z es la mitad del área del círculo centrado en C, es decir,

$y + z = ½ \pi r^2$

Entonces $x + y = y + z$, y de ahí se sigue que $x = z$. Como x es igual al área del triángulo rectángulo POQ, entonces

$z = x = ½ (\sqrt{2}\, r)^2 = r^2$.

El área de la región que no está en la sombra es igual al área del círculo completo centrado en
C
menos
z
:

$\pi r^2 - r^2 = r^2 (\pi - 1)$

Por tanto, la proporción exacta de la Luna que no está en sombra es

$$\frac{r^2(\pi-1)}{\pi r^2} = \frac{\pi-1}{\pi}$$

.

Si se desea en porcentaje, esa fracción es aproximadamente 0.6817…, es decir, un 68.17%.

M – 5.- Los carruajes tardaban exactamente tres horas en ir y volver a la ciudad más próxima situada 30 millas al oeste. Llegando octubre, el recorrido se dilataba media hora más. Estimar en ese caso la velocidad del viento.

A falta de más datos (tiempo de descanso en el destino, etc.), supondremos que el carruaje circula a velocidad uniforme. Entonces ésta será

V_{carruaje} = *espacio*/*tiempo* = 60/3 = 20 millas por hora.

Llamemos *w* a la velocidad del viento. En uno de los dos trayectos (ida o vuelta), el carruaje circula a favor del viento, de manera que su velocidad será de 20 + *w*, mientras que en trayecto opuesto será de 20 – *w*. Entonces el tiempo que tarda en cada trayecto será en un caso $\frac{30}{20+w}$, y en el otro $\frac{30}{20-w}$, de modo que en todo el trayecto será

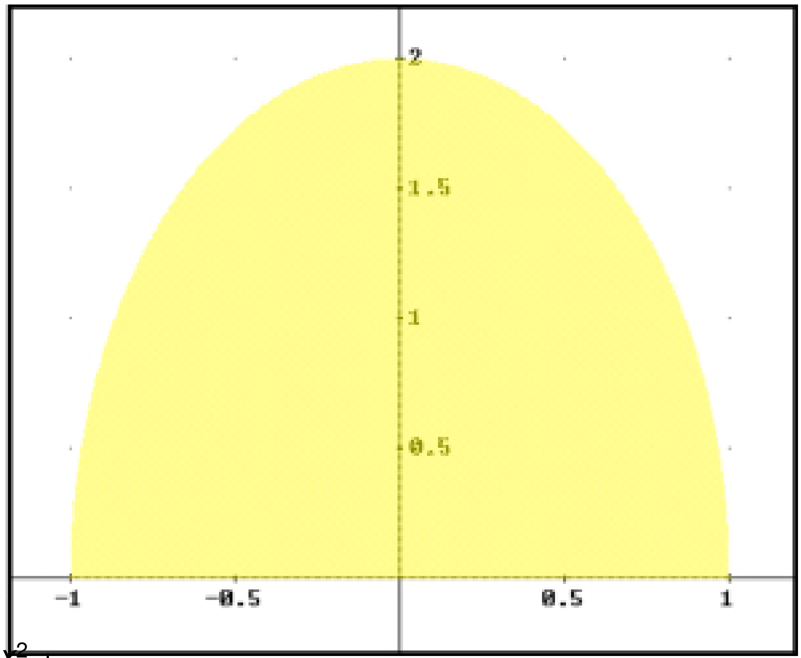
$$\frac{30}{20+w} + \frac{30}{20-w} = 3 + ½$$

Resolviendo la ecuación tenemos que la velocidad del viento será $w = \frac{20\sqrt{7}}{7}$

 7.56 millas por hora.

M – 6.- Si la forma de la suela del zapato (excluyendo el talón, que está más reforzado) sigue la ecuación 4 $x^2 + y^2 \leq 4$, con $y \geq 0$, y el desgaste del material que conforma la suela se expresa en cada punto (x, y) por la función $f(x, y) = 4x^2 + y^2 + 4x – 3y$, determinar en qué punto exactamente se ha hecho el agujero, justificando el resultado.

Si el desgaste de material viene dado por $f(x, y)$, parece lógico pensar que el agujero se hará donde mayor desgaste de la suela se produzca (suela que viene dada por la semielipse positiva centrada en (0, 0) y de semiejes 1 y 2, respectivamente, ya que $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} \leq 4$, con $y \geq 0$, es lo mismo que



$x^2 + \frac{y^2}{2^2}$

... son posibles candidatos a ... de extremo ... F, obtenemos el sistema

$$\begin{cases} 8x + 4 + 8\lambda x = 0 \\ 2y - 3 + 2\lambda y = 0 \\ 4x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

Con un poco de paciencia (despejando y sustituyendo) obtenemos como solución los puntos $(\pm \frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{6}{\sqrt{13}})$.

... $P_n = (x_n, y_n)$ el punto en el que se encuentra después de n movimientos. Así, ... Es fácil comprobar que, para cada ...

$x_{2m-1} = x_{2m} = 1 - r^2 + r^4 - \dots + (-1)^{m-1} r^{2m-2}$

$y_{2m} = y_{2m+1} = r - r^3 + r^5 - \dots + (-1)^{m-1} r^{2m-1}$

Utilizando la suma de los términos de una progresión geométrica, concluimos que

$$x = \frac{1}{1-(-r^2)} = \frac{1}{1+r^2}$$

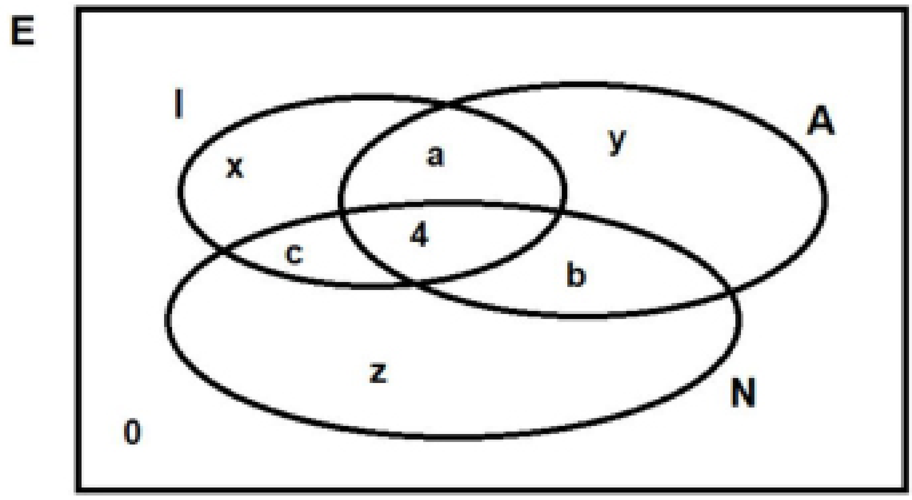
$$y = \frac{r}{1-(-r^2)} = \frac{r}{1+r^2}$$

Así, $AB^2 = x^2 + y^2 = \frac{1}{1+r^2}$

y como $r < 1$

$$AB = \frac{1}{\sqrt{1+r^2}} > \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{10} > \frac{7}{10}$$

M – 8.- ¿Cuántos?



[illegible]

la suma de los n primeros sumandos de una progresión aritmética, se tiene que

$\frac{1+(2n-1)}{2}$

$\binom{7}{4} = \frac{7!}{4!\,(7-4)!} = \frac{7\cdot6\cdot5\cdot4}{4\cdot3\cdot2\cdot1}$

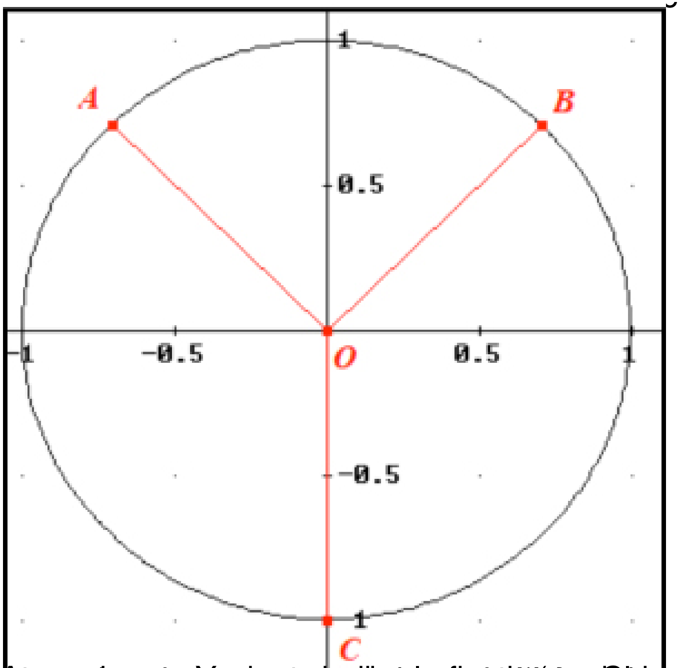
Por tanto, p(4 reyes) = 35

$\frac{4}{52}\cdot\frac{3}{51}\cdot\frac{2}{50}\cdot\frac{48}{49}\cdot\frac{47}{48}\cdot\frac{46}{47}\cdot\frac{45}{46} = \frac{9}{1547}$

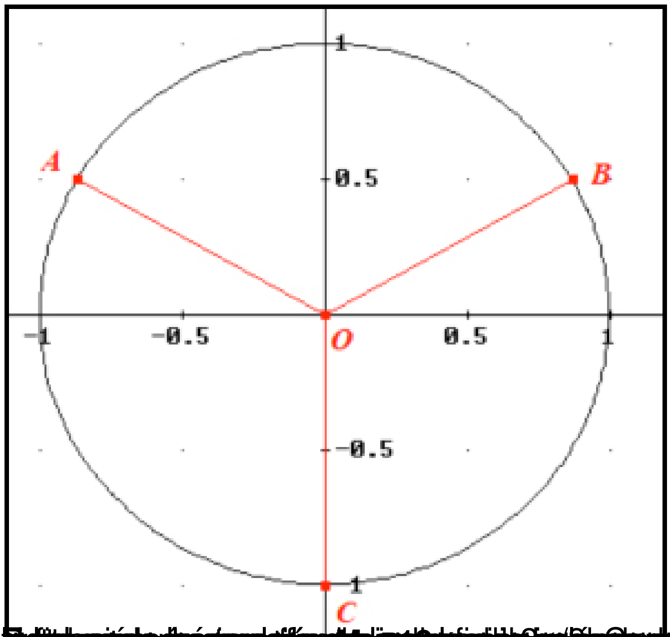
[illegible]

$\frac{2}{1+\sqrt{2}}$

[illegible] círculo en tres regiones. ¿Son iguales? ¿Podrían serlo?



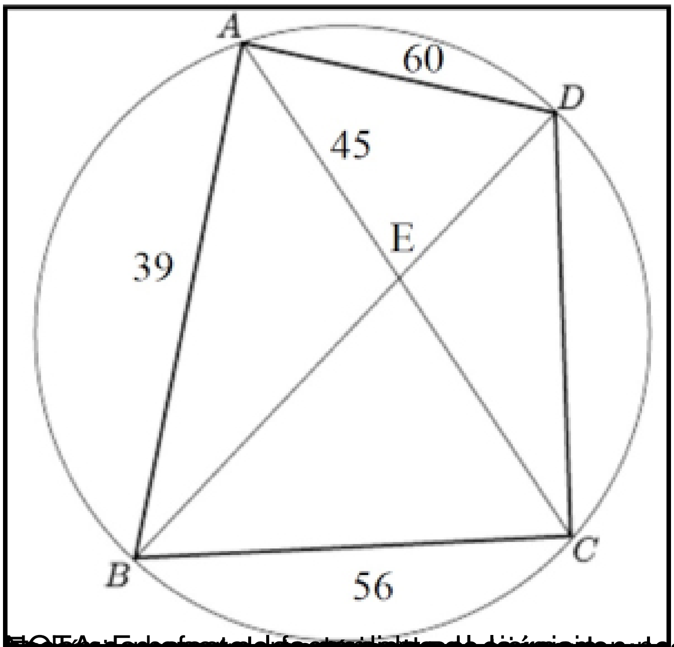
[illegible]



[illegible] tiene por coordenadas ($\frac{-\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$) [illegible] *A*, *B*, *C*? Pues es obvio, ¿cuál es el área del triángulo? El triángulo *ABC* tiene por base $\sqrt{2}$ (ya que es la distancia entre los puntos *A*($\frac{-\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$) y B($\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$)), y por altura 1 + $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (la longitud de OC es obviamente 1 al ser el radio del círculo). Por tanto, el área del triángulo *ABC* (base por altura partido por dos) será:

$\sqrt{2}$ (1 + $\frac{\sqrt{2}}{2}$) $\frac{1}{2}$ = $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$

[illegible] *BD*, determinar la longitud de



NOTA: En el enunciado [illegible] los triángulos *AEB* y *DEC* son semejantes (tienen [illegible]), por tanto,

$\frac{AE}{DE} = \frac{AB}{CD}$, es decir, $\frac{45}{DE} = \frac{39}{CD}$ (1)

Por la misma razón, son semejantes *AED* y *BEC*, por lo que

$\frac{BC}{AD} = \frac{EC}{BD} = \frac{BE}{AE}$ (2)

De la primera y la tercera de estas fracciones, tenemos que $\frac{56}{60} = \frac{BE}{45}$

[illegible] *BE* = 42 [illegible] ***teorema de Ptolomeo*** afirma que [illegible] tenemos que (3)

De (1), se tiene que *CD* = $\frac{39}{45}$ *ED*, y de la segunda igualdad de (2) que *EC* = $\frac{14}{15}$ *ED*. Entonces la igualdad (3) se transforma en

60 • 56 + 39 • $\frac{39}{45}$ *ED* = (42 + *ED*) • (45 + $\frac{14}{15}$ *ED*)

Resolviendo la ecuación se llega a que *ED* = 21 (la solución *ED* = - 75 obviamente la [illegible]), y de ahí, como $\frac{39}{45}$

ED, tenemos que *CD* = $\frac{91}{5}$

[illegible]

CINES

CASABLANCA

HOY, ESTREN

A LAS 5, 8 y 10,45

¡TODA LA FASCINACION DE LA AUTENTICA AVENTURA!
UN TESORO RESCATADO PARA LOS AMANTES DEL CINE.

LA CRITICA, UNANIM

	GUIA DEL OCIO A. Gerina P. López	AVUI Lopez Llavi J. Lorente M. Porter	DIARI DE BARCELONA Jordi Bello	DIRIGIDO POR R. Muni J. M.ª Latorre	EL MON G. Casas	EL PAIS O. Marti	EL PERIODICO J. de Cominges
1 - Los contrabandistas de Moonfleet	*****	*****	*****	*****	*****	*****	*****
2 - Una habitacion con vistas	*****	****	*****	**	****	****	*****
3 - Down by law	****	*****	****	***	*****	****	****
4 - Naufragos	***	****	****	****	****	****	****
5 - El halcon maltes	*****	****	*****	**	**	****	****

Sin la apariencia ni la pretensión de ser una obra de arte. Con un ropaje sencillo, alejado por ig oropeles esteticistas que de las infulas intelectuales. Bajo la más diáfana transparencia narrativa. Co unos contrabandistas y un aventurero como personajes principales. He aquí una de las más bellas, y emocionantes creaciones filmadas en celuloide.

Carlos F. HEREDERO
Cambio 16

Como conclusión baste decir que **Moonfleet** es un film visceral, conmovedor, que apela directamente a los sentidos... y en unos tiempos en los que se confunde la Aventura con la acción, las persecuciones y los héroes infalibles, no podemos menos que recomendar vivamente una película que consigue emocionar tanto con una simple despedida y un adiós en el mar
No se la pierdan. —**CHRIS.**

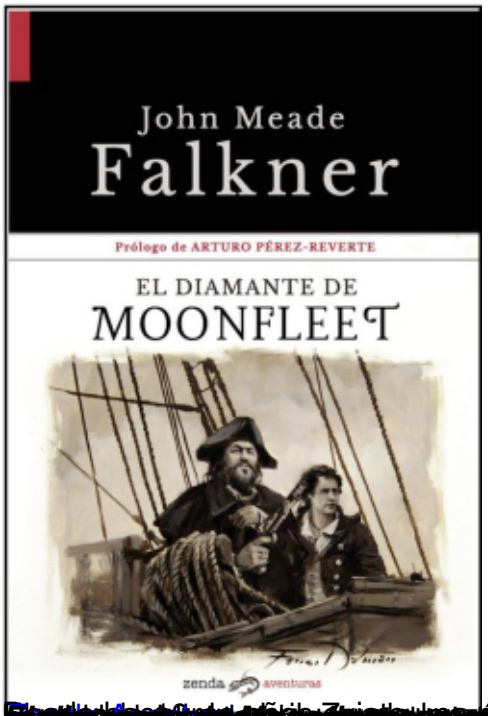
CARTELERA TURIA (Valencia)

Moonfleet es de esas películas que se devoran con tal transparencia que el esp no cae en sus negruras y opacidades hasta después de la proyección, en la que ha embebido por la mágica y matemática fluencia de la aventura. Se contempla *M* como se suspira.

Angel FERNANDEZ SANTOS
EL PAIS

UN FILM DE FRITZ LANG

TODOS LOS PUBLICOS



Alfonso Jesús Población Sáez