En la columna de este mes de febrero vamos a glosar un artículo del famoso teórico de la computación Donald Knuth [Wik14] cuyo título reza Randomness in Music (La aleatoriedad en la música) y que aparece en el excelente volumen recopilatorio The best writing on mathematics 2013 [Knu13]. Este volumen comprende los mejores escritos de matemáticas publicados en el año 2013 (según, al menos, sus editores), pero recomendamos su lectura (toca temas que van desde la definición de las matemáticas, la importancia de estas, la ansiedad matemática, y otros temas apasionantes).

Respecto al autor, es sobradamente conocido. Se le considera el padre del análisis de los algoritmos pues ha contribuido decisivamente a su fundamentación teórica. Escribió The Art of Computer Programming (El arte de programar ordenadores) [Knu97], donde describió algoritmos fundamentales así como estructuras de datos y proporcionó el análisis de su complejidad. Knuth es también el creador del programa TeX, el editor de textos científicos universal por antonomasia, así como del diseño de tipos Metafont. Aquí en España fue galardonado en 2010 con el Premio Fundación BBVA Fronteras del Conocimiento en la categoría de Tecnologías de la Información y la Comunicación.

1. Armonizaciones matemáticas

En su artículo Knuth propone un método para armonizar melodías a partir de un algoritmo matemático, el cual introduce aleatoriedad en dichas armonizaciones. Knuth elabora el concepto de imperfección planeada, la idea de que los sistemas perfectos no producen belleza y que la presencia de microvariaciones en los patrones musicales o visuales hacen a estos más atractivos. La idea que presenta se le ocurrió a partir de las clases de armonía que tomó (Knuth es también músico) con David Kraehenbuehl en el Westminter Choir College. El texto de Knuth nos dará una buena oportunidad de analizar críticamente las relaciones entre las matemáticas y la música —una vez más—.

1.1. Conceptos previos de música

Revisaremos rápidamente algunos conceptos de armonía. El lector con experiencia musical puede saltarse esta sección sin ningún remordimiento de conciencia. Las siguientes definiciones están tomadas del excelente libro de Walter Piston [Pis91]. Un

acorde es la combinación de dos o más intervalos armónicos. El acorde más habitual en el periodo de la práctica común es la triada, que es un acorde formado por tres notas a distancia de tercera entre sí. La primera nota se llama fundamental; la segunda, la tercera; y la última, la quinta; véase la figura 1.

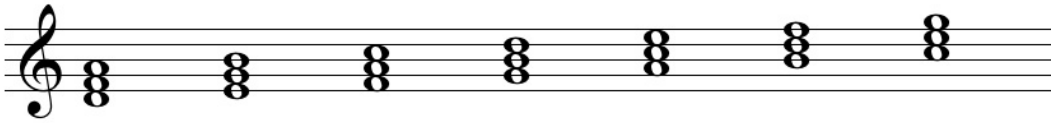


Figura 1: Acordes y triadas.

Esta definición de acorde se aplica a cualquier clave. Las anteriores triadas estaban en do mayor, pero se podrían reescribir en cualquier otra tonalidad.

Los acordes admiten inversiones. Estas consisten en cambiar una nota a su octava superior más inmediata. Una triada con la fundamental como nota más grave se dice que está en estado fundamental; si es la tercera la nota más grave se dice que la triada está en la primera inversión; y si es la quinta la nota más grave hablamos de triada en segunda inversión. La figura 2 ilustra estas definiciones (de izquierda a derecha: estado fundamental, primera inversión y segunda inversión).

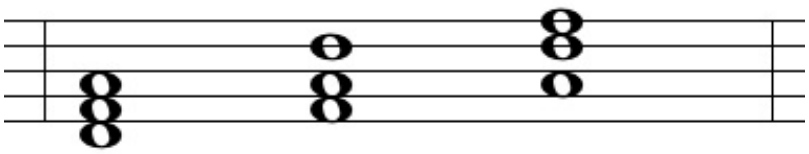


Figura 2: Inversiones de las triadas.

Como la armonía se percibe desde la nota fundamental hacia arriba, hacia los armónicos, la nota fundamental tiene bastante importancia en la armonía tonal. En su artículo Knuth describe la idea de su profesor de armonía, Kraehenbuehl, que consiste en fijarse en la nota superior,

que es la nota de la melodía o nota soprano (se llama así porque es la nota más aguda) en lugar de la nota fundamental para las armonizaciones. Kraehenbuehl constata que, dada una nota en particular, esta forma parte de tres triadas, una en posición fundamental, una en primera inversión y otra en segunda inversión. Knuth las denota por 0, 1 y 2, respectivamente. La figura 3 está tomada de su artículo [Knu13].

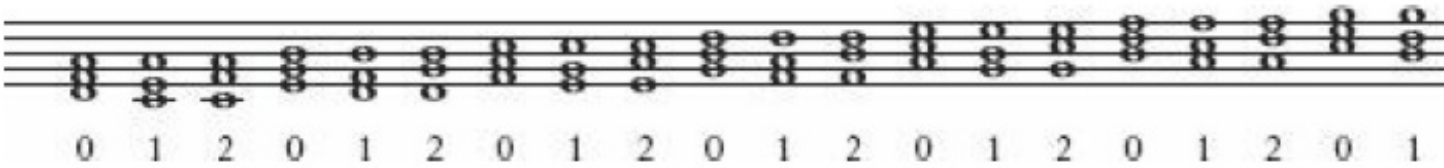


Figura 3: Triadas asociadas a una nota soprano (tomado de [Knu13])

Si duplicamos la nota más grave en la secuencia de acordes anterior, tendremos lo siguiente:

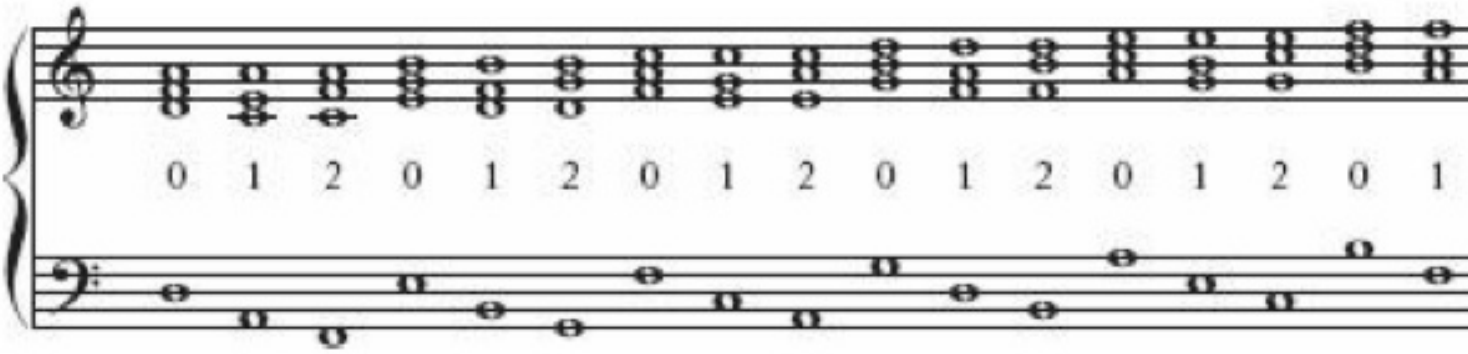


Figura 4: Triadas con bajo (tomado de [Knu13]).

1.2. Y ahora el algoritmo de armonización

Según Knuth, su profesor de armonía propuso armonizar una melodía dada eligiendo acordes de modo que no haya dos seguidos con el mismo tipo de inversión. Si una melodía tiene n notas, entonces hay $3 \cdot 2^{n-1}$ maneras de armonizarla. Para ilustrar este algoritmo o

procedimiento tomemos la melodía de la conocida marcha n º 1 en re mayor de Pompa y circunstancia, de Edward Elgar (figura 5). En su artículo usa otra melodía, la también conocida London Bridge is falling down, my fair lady.

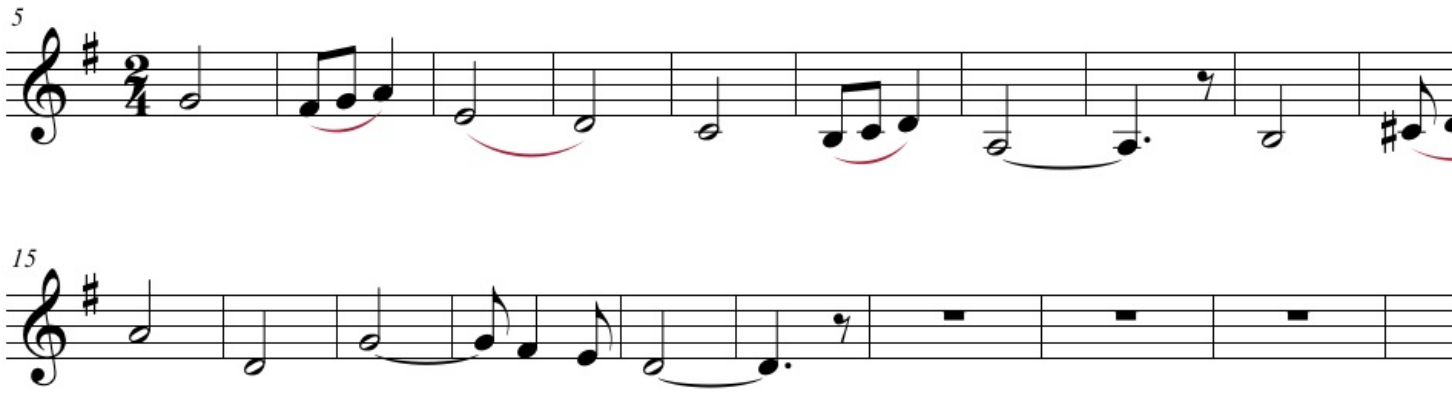


Figura 5: Marcha n º 1 en re mayor de Pompa y c

Y es aquí donde Knuth propone una estrategia un tanto insólita para elegir las inversiones de los acordes, aquí es donde viene la aleatoriedad. Propone obtener la sucesión de las inversiones a partir de constantes matemáticas, en particular, de e, pi y φ (dice que es una elección mejor que “tirar un dado”). La parte entera de la constante módulo 3 servirá para elegir la primera inversión. La parte decimal se escribe entonces en notación binaria y se establece que un 0 suma +1 a la inversión anterior y un 1 resta +1. Todos los cálculos, por supuesto, son módulo 3.

Ilustremos este algoritmo con la melodía de Elgar. Las constantes mencionadas, escritas en notación binaria, son:

$\pi = 3 + (0{,}00100100001111111011\ ...)_2$
$e = 2 + (0{,}10110111111000010101\ ...)_2$
$\varphi = 1 + (0{,}10011110001101110111\ ...)_2$

donde el subíndice significa que esa parte está escrita en notación binaria. Usando la idea de Knuth, obtendríamos las siguientes sucesiones de inversiones:

pi 0, 0 0

Secuencia:	0	1	2

e 2, 1 0

Secuencia:	2	1	2

φ 1, 1 0

Secuencia: 1 0 1

Tabla 1: Obtención de las sucesiones de inversiones.

Si aplicamos la sucesión de inversiones a nuestra melodía, obtenemos la armonización de la partitura de abajo. Como había algunas síncopas, me he tomado ciertas libertades en el ritmo armónico.

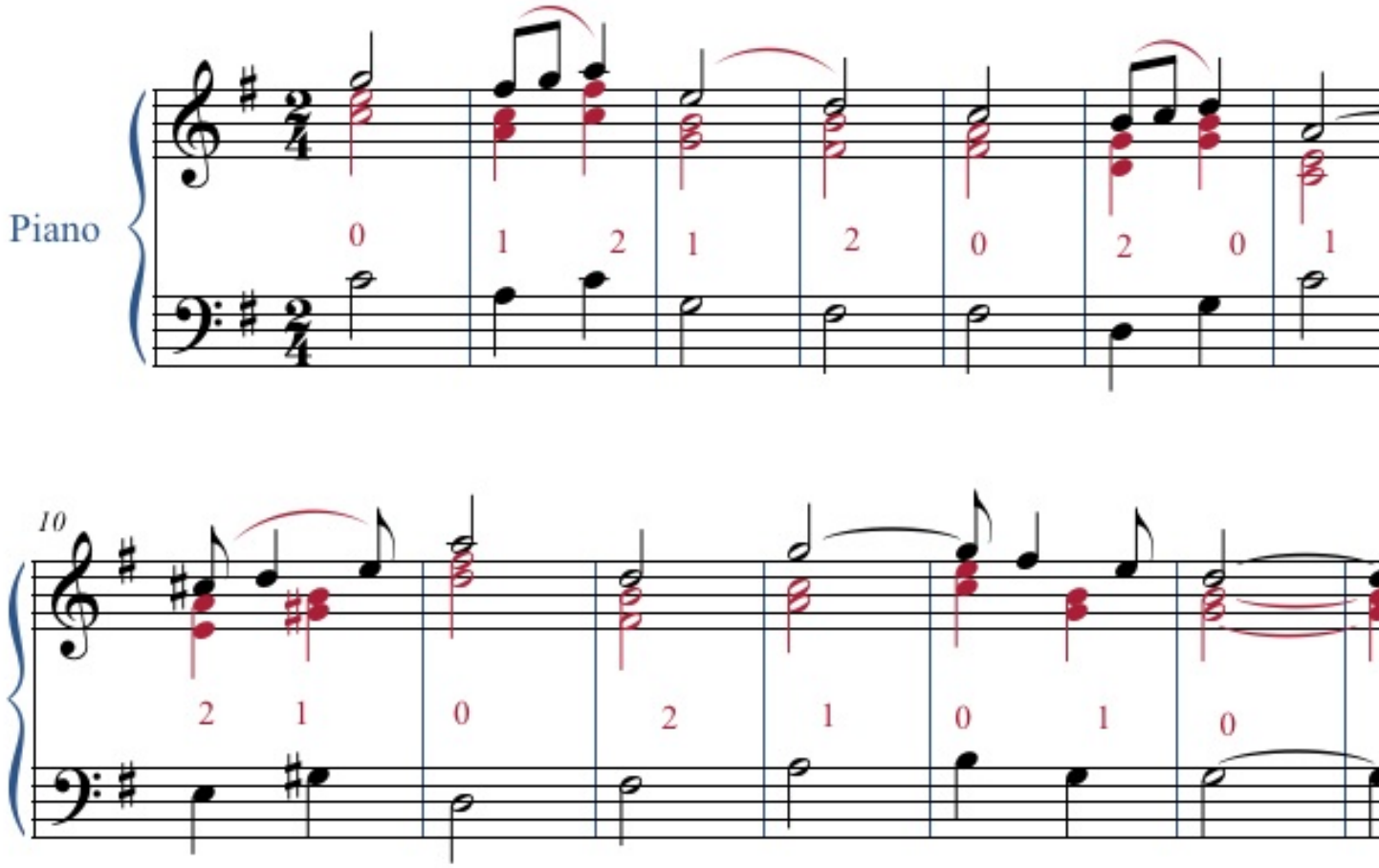


Figura 6: Armonización según la constante pi.

En el caso anterior, y solo por pura casualidad, el estado del último acorde fue en estado fundamental. En la música tonal de la práctica común es una regla que la última nota corresponda a la tonalidad y que esta se presente con una acorde en estado fundamental. Esta regla dejó de observarse al final del periodo de la práctica común. Knuth es consciente de ello y

propone un sencillo truco, el cual consiste en repetir la última nota de la melodía y poner a esa nota el acorde en estado fundamental. Por ejemplo, en la siguiente armonización, que corresponde a la de la constante e, vemos que no acaba según exige la armonía clásica.

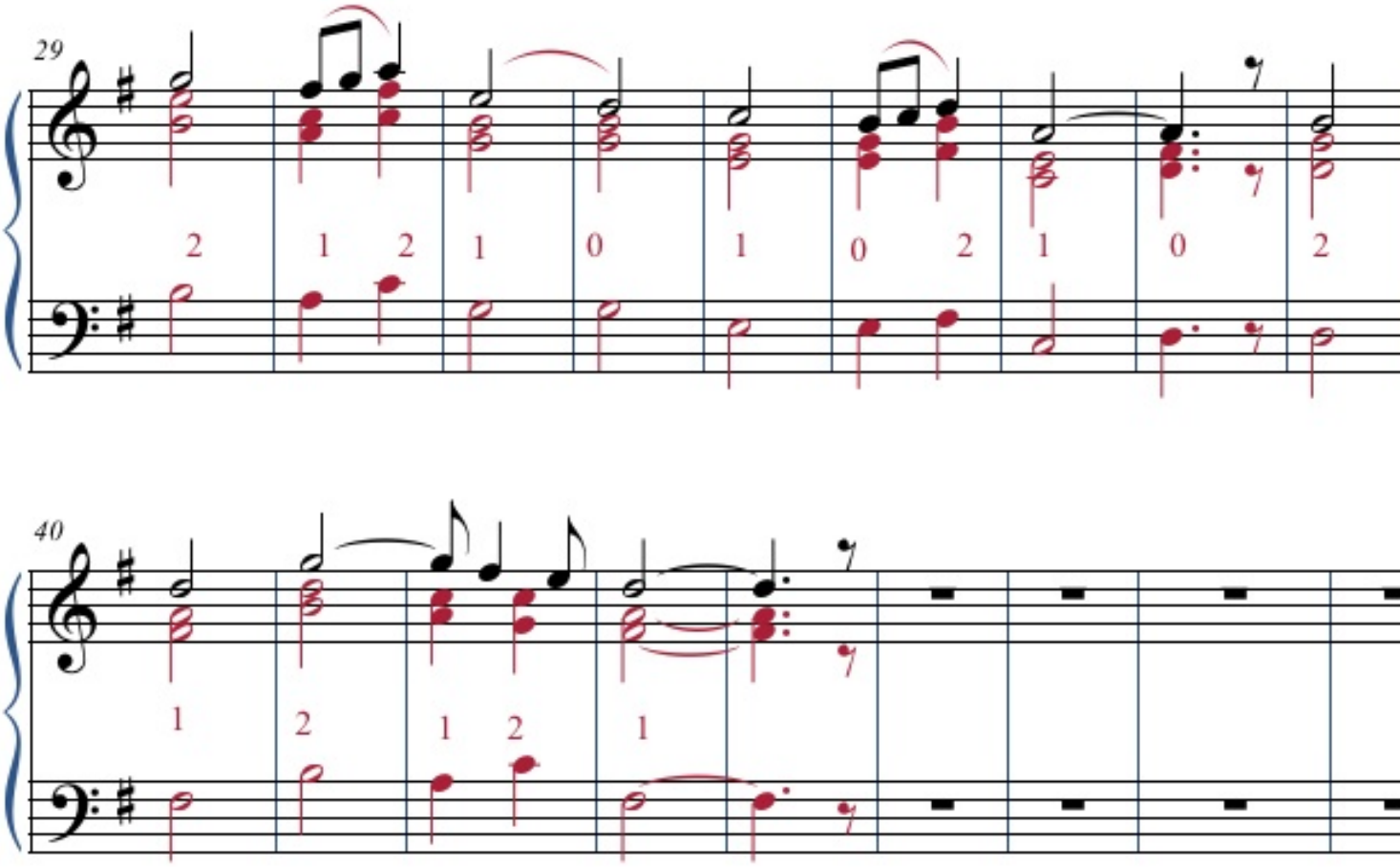
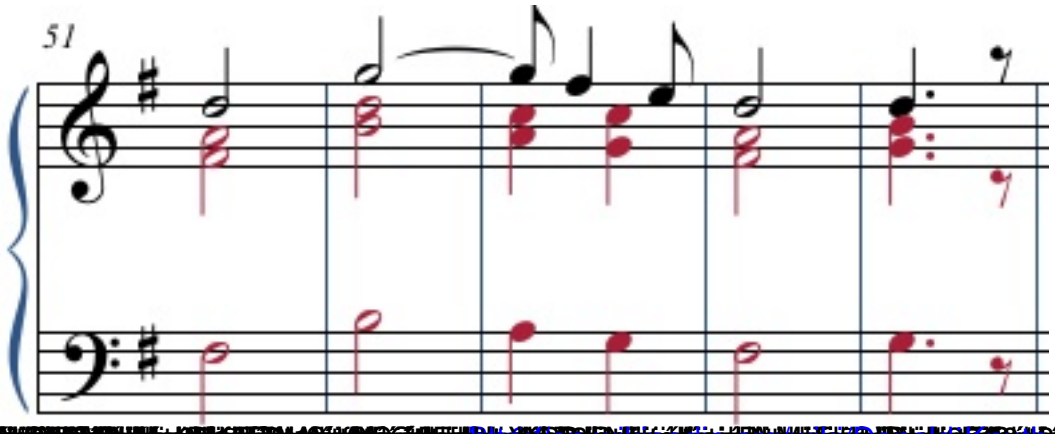


Figura 7: Armonización según la constante e.

En la figura 8 tenemos —siguiendo las ideas de Knuth y su profesor de armonía— una solución para acabar con el acorde adecuado en la marcha de Elgar. Obsérvese que hubo que romper la ligadura entre las dos últimas notas.



[redacted] http://en.wikipedia.org/wiki/Donald_Knuth [redacted]