Un desastre de piano

Una buena interpretación de una composición, incluso a cargo de una sola voz o de un solo instrumento, suele envolver sutiles matices, ligeras modificaciones en la duración, timbre, volumen o forma de atacar cada nota. Pero, en aras de una mayor claridad expositiva, concedámonos la libertad de simplificar al máximo, a pesar del rigor que indudablemente perderemos con ello, y pasar por alto estas sutilezas.

Supongamos, pues, que contamos con un piano en un estado realmente lamentable. Las cuerdas están afinadas, pero sólo funcionan las 24 teclas centrales, entre teclas blancas y negras (dos octavas). Los pedales tampoco funcionan y, para colmo, cada nota suena exactamente igual independientemente de la fuerza o duración que empleemos en pulsar cada tecla. Abreviando, tenemos un instrumento que al teclearlo sólo puede dar 24 sonidos distintos.

Por supuesto, la mayoría de los intérpretes rechazarían ejecutar una pieza musical con un instrumento así, incluso aunque la pieza fuera una simple melodía para la que bastasen las 24 notas con que contamos. Ahora bien, al margen de la calidad de la interpretación, estos mismos intérpretes admitirían ser capaces de tocar un sinfín de melodías lo suficientemente conocidas o populares para que el auditorio las reconociera de inmediato.

Letras y notas

Asociemos ahora a cada una de las teclas del maltrecho piano una letra, distinta en cada caso, de nuestro alfabeto, reservando el espacio en blanco para el silencio. Disponemos con ello de un simple sistema de transcripción melódica. Así, una melodía puede comenzar “KKLEK LNEK TLE...”

Por último, supongamos que las frases melódicas que el paciente auditorio es capaz de reconocer corresponden con las frases con significado y sentido en nuestra lengua. Evidentemente, este es un paso audaz que requiere un especial consentimiento. La distribución de las notas y los silencios en una composición se encuentra lejos de parecerse a la distribución de letras y espacios en una frase. Mas, sea, consintamos generosamente, a pesar del manifiesto abuso.

Atendamos ahora al público. Ante el comienzo anteriormente expuesto, el auditorio permanece impávido (tal vez confuso, tal vez horrorizado: ¿LNEK?), mientras que ante la melodía “LA LUZ AZUL ROZA...” sonríe y bate palmas.

El teorema de los infinitos monos

Si aporreamos el desastrado piano al azar, es casi seguro que el auditorio no reconocerá nada de lo que toquemos, pues difícilmente surgirán palabras inteligibles y mucho menos frases con sentido. Nos encontramos ante el “teorema de los infinitos monos” del matemático francés Émile Borel (1871-1956): letras escogidas al azar difícilmente podrán componer una obra literaria ya escrita. En nuestra versión, notas aleatorias difícilmente compondrán una melodía conocida.

La composición

Como vemos, el azar puro, incluso limitando las infinitas posibilidades reales a sólo 24 sonidos atómicos, es bastante ingobernable como proceso de creación musical. El azar en la creación artística semeja un fuerte condimento en una receta culinaria: puede darle el toque, pero no es la base. Se ha empleado el uso calculado y dirigido de alguna distribución de probabilidad como un componente en la creación de obras musicales, pero esa es otra historia (de la que hablaremos en otra ocasión).

La composición, es decir, la planificación de todos los elementos que constituyen la obra, no sólo otorga consistencia y unidad a la misma sino que además facilita el reconocimiento tanto de la obra completa como de cada una de sus partes.

Limitando el azar

La libertad de tocar cualquier tecla del lamentable piano conduce, como hemos visto, a un resultado caótico. Limitemos pues los grados de libertad.

Primero, no se podrá elegir cualquier letra (nota) sino sólo palabras (grupos de notas) de la lengua española (reconocibles). Esta limitación es muy fuerte, pues el número de palabras existentes es ridículo frente al número de variaciones posibles de letras aleatorias. No obstante, muchas melodías carecerán todavía de sentido: “PERRO LA LLOVER SIN...”

Segundo, las palabras (grupos de notas) se clasificarán y ordenarán previamente, de forma que, por ejemplo, a un artículo le sucederá un sustantivo, a este un adjetivo, a este un verbo... facilitando así la conexión entre ellas para formar una frase con sentido. En música, esta clasificación se puede establecer atendiendo especialmente a la primera y última nota del grupo, fundamentales para marcar la tonalidad y enlazar un grupo de notas con el siguiente.

Tercero (y decisivo), las palabras no pueden ser cualesquiera, sino que deben elegirse en cada caso una en una lista cerrada de posibilidades. Esto evita faltas de concordancia (como “LA PERRO”). Por ejemplo, la primera palabra sólo puede ser EL, UN, ALGÚN, OTRO, ESTE, ESE, AQUEL u otra similar.

Permutaciones

En 1974 Ernö Rubik inventa un rompecabezas que años más tarde se convierte en tal éxito de ventas a escala mundial que no necesita más presentación: su famoso cubo. El número de piezas es reducido, sólo 26, pero el número de diseños posibles es enorme: más de 43 trillones, un número de 20 cifras.

No es la primera vez que un puzzle se populariza a esta escala. Un siglo antes, una humilde cajita con 15 piezas obsesionó a europeos y americanos. Inventada por un cartero de Canastota (NY), Noyes Chapman, fue no obstante el creador de acertijos Sam Loyd quien la popularizó ofreciendo una recompensa de 1.000 dólares -de la época (1880)- a quien fuese capaz de resolverlo a partir de una posición inicial... de distinta paridad, es decir, irresoluble. (En la posición inicial de Loyd, los números 14 y 15 aparecían permutados.) El número total de posibles permutaciones -a partir de una dada- es de más de medio billón (y otro tanto para las posiciones con distinta paridad). Pulsa aquí para ver una versión interactiva.

Las recompensas continúan hoy siendo un buen reclamo publicitario. Actualmente, se ofrece un premio de dos millones de dólares a la primera persona que consiga resolver, durante este año 2008, un puzzle de 256 piezas comercializado como Eternity II. Al contrario que en el caso anterior, la existencia de solución está garantizada (incluso hay más de una, aunque muy pocas), pero el número posible de disposiciones de las piezas es inimaginable... ¡Tiene unas 600 cifras!

En los casos expuestos vemos que la clave del atractivo, premios aparte, consiste en el gran contraste entre el escaso número de piezas fácilmente manipulables y el gran número de configuraciones posibles.

Juego de dados musical

En 1787, Mozart compone *Musikalisches Würfelspiel* (Juego de dados musical), una pieza que tiene la particularidad de que... ¡cada vez que se interpreta nadie la había escuchado antes, ni siquiera el propio Mozart!

La obra consiste en 176 compases numerados, de los cuales todos se dedicarán a un minueto de 16 compases y 96 de ellos a un trío también de 16 compases. Complementa la obra una serie de instrucciones para la elección de los compases.

Antes de interpretar la obra... ¡hay que crear la partitura! Para ello, se deben arrojar dos dados. La suma de los puntos obtenidos, entre 2 y 12, indicará el número del primer compás del minueto según la siguiente tabla. Se vuelven a arrojar los dados, y la puntuación indicará ahora el número del segundo compás. Sucesivamente, se completarán los 16 compases que constituyen el minueto.

Minueto

1º	2º	3º	4º
96	22	141	41
32	6	128	63

69	95	158	13

40	17	113	85

148	74	163	45

104	157	27	167
152	60	171	53
119	84	114	50
98	142	42	156

3	87	165	61

54	130	10	103

Las casillas azules muestran, como ejemplo, un posible resultado de arrojar los dos dados 16 veces. En el primer lanzamiento se obtuvo una suma 2, en el segundo una suma 8, etc. Los compases correspondientes que se deben interpretar son los numerados como 96, 60, etc.

Mozart no dispuso los compases al azar, sino mediante reglas estrictas que **limitan el azar** suavizando el paso de unos a otros, a la vez que rigen los intervalos armónicos y la tonalidad. Por ejemplo, los compases de la primera y última columna muestran el mismo tono fundamental, y entre ambos abundan los intervalos de quinta y cuarta, lo que favorece la armonía global según los gustos de la época.

Una vez concluida la partitura del minueto, creamos la partitura del trío. El método es el mismo, salvo que ahora se arroja un solo dado al aire. La tabla correspondiente es la siguiente:

Trío

1º	**2º**	**3º**	**4º**
72	6	59	25
56	82	42	74

75	39	54	1

40	73	16	68

83	3	28	53

18	45	62	38

La partitura resultante en nuestro ejemplo se puede ver y oír aquí . Cada uno de los 176 compases, por separado, lo puedes oír aquí.

Probabilidad

Observemos que mientras que todos los compases del trío tienen la misma probabilidad de aparecer en la partitura, no sucede igual con los compases del minueto. Al arrojar dos dados, la distribución de probabilidad de la puntuación, es decir, la serie de probabilidades de obtener cada suma, no es uniforme, pues sólo hay una forma de obtener suma 2 (1+1), mientras que existen 6 modos distintos de obtener suma 7 (1+6, 2+5, 3+4, 4+3, 5+2 y 6+1).

La siguiente tabla nos muestra la probabilidad de cada puntuación al arrojar dos dados:

Suma	2	3	4

Prob.	**1/36**	**2/36**	**3/36**

Esto significa que los compases que aparecen asociados a una de las sumas {5, 6, 7, 8, 9} aparecerán, de media, en 2 de cada 3 compases (cuantos más minuetos generemos, más nos acercaremos a esta media).

Contando posibilidades

Calculemos cuántos minuetos y tríos distintos podemos formar. Para agilizar el cálculo, obviaremos que alguno de los 176 compases que integran *Musikalisches Würfelspiel* se repite, a pesar de tener distinta numeración. Esto reduce un poco el resultado que obtendremos, pero no significativamente.

Para cada minueto, existen 11 elecciones posibles del primer compás. Por cada una de ellas, otras 11 para el segundo, y así sucesivamente. Habrá por tanto 11^{16} minuetos posibles, casi 46 mil billones, aunque no todos con la misma probabilidad, como hemos visto.

Tenemos, de igual manera, 6^{16} tríos posibles, casi 3 billones, todos ellos equiprobables.

Conjuntamente, la obra minueto y trío alcanza 66^{16} posibilidades, un número de 30 cifras. Si cada habitante del planeta, unos 6 mil millones, interpreta una posibilidad **distinta** cada cinco minutos, hasta agotarlas todas, tardaríamos más de 200 *billones* de años (aunque es casi seguro que ni el sistema solar ni nuestra galaxia continuasen existiendo para entonces).

Ahora bien, no es lo mismo agotar todas las posibilidades que estimar qué número de interpretaciones se deben haber realizado para que sea más probable que improbable que se produzca alguna repetición. Es decir, estimar cuándo una partitura generada según las reglas del juego ya no es un estreno, sino una reposición. ¿Cómo estimar este número?

El problema del cumpleaños

Este problema, famoso por su poco intuitiva solución, tiene un enunciado muy similar al que acabamos de exponer. Pregunta cuál es el mínimo número de personas necesarias para que entre ellas sea más probable que improbable que haya dos con la misma onomástica (no se consideran los años bisiestos). La sorprendente respuesta es 23.

[Nota: Si usted no está familiarizado con este problema, debe prestar atención a que no se pretende la coincidencia de algún cumpleaños de las personas del grupo con otro concreto (el de usted, por ejemplo), sino de cualquiera de ellos con cualquier otro. La variante "¿cuántas personas como mínimo debe haber para que sea más probable que improbable que alguna tenga *mi* onomástica?" ofrece una solución mucho más abultada: 253 personas.]

Para alcanzar esa solución, denotemos por n el número de posibles cumpleaños, 365. Si hay x personas, cada una con n posibilidades, el número total de posibilidades es n^x. Por otra parte, la primera persona puede tener cualquier cumpleaños. Para que *no* coincida la segunda, esta debe cumplir años en uno de los n - 1 días restantes. La tercera, en alguno de los n

– 2 que quedan, y así sucesivamente. Por lo tanto, la probabilidad de que en *x* personas *no* coincida ningún cumpleaños es:

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-x+1)}{n^x}=\frac{n!}{n^x(n-x)!}$$

La probabilidad buscada, de que exista alguna coincidencia, será por tanto:

$$P=1-\frac{n!}{n^x(n-x)!}$$

Con $n = 365$, basta una calculadora y un poco de paciencia para comprobar que para $x = 22$ esta probabilidad no alcanza 0.5, pero para $x =$ 23 personas, ya la supera ligeramente. Sin embargo, en vez de la calculadora usaremos algo más potente como es el programa Derive:

Conectando problemas

Veamos ahora por qué es casi imposible repetir una partitura ya interpretada. Para poder aplicar el método anterior al *Juego de dados musical*, primero tenemos que solventar la dificultad presentada por la falta de uniformidad de la distribución de probabilidad que rige la generación de los minuetos.

¿Cuál es la probabilidad de que un compás de un minueto coincida con el mismo compás en otro? Para que se produzca esta coincidencia, debe ser igual la puntuación obtenida con los dados en ambos casos. Para que esto suceda con dos puntuaciones “2”, se debe obtener puntuación 2 en uno (probabilidad 2/36) e, independientemente, en el otro (misma probabilidad). La probabilidad de que ambos sucesos ocurran a la vez será por tanto $(2/36)^2$. De la misma forma, la probabilidad de que coincidan dos puntuaciones “3” será $(3/36)^2$, y sucesivamente, hasta la coincidencia de dos puntuaciones “12” con probabilidad, igual a la primera, de $(2/36)^2$. Sumando todas estas fracciones, obtenemos la probabilidad de coincidencia de dos compases en la misma posición: 1/9.

Para que coincida un minueto con otro, todos sus 16 compases deben coincidir uno por uno. Por lo tanto, la probabilidad de tal coincidencia es $1/9^{16}$.

Por otra parte, la probabilidad de que coincidan dos tríos era $1/6^{16}$. Conjuntamente, tenemos que la probabilidad de una repetición exacta de una obra concreta es $1/54^{16}$.

Ya podemos aplicar el mismo sistema usado en el problema del cumpleaños, sólo que ahora el año no tiene 365 días, sino 54^{16}:

$$P = 1 - \frac{n!}{n^x (n-x)!}, \quad n = 54^{16}$$

Desafortunadamente, la expresión anterior se muestra ahora intratable, dado lo elevado de los números implicados. Si intentamos resolver con Derive la ecuación resultante de igualarla a 0.5, como hemos hecho antes, no obtendremos resultados (de hecho, para resolver la ecuación para n = 365 Derive ya necesitó 70 segundos en el ordenador que empleamos). Habrá que buscar alguna forma de simplificarla primero.

La fórmula de Stirling

Esta fórmula permite aproximar muy bien los grandes factoriales (cuanto más grandes, mejor es la aproximación, y en nuestro caso los factoriales son *realmente* grandes):

$$n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

Aplicándola a nuestra probabilidad y reduciendo, obtenemos:

$$P = 1 - \left(\frac{n}{n-x}\right)^{n-x+0.5} e^{-x} \quad , \quad n = 54^{16}$$

La ecuación correspondiente, igualando a 0.5, continúa resultando impracticable para Derive. Pero ahora tenemos exponenciales en vez de factoriales, lo que nos permite aplicar logaritmos y obtener por fin la ecuación:

(n – x + 0.5)(L(n) – L(n–x)) – x + L(2) = 0

Su solución la encuentra Derive al instante:

Un número de 17 cifras. Retomando el ejemplo del planeta, si cada terrícola genera e interpreta una obra cada cinco minutos, siguiendo las reglas de Mozart, es de esperar que al cabo de unos 78 años se produzca alguna repetición. Claro que si sólo es un (infatigable) habitante el encargado de la tarea, deberíamos esperar que la coincidencia se produzca en un plazo seis mil millones de veces mayor.

Webs

En las siguientes direcciones de Internet podemos oír y generar automáticamente una partitura según las reglas de Mozart. En el primero, además, podemos guardar una copia:

http://sunsite.univie.ac.at/Mozart/dice/

http://web.ard.de/radio/mozart/wuerfelspil/wuerfelspiel.swf