Una nueva edición de este concurso, en el que he vuelto a disfrutar con las ocurrentes y meritorias respuestas de los participantes. Desgranamos a continuación todas las cuestiones.

En esta ocasión pretendía que la película fuera más conocida que en años precedentes, y opté por ***Doctor Zhivago***, la versión dirigida por el gran David Lean en 1965. No se encuentra entre mis favoritas de este director (aunque me parece muy relevante prácticamente toda su obra), pero reconozco que es, estéticamente y argumentalmente una producción excepcional, rodada como todo el mundo sabe en su mayor parte en nuestro país. Así pues, la película ha ofrecido poca dificultad a los concursantes;

Cuestiones Matemáticas

M – 1.- Un grupo de diez amigos quedan para ir al cine. A la vez, un grupo de otros nueve amigos van a la misma película también juntos. Catorce de esas diecinueve personas compran un cucurucho de palomitas. El coste total de la entrada a la película más el

cucurucho de palomitas de maíz para uno de los dos grupos resultó ser el mismo que para el otro grupo. Si la entrada al cine costaba 6 euros, ¿cuáles son los posibles precios de las palomitas?

Todos los concursantes han respondido correctamente a esta cuestión, la más sencilla, para animar al personal.

Dado que el grupo más grande necesita comprar solo un boleto más que el grupo más pequeño, la diferencia de precio para las entradas entre los grupos es de 6 €. Por tanto, el grupo más pequeño pagó 6 € más por palomitas de maíz que el grupo más grande para compensar la diferencia. Así, el grupo más pequeño debe haber comprado más de la mitad de las 14 bolsas de palomitas de maíz, por lo menos 8 bolsas. Por otro lado, como cada persona sólo puede comprar como máximo un cucurucho, por lo menos 9 bolsas. Las posibilidades del precio de las palomitas son entonces:

Grupo más grande	Grupo más pequeño	Diferencia	Precio por cucurucho	
5 cucuruchos	9 cucuruchos	4	6 €/4 =	1
6 cucuruchos	8 cucuruchos	2	6 €/2 =	**3.00 €**

M – 2.- Los números 100231 y 25561 proporcionan el mismo resto, el número de largometrajes dirigidos por el realizador de la película, cuando se dividen por el año de estreno de la película que nos ocupa. ¿De qué año es la película? ¿Cuántas películas dirigió el director?

Todos los concursantes dieron la respuesta correcta, pero uno lo hizo sin explicación matemática alguna. Recordemos que en este apartado es preciso incluir una prueba. Dar simplemente la solución no sirve dado que, encontrada la película a partir de la resolución de otras cuestiones, indicar fecha de estreno y películas del director no tiene demasiado misterio ya que son datos localizables fácilmente. En este caso de los diez puntos, sólo se dan la mitad, cinco.

Una forma de resolverlo, utilizando exclusivamente los datos del enunciado es la siguiente:

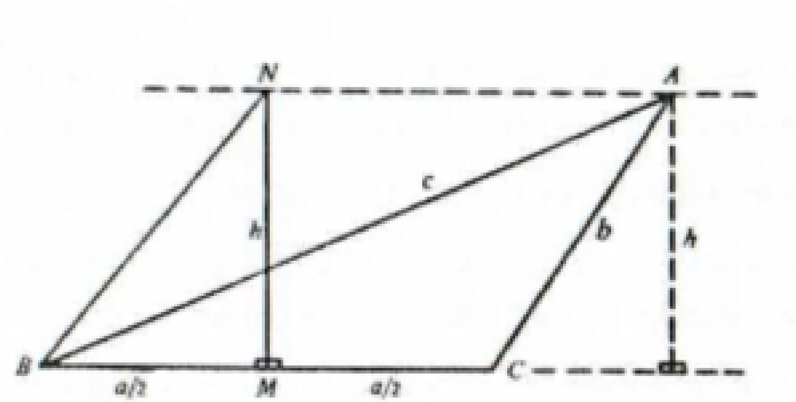
Del enunciado del problema se deduce que, llamando x al divisor (el año de estreno de la película) e y al resto (número de películas dirigidas por el realizador), se tiene que

$ax + y = 100231$

$bx + y = 25561$

Al restar ambas ecuaciones, tenemos que $x(a - b) = 74670 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 19 \cdot 131$. Si multiplicamos esos factores, observamos que el único año de producción posible (el cine se descubrió en 1895 y la producción nos llega hasta 2018) es $3 \cdot 5 \cdot 131 =$ **1965**. De ahí se deduce inmediatamente el número de películas del director, **16**.

M – 3.- Demostrar que, si un tetraedro solamente tiene un lado mayor que la unidad, entonces su volumen es menor o igual que un octavo. ¿Podría ser el ejercicio que muestra la imagen de la película?



Sean A, B, C, D los vértices del tetraedro con todos los lados menores o iguales a la unidad. AD. Denotaremos por a, b, c los lados del triángulo ABC y h la altura ... cuadrado la desigualdad, tenemos que

$$h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \le c^2.$$

Como, por hipótesis, $c \le 1$, esto nos lleva a que $h^2 \le 1 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$

y de ahí a que

$$h \le \sqrt{1 - \frac{a^2}{4}}$$

Sea k la altura desde D a BC en el triángulo DBC, cuyos lados también tienen longitudes menores o iguales a la unidad. Un razonamiento análogo al anterior muestra que

... altura del tetraedro desde D al triángulo ABC considerado como base, es como máximo k,

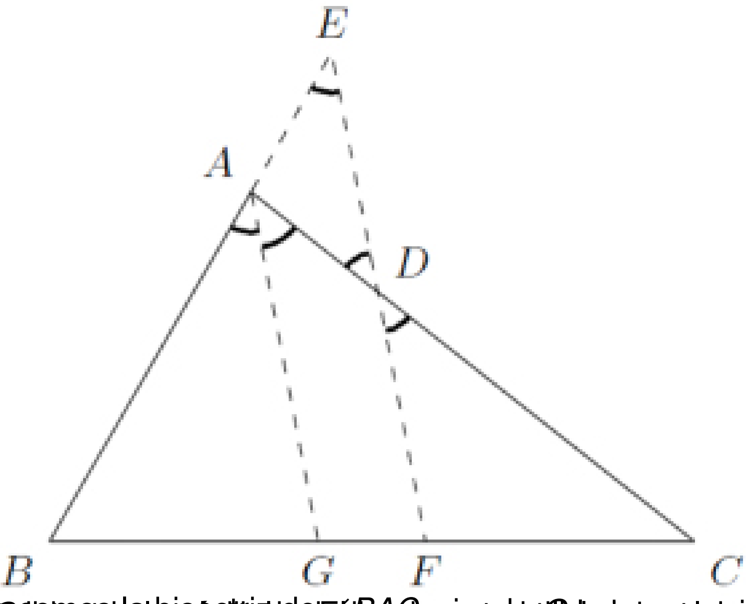
$$V \le \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}ah\right)k \le \frac{1}{6}a\sqrt{1-\frac{a^2}{4}}\sqrt{1-\frac{a^2}{4}} = \frac{1}{6}a\left(1+\frac{a}{2}\right)\left(1-\frac{a}{2}\right)$$

Como $a \le 1$, tenemos que

$$V \le \frac{1}{6}a\frac{3}{2}\left(1-\frac{a}{2}\right) = \frac{1}{8}(2a-a^2) = \frac{1}{8}\left(1-(a-1)^2\right) \le \frac{1}{8}$$

... ABC tiene lados $|AB| = 5$, $|AC| = 7$, y $|BC| = 8$. El punto D se encuentra ...

... $|CD| = 2$. Análogamente, $|AE| = |BE| - |AB| = 4$ ... en el triángulo ... $\angle DAE = \angle AED + \angle ADE = 2\angle AED$



Trazamos la bisectriz de BAC ... con BC ... Como ... son paralelos, el triángulo ABG es semejante al triángulo EBF, y por tanto

$$\frac{|BG|}{|GF|} = \frac{|BA|}{|AE|} = \frac{5}{2}$$

Análogamente, los triángulos CAG y CDF son semejantes, de donde

$$\frac{|GF|}{|FC|} = \frac{|AD|}{|DC|} = \frac{2}{5}$$

Teniendo en cuenta estas proporciones, para algún valor a, tenemos que $|BG| = 5a$, $|GF| = 2a$,

... siguientes integrales de algún modo "no convencional"

$$\int_2^4 \frac{\sqrt{ln(9-x)}}{\sqrt{ln(9-x)}+\sqrt{ln(x+3)}}dx \qquad \int \frac{sen\,x}{sen\,x+cos\,x}dx \qquad \int \frac{dx}{1+sen(\pi x)}$$

... lleva al cambio $t = 6 - x$. Con él el extremo $x = 2$ va a parar a $t = 4$, y $x = 4$ a $t = 2$. En

$$I = \int_2^4 \frac{\sqrt{ln(9-x)}}{\sqrt{ln(9-x)}+\sqrt{ln(x+3)}}dx = -\int_4^2 \frac{\sqrt{\ln(t+3)}}{\sqrt{\ln(t+3)}+\sqrt{\ln(9-t)}}dt$$

... sumamos los extremos de integración, y

$$2\,I = \int_2^4 \frac{\sqrt{\ln(9-x)}+\sqrt{\ln(x+3)}}{\sqrt{\ln(9-x)}+\sqrt{\ln(x+3)}}dx = \int_2^4 dx = 4-2$$

Para el caso de la segunda integral, el truco consiste en darla un nombre, por ejemplo

$$I_1 = \int \frac{sen\,x}{sen\,x+cos\,x}dx$$

y sacarnos de la chistera" otra integral "parecida"

$$I_2 = \int \frac{cos\,x}{sen\,x+cos\,x}dx$$

Gracias a las propiedades de las integrales tenemos entonces que $I_1 + I_2 = \int dx = x + C_1$. Además

$$\int \frac{sen\,x - \cos x}{sen\,x+\cos x}dx$$

... deducimos el valor de ambas (dos por el precio de una, ja ja ja).

... $sen(\pi x) = cos(\pi/2 - \pi x)$, y entonces $1 + sen(\pi x) = 2\,cos^2($ ... al inmediata, y deshaciendo el cambio, se tiene que

$$I = -\frac{1}{\pi}tg\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi x}{2}\right)+Cte.$$

... era

$$\frac{4^3}{50\times51\times52}$$

Por otro lado, hay seis órdenes posibles de obtenerlos: KQJ, KJQ, QKJ, QJK, JKQ, JQK. Por tanto la probabilidad es $6\times$

$$\frac{4^3}{50\times51\times52}$$

$$= \frac{16}{5525}$$

También se puede razonar así: el número de formas de elegir tres cartas cualesquiera del mazo de 52 es

$$\binom{52}{3}$$

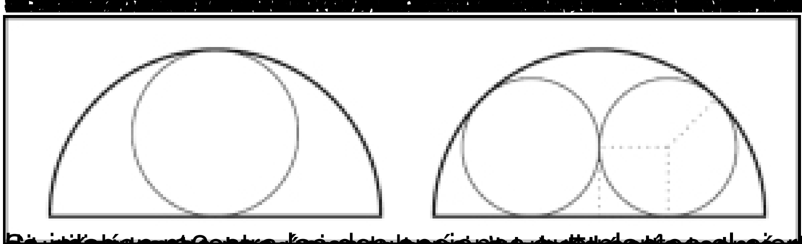
. Elegir un rey de los cuatro posibles es

$$\binom{4}{1}$$

y análogamente una reina y una sota. Por tanto, la probabilidad conjunta es

$$\frac{\binom{4}{1}\binom{4}{1}\binom{4}{1}}{\binom{52}{3}} = \frac{16}{5525}$$

... s depósitos que, en su caso, fuese necesario,



... Utilizando el teorema de Pitágoras, la diagonal del cuadrado ... de la imagen sería r. El radio del semicírculo sería por tanto

$r + r = ($ $\sqrt{2}$ $+ 1)\ r$. Entonces (

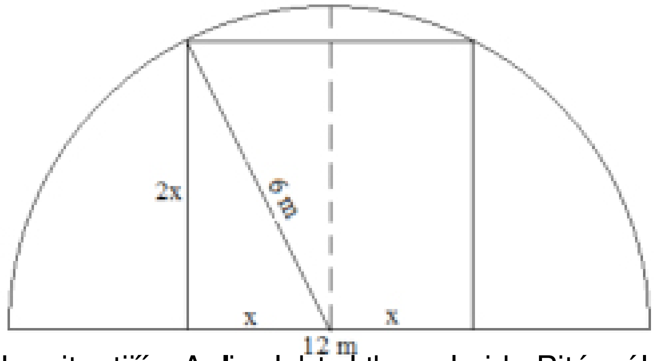
$r = 6/(\sqrt{2} - 6$, y

$+1) = 6\sqrt{2}$

La superficie de las dos tuberías tendría por tanto área

$- 6)^2 = \pi\,(216\sqrt{2} - 144$

¿... la cámara de sección cuadrada?



La situación. Aplicando el teorema de Pitágoras, tenemos que $6^2 = x^2 + (2x)^2$, y de ahí la raíz $x = \frac{6}{5}\sqrt{5}$

El lado del cuadrado inscrito será entonces $\frac{12}{5}\sqrt{5}$

, y la sección de agua desalojada será entonces $\frac{144}{5}$

[illegible]

y la función a optimizar será la que nos proporciona el área del rectángulo, esto es

$f(x) = 2x\sqrt{36 - x^2}$

[illegible]

, $x = -3\sqrt{2}$

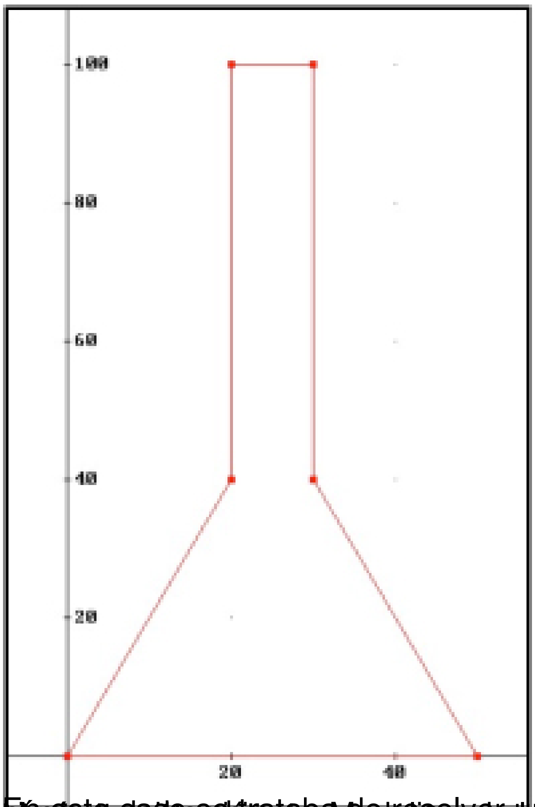
[illegible]

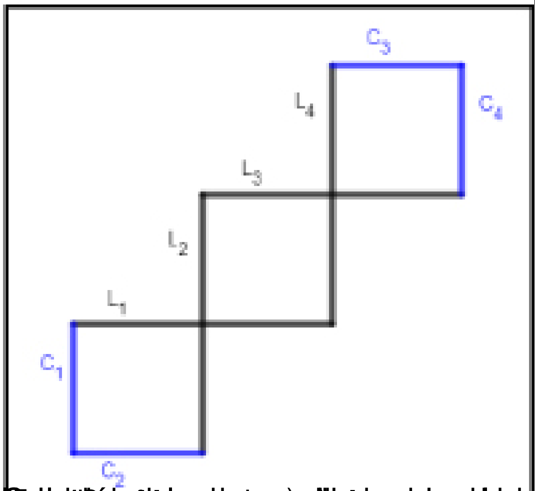
$) = 36$, $f(-3\sqrt{2}$

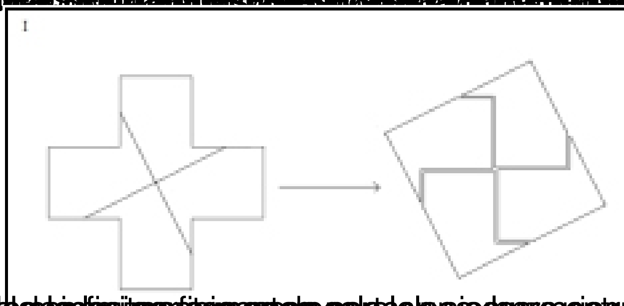
$) = -36$,

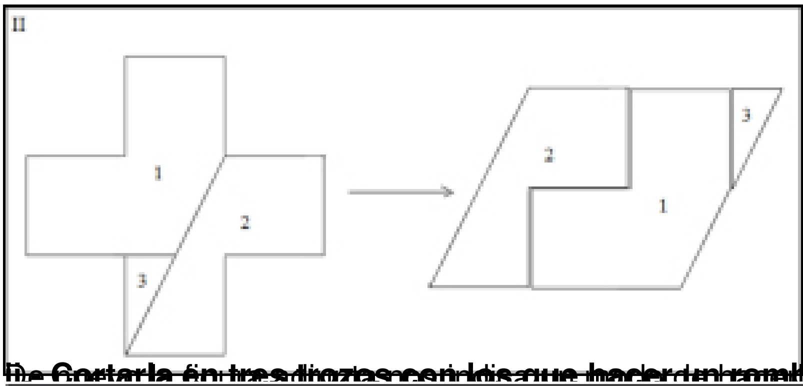
de modo que el máximo absoluto se alcanza para $x = 3\sqrt{2}$

[illegible]

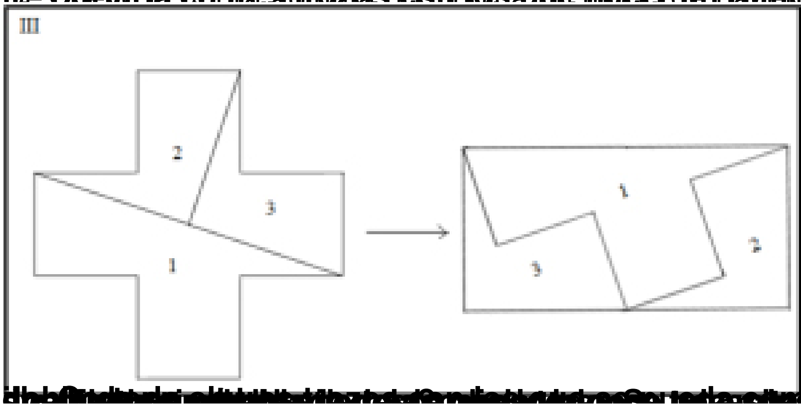

100
80
60
40
20
20
40


C3
C4
L4
L3
L2
L1
C1
C2

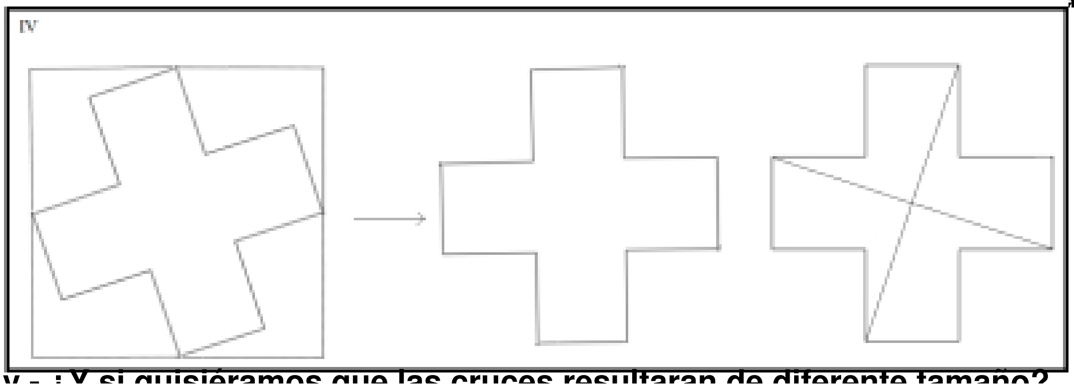




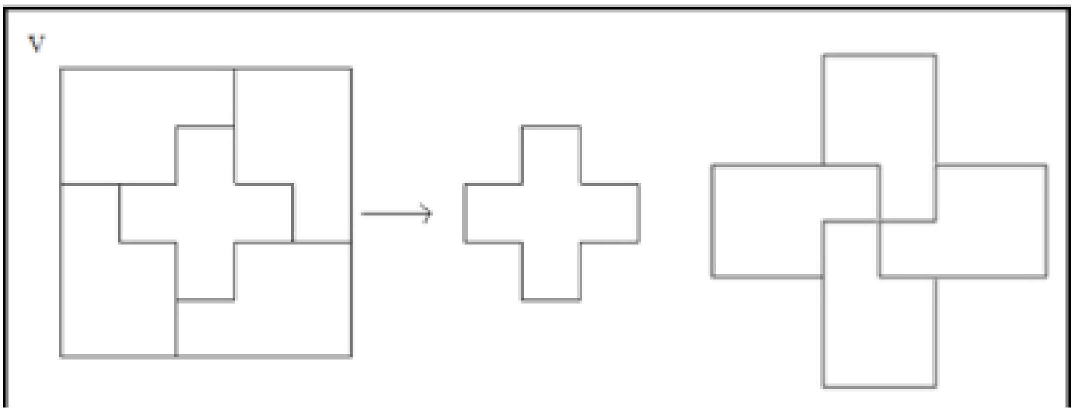
Cortarla en tres piezas con las que hacer un romboide.

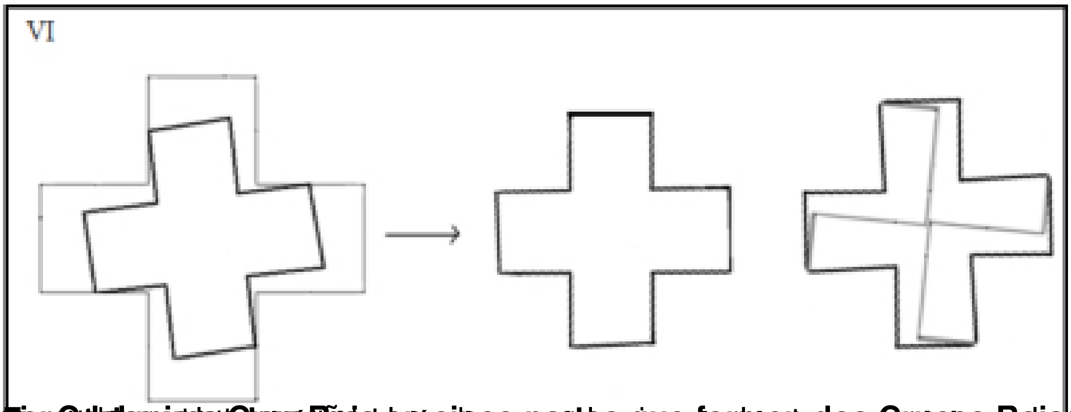


[illegible]

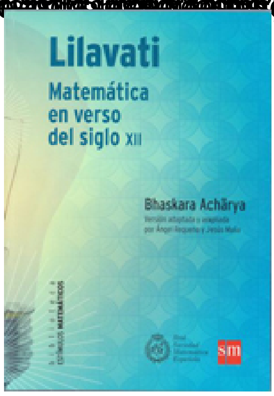


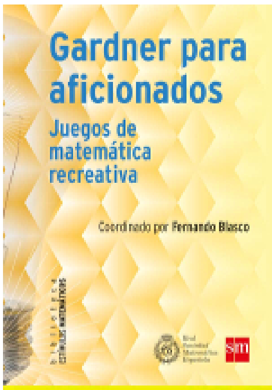
V.- ¿Y si quisiéramos que las cruces resultaran de diferente tamaño?

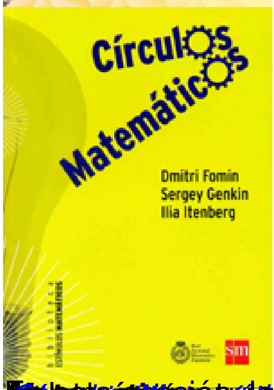



VI


نهر الحب
فاتن حمامة • عمر الشريف
فؤاد المهندس • زكي رستم


Lilavati
Matemática en verso del siglo XII
Bhaskara Achārya
sm


Gardner para aficionados
Juegos de matemática recreativa
Coordinado por Fernando Blasco
sm


Círculos Matemáticos
Dmitri Fomin
Sergey Genkin
Ilia Itenberg
sm