

### 133. SOLUCIÓN CONCURSO DEL VERANO DE 2018

Escrito por Alfonso Jesús Población Sáez  
Jueves 13 de Septiembre de 2018 22:00

---

*Una nueva edición de este concurso, en el que he vuelto a disfrutar con las ocurrentes y meritorias respuestas de los participantes. Desgranamos a continuación todas las cuestiones.*



En esta ocasión pretendía que la película fuera más conocida que en años precedentes, y opté por **Doctor Zhivago**, la versión dirigida por el gran David Lean en 1965. No se encuentra entre mis favoritas de este director (aunque me parece muy relevante prácticamente toda su obra), pero reconozco que es, estéticamente y argumentalmente una producción excepcional, rodada como todo el mundo sabe en su mayor parte en nuestro país. Así pues, la película ha ofrecido poca dificultad a los concursantes;

#### Cuestiones Matemáticas

**M – 1.- Un grupo de diez amigos quedan para ir al cine. A la vez, un grupo de otros nueve amigos van a la misma película también juntos. Catorce de esas diecinueve personas compran un cucurucho de palomitas. El coste total de la entrada a la película más el**

### 133. SOLUCIÓN CONCURSO DEL VERANO DE 2018

Escrito por Alfonso Jesús Población Sáez  
Jueves 13 de Septiembre de 2018 22:00

---

**cucurucho de palomitas de maíz para uno de los dos grupos resultó ser el mismo que para el otro grupo. Si la entrada al cine costaba 6 euros, ¿cuáles son los posibles precios de las palomitas?**

Todos los concursantes han respondido correctamente a esta cuestión, la más sencilla, para animar al personal.

Dado que el grupo más grande necesita comprar solo un boleto más que el grupo más pequeño, la diferencia de precio para las entradas entre los grupos es de 6 €. Por tanto, el grupo más pequeño pagó 6 € más por palomitas de maíz que el grupo más grande para compensar la diferencia. Así, el grupo más pequeño debe haber comprado más de la mitad de las 14 bolsas de palomitas de maíz, por lo menos 8 bolsas. Por otro lado, como cada persona sólo puede comprar como máximo un cucurucho, por lo menos 9 bolsas. Las posibilidades del precio de las palomitas son entonces:

| Grupo más grande     | Grupo más pequeño | Diferencia |               |
|----------------------|-------------------|------------|---------------|
| Precio por cucurucho |                   |            |               |
| 5 cucuruchos         | 9 cucuruchos      | 4          | 6 €/4 =       |
| 6 cucuruchos         |                   |            |               |
| 8 cucuruchos         | 2                 | 6 €/2 =    | <b>3.00 €</b> |

**M – 2.- Los números 100231 y 25561 proporcionan el mismo resto, el número de largometrajes dirigidos por el realizador de la película, cuando se dividen por el año de estreno de la película que nos ocupa. ¿De qué año es la película? ¿Cuántas películas dirigió el director?**

Todos los concursantes dieron la respuesta correcta, pero uno lo hizo sin explicación matemática alguna. Recordemos que en este apartado es preciso incluir una prueba. Dar simplemente la solución no sirve dado que, encontrada la película a partir de la resolución de

### 133. SOLUCIÓN CONCURSO DEL VERANO DE 2018

Escrito por Alfonso Jesús Población Sáez  
Jueves 13 de Septiembre de 2018 22:00

---

otras cuestiones, indicar fecha de estreno y películas del director no tiene demasiado misterio ya que son datos localizables fácilmente. En este caso de los diez puntos, sólo se dan la mitad, cinco.

Una forma de resolverlo, utilizando exclusivamente los datos del enunciado es la siguiente:

Del enunciado del problema se deduce que, llamando  $x$  al divisor (el año de estreno de la película) e  $y$  al resto (número de películas dirigidas por el realizador), se tiene que

$$ax + y = 100231$$

$$bx + y = 25561$$

Al restar ambas ecuaciones, tenemos que  $x(a - b) = 74670 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 19 \cdot 131$ . Si multiplicamos esos factores, observamos que el único año de producción posible (el cine se descubrió en 1895 y la producción nos llega hasta 2018) es  $3 \cdot 5 \cdot 131 =$

**1965**

. De ahí se deduce inmediatamente el número de películas del director,

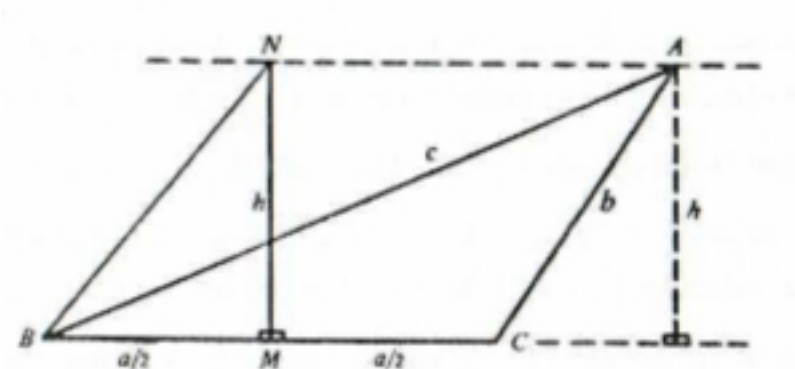
**16**

.

**M – 3.- Demostrar que, si un tetraedro solamente tiene un lado mayor que la unidad, entonces su volumen es menor o igual que un octavo. ¿Podría ser el ejercicio que muestra la imagen de la película?**

### 133. SOLUCIÓN CONCURSO DEL VERANO DE 2018

Escrito por Alfonso Jesús Población Sáez  
Jueves 13 de Septiembre de 2018 22:00



Sean  $A, B, C, D$  los vértices del tetraedro, son todos los lados menores o iguales a la unidad, es decir,  $AB \leq 1, AC \leq 1, BC \leq 1, AD \leq 1, BD \leq 1, CD \leq 1$ . Como los radios del triángulo  $ABC$  y  $h$  la altura, tenemos que

$$h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \leq c^2.$$

Como, por hipótesis,  $c \leq 1$ , esto nos lleva a que  $h^2 \leq 1 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2$$

de ahí que

$$h \leq \sqrt{1 - \frac{a^2}{4}}$$

Sean  $k$  la altura desde  $D$  al triángulo  $ABC$  y  $l$  la altura desde  $A$  al triángulo  $BCD$ . Como los radios del triángulo  $ABC$  y  $h$  la altura, tenemos que

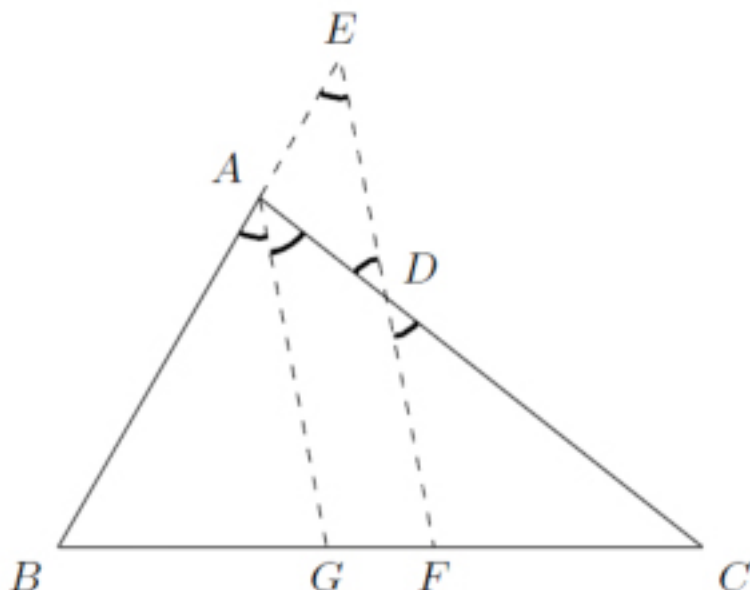
La altura del tetraedro desde  $D$  al triángulo  $ABC$  considerado como base, es como máximo  $k$ ,

$$V \leq \frac{1}{3} \left( \frac{1}{2} ah \right) k \leq \frac{1}{6} a \sqrt{1 - \frac{a^2}{4}} \sqrt{1 - \frac{a^2}{4}} = \frac{1}{6} a \left( 1 - \frac{a^2}{4} \right)$$

Como  $3 < 1$ , tenemos que

$$V \leq \frac{1}{6} a \left( 1 - \frac{a^2}{4} \right) = \frac{1}{6} (2a - a^3) = \frac{1}{6} (1 - (a-1)^2) \leq \frac{1}{6}$$

El tetraedro  $ABCD$  tiene los lados  $AB, AC, AD, BC, BD, CD$  como máximo 1. Por lo tanto, el tetraedro  $ABCD$  tiene los lados  $AB, AC, AD, BC, BD, CD$  como máximo 1. El punto  $D$  se encuentra a una distancia de  $1$  de  $A, B, C$ . Como los radios del triángulo  $ABC$  y  $h$  la altura, tenemos que



Tras la construcción de  $E$  y  $F$  como la intersección de la mediatriz de  $BC$  como

$$\frac{|BG|}{|GF|} = \frac{|BA|}{|AE|} = \frac{5}{2}$$

Análogamente, los triángulos  $CAG$  y  $CDF$  son semejantes, de donde

### 133. SOLUCIÓN CONCURSO DEL VERANO DE 2018

Escrito por Alfonso Jesús Población Sáez  
Jueves 13 de Septiembre de 2018 22:00

$$\frac{|GF|}{|FC|} = \frac{|AD|}{|DC|} = \frac{2}{5}$$

Tomando en cuenta estas proporciones, para algún valor  $a$ , tenemos que  $|BG| = 5a$ ,  $|GF| = 2a$ ,  $|AD| = 2a$  y  $|DC| = 5a$ .

Entonces, los dos integrales que nos dan el área buscada son  $\int_2^4 \frac{\sqrt{\ln(9-x)}}{\sqrt{\ln(9-x)} + \sqrt{\ln(x+3)}} dx$  y  $\int_2^4 \frac{\sqrt{\ln(x+3)}}{\sqrt{\ln(9-x)} + \sqrt{\ln(x+3)}} dx$ . Haciendo el cambio  $t = 9 - x$  en el primer integral, se tiene que  $x = 9 - t$  y  $dx = -dt$ . Entonces, el primer integral se convierte en  $\int_5^7 \frac{\sqrt{\ln(t)}}{\sqrt{\ln(t)} + \sqrt{\ln(10-t)}} dt$ . Haciendo el cambio  $t = 10 - u$  en el segundo integral, se tiene que  $x = 10 - u$  y  $dx = -du$ . Entonces, el segundo integral se convierte en  $\int_6^8 \frac{\sqrt{\ln(10-u)}}{\sqrt{\ln(t)} + \sqrt{\ln(10-u)}} du$ . Haciendo el cambio  $t = 10 - u$  en el primer integral, se tiene que  $x = 10 - t$  y  $dx = -dt$ . Entonces, el primer integral se convierte en  $\int_6^8 \frac{\sqrt{\ln(t)}}{\sqrt{\ln(t)} + \sqrt{\ln(10-t)}} dt$ . Haciendo el cambio  $t = 10 - u$  en el segundo integral, se tiene que  $x = 10 - u$  y  $dx = -du$ . Entonces, el segundo integral se convierte en  $\int_6^8 \frac{\sqrt{\ln(10-u)}}{\sqrt{\ln(t)} + \sqrt{\ln(10-u)}} du$ .

Entonces, los dos integrales que nos dan el área buscada son  $\int_2^4 \frac{\sqrt{\ln(9-x)}}{\sqrt{\ln(9-x)} + \sqrt{\ln(x+3)}} dx$  y  $\int_2^4 \frac{\sqrt{\ln(x+3)}}{\sqrt{\ln(9-x)} + \sqrt{\ln(x+3)}} dx$ . Haciendo el cambio  $t = 9 - x$  en el primer integral, se tiene que  $x = 9 - t$  y  $dx = -dt$ . Entonces, el primer integral se convierte en  $\int_5^7 \frac{\sqrt{\ln(t)}}{\sqrt{\ln(t)} + \sqrt{\ln(10-t)}} dt$ . Haciendo el cambio  $t = 10 - u$  en el segundo integral, se tiene que  $x = 10 - u$  y  $dx = -du$ . Entonces, el segundo integral se convierte en  $\int_6^8 \frac{\sqrt{\ln(10-u)}}{\sqrt{\ln(t)} + \sqrt{\ln(10-u)}} du$ . Haciendo el cambio  $t = 10 - u$  en el primer integral, se tiene que  $x = 10 - t$  y  $dx = -dt$ . Entonces, el primer integral se convierte en  $\int_6^8 \frac{\sqrt{\ln(t)}}{\sqrt{\ln(t)} + \sqrt{\ln(10-t)}} dt$ . Haciendo el cambio  $t = 10 - u$  en el segundo integral, se tiene que  $x = 10 - u$  y  $dx = -du$ . Entonces, el segundo integral se convierte en  $\int_6^8 \frac{\sqrt{\ln(10-u)}}{\sqrt{\ln(t)} + \sqrt{\ln(10-u)}} du$ .

$$2I = \int_2^4 \frac{\sqrt{\ln(9-x)} + \sqrt{\ln(x+3)}}{\sqrt{\ln(9-x)} + \sqrt{\ln(x+3)}} dx = \int_2^4 dx = 4 - 2 = 2$$

Por lo tanto, el valor de la segunda integral, el truco consiste en darle un nombre, por ejemplo

$$I_1 = \int_2^4 \frac{\sqrt{\ln(9-x)}}{\sqrt{\ln(9-x)} + \sqrt{\ln(x+3)}} dx$$

$$I_2 = \int_2^4 \frac{\sqrt{\ln(x+3)}}{\sqrt{\ln(9-x)} + \sqrt{\ln(x+3)}} dx$$

Gracias a las propiedades de las integrales tenemos entonces que  $I_1 + I_2 = \int_2^4 dx = x + C_1$ .

$$\int_2^4 \frac{\sqrt{\ln(9-x)}}{\sqrt{\ln(9-x)} + \sqrt{\ln(x+3)}} dx + \int_2^4 \frac{\sqrt{\ln(x+3)}}{\sqrt{\ln(9-x)} + \sqrt{\ln(x+3)}} dx = \int_2^4 dx = x + C_1$$

Por lo tanto, el valor de la segunda integral, el truco consiste en darle un nombre, por ejemplo

$$I = -\frac{1}{2} \lg\left(\frac{4}{2} - \frac{\pi x}{2}\right) + Cte.$$

Entonces, el valor de la segunda integral, el truco consiste en darle un nombre, por ejemplo

$$= \frac{16}{5525}$$

Entonces, el valor de la segunda integral, el truco consiste en darle un nombre, por ejemplo

$$\binom{52}{3}$$

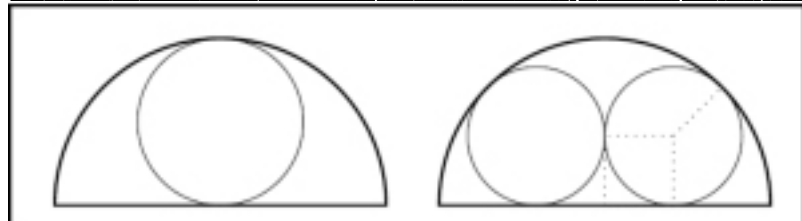
. Elegir un rey de los cuatro posibles es

$$\binom{4}{1}$$

y análogamente una reina y una sota. Por tanto, la probabilidad conjunta es

$$\frac{\binom{4}{1} \binom{4}{1} \binom{4}{1}}{\binom{52}{3}} = \frac{16}{5525}$$

Entonces, el valor de la segunda integral, el truco consiste en darle un nombre, por ejemplo



Entonces, el valor de la segunda integral, el truco consiste en darle un nombre, por ejemplo

r. El radio del semicírculo sería por tanto

$$r + r = \sqrt{2}$$

+ 1) r. Entonces (

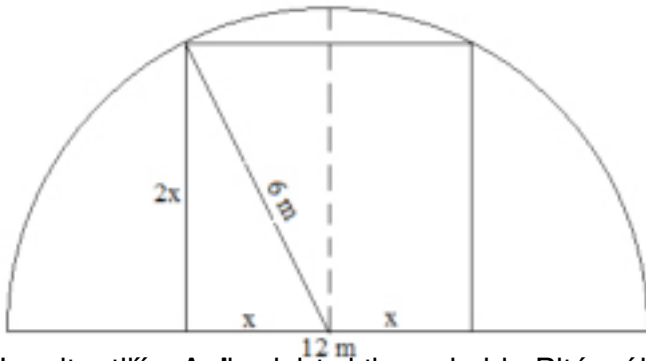
### 133. SOLUCIÓN CONCURSO DEL VERANO DE 2018

Escrito por Alfonso Jesús Población Sáez  
Jueves 13 de Septiembre de 2018 22:00

$$f(-6) = 6^2 + 1 = 37$$

El área de las dos tuberías tendría por tanto área  
 $2 \cdot \pi \cdot 6^2 = \pi (216 - 144)$

En la b. se ve que la tubería desalojada es una tubería de sección cuadrada?



En la situación b. aplicamos el teorema de Pitágoras, obteniendo que  $6^2 = x^2 + (2x)^2$ , y de aquí se deduce que

$$x = \frac{6}{5}\sqrt{5}$$

El lado del cuadrado inscrito será entonces  $\frac{12}{5}\sqrt{5}$

, y la sección de agua desalojada será entonces  $\frac{144}{5}$

En la b. se ve que la tubería desalojada es una tubería de sección cuadrada?

La función a optimizar será la que nos proporciona el área del rectángulo, esto es

$$A(x) = x \cdot \sqrt{36 - x^2}$$

Derivando y igualando a 0 se obtiene la ecuación  $x \cdot \sqrt{36 - x^2} = 0$ . Esto nos da

$$x = -3$$

Por lo tanto, el máximo absoluto se alcanza en  $x = 3$ , y el mínimo absoluto se alcanza en  $x = -3$ .

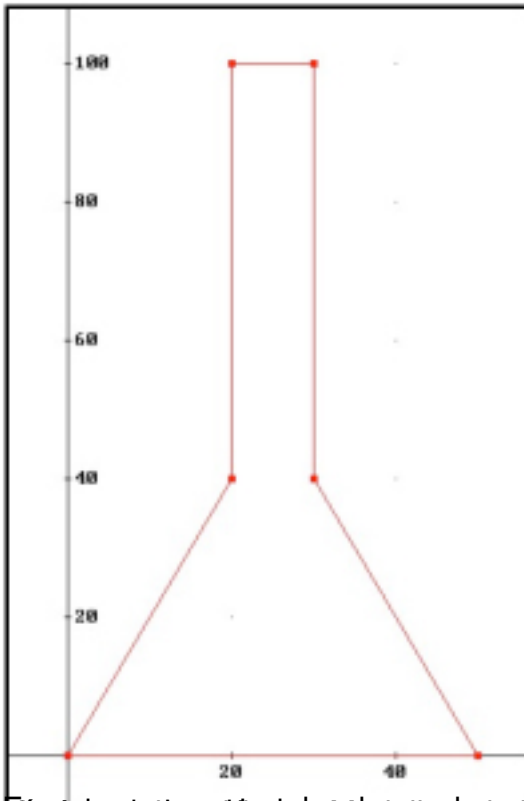
$$f(3) = 36, f(-3) = 36$$

De modo que el máximo absoluto se alcanza para  $x = 3$

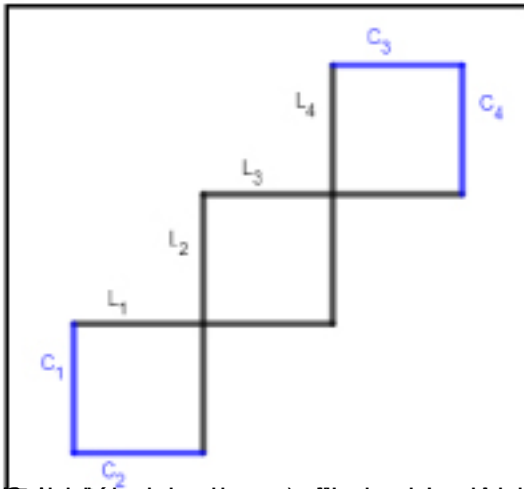
El área máxima del rectángulo es  $36$  unidades cuadradas. El área mínima del rectángulo es  $36$  unidades cuadradas.

### 133. SOLUCIÓN CONCURSO DEL VERANO DE 2018

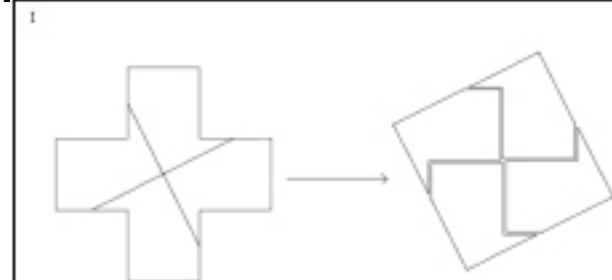
Escrito por Alfonso Jesús Población Sáez  
Jueves 13 de Septiembre de 2018 22:00



En este caso, el gráfico de la función de programación lineal. De cada uno de los vértices de la función, se puede obtener un problema de programación lineal. En este caso, el problema de programación lineal que aparece en la imagen es el problema de programación lineal que aparece en la imagen. El problema de programación lineal que aparece en la imagen es el problema de programación lineal que aparece en la imagen.



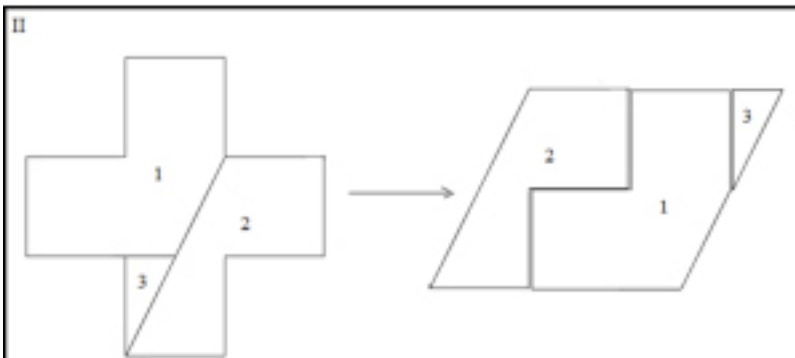
En este caso, el gráfico de la función de programación lineal. De cada uno de los vértices de la función, se puede obtener un problema de programación lineal. En este caso, el problema de programación lineal que aparece en la imagen es el problema de programación lineal que aparece en la imagen.



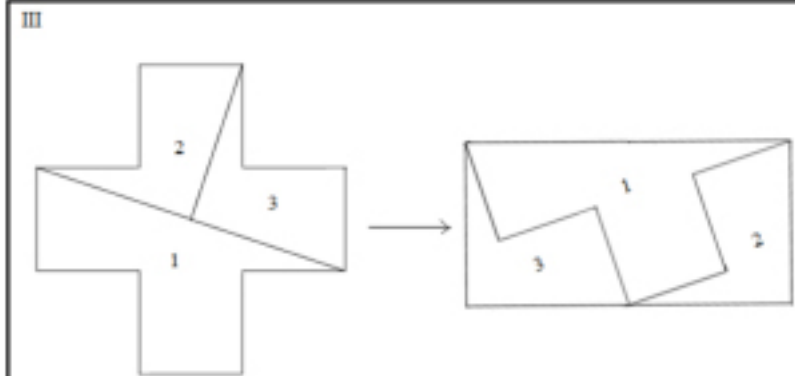
En este caso, el gráfico de la función de programación lineal. De cada uno de los vértices de la función, se puede obtener un problema de programación lineal. En este caso, el problema de programación lineal que aparece en la imagen es el problema de programación lineal que aparece en la imagen.

### 133. SOLUCIÓN CONCURSO DEL VERANO DE 2018

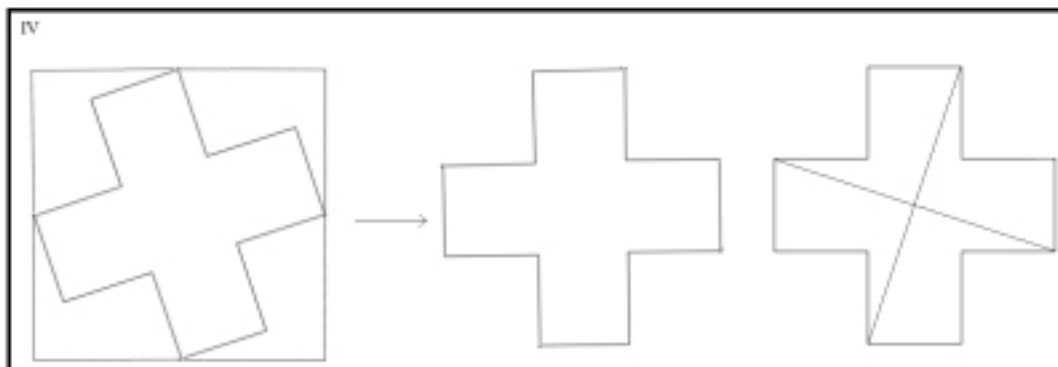
Escrito por Alfonso Jesús Población Sáez  
Jueves 13 de Septiembre de 2018 22:00



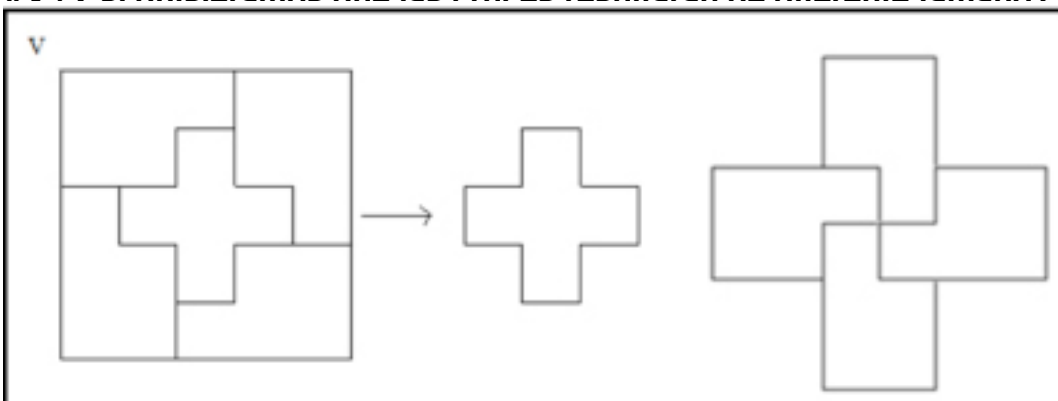
II - ¿Cortar la **en tres** líneas con las que hacer un romboide.



III - ¿Cortar la **en tres** líneas con las que hacer un rectángulo? **Distintos los ángulos**

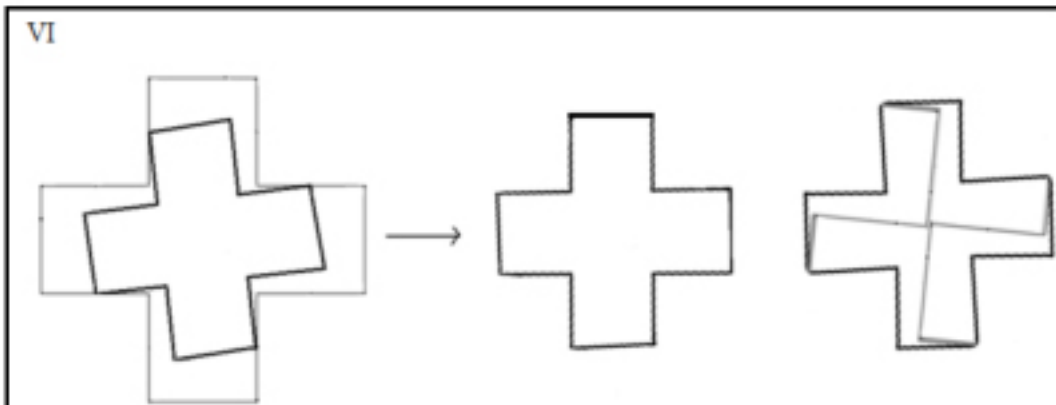


IV - ¿V si quisiéramos que las cruces resultaran de diferente tamaño?



### 133. SOLUCIÓN CONCURSO DEL VERANO DE 2018

Escrito por Alfonso Jesús Población Sáez  
Jueves 13 de Septiembre de 2018 22:00



En el primer caso, las tres cruces se forman al superponerse las tres cruces más pequeñas. En el segundo caso, la cruz simple se forma al superponerse las tres cruces más pequeñas. En el tercer caso, la cruz simple con líneas diagonales se forma al superponerse las tres cruces más pequeñas.



En el primer caso, la novela se forma al superponerse las tres novelas más pequeñas. En el segundo caso, la novela simple se forma al superponerse las tres novelas más pequeñas. En el tercer caso, la novela simple con líneas diagonales se forma al superponerse las tres novelas más pequeñas.



Escrito por Alfonso Jesús Población Sáez  
Jueves 13 de Septiembre de 2018 22:00

