Es un gran placer para mí presentar un artículo de David Rapapport (fotografía de la izquierda), geométra interesado en la música y músico interesado en la geometría. Su artículo que presentamos en esta sección, *Conjuntos de área máxima y la armonía*, es una exploración deliciosa de la armonía a través de conjuntos de área máxima inscritos en un círculo. El autor caracteriza escalas fundamentales en la improvisación en la música del jazz.

Francisco Gómez Martín

BIOGRAFÍA: David Rapapport es profesor en la *School of Computing* y Vicedecano en la *School of Graduate Studies* en *Queen's University*, en Canadá. Obtuvo un grado en Matemáticas por la Universidad de Concordia y un tesis de maestría y de doctorado por la Universidad de McGill, ambas en Canadá. Su investigación se centra en geometría discreta y computacional con especial énfasis en algoritmos y optimización. También está interesado en las conexiones entre matemáticas y música.

ARTÍCULO:

1. Introducción

La Geometría y la Música están relacionadas entre sí de varias maneras. La notación musical usa la forma y el espacio para transmitir la información sobre la altura y la duración. Los guitarristas visualizan las estructuras armónicas, así escalas, arpegios y acordes, como formas geométricas en el traste. Los orígenes de nuestro sistema musical de siete notas extraídas de un conjunto de doce alturas se puede describir en términos de cuerdas vibrantes de varias longitudes. Dimitri Tymocko, en un reciente artículo suyo [17], ha usado la geometría para analizar la conducción de voces en música. La Combinatoria es otra rama de las Matemáticas que se utiliza en el análisis de la música. Inevitablemente, la visión combinatoria se apoya en una imagen, esto es, en una representación geométrica.

Considérese un círculo con doce puntos equidistantes distribuidos en su circunferencia. Los doce puntos representan las doce alturas del universo cromático dado por el temperamento igual. De estos doce puntos elegimos un subconjunto de al menos cinco puntos, porque musicalmente se llama una escala a un subconjunto de cinco o más alturas. Algunos de estos conjuntos, o escalas, son elementos esenciales de la armonía occidental.

En los ejemplos que se muestran en la figura 1 un subconjunto de puntos se conecta en orden para construir un polígono convexo. Consideraremos polígonos distintos salvo rotaciones. Esto equivale a considerar que los distintos modos musicales provenientes de una misma escala no son escalas distintas.

Ya que hay 12 puntos equiespaciados sobre la circunferencia, es razonable llamar a estos diagramas *diagramas de reloj*. La representación de las notas de una escala por un polígono aparece en un artículo publicado en 1937 por E. Krenek [8], de modo que algunas veces estos diagramas se llaman *diagramas de Krenek*, como por ejemplo en el artículo de McCartin [10]. Sin embargo, en una recensión de Nolan [11], Heinrich Vincent ya usaba esta misma representación en un artículo suyo publicado en 1862 [18]. El uso de los diagramas de reloj es omnipresente en la teoría matemática de la música. Cuando se considera la escala diatónica usual, se observa que las notas están distribuidas lo más regularmente posible entre las doce notas cromáticas. La distancia entre dos notas puede medirse como el número de notas de la escala entre ellas, o bien como el número total de notas cromáticas entre ellas. De este modo, distinguimos entre la *distancia de la escala* y la *distancia cromática* de un par de notas. Clough and Douthett [1

] definen un conjunto de *regularidad máxima* cuando la distancia cromática entre un par de notas difiere de su distancia de escala en una unidad como máximo. Los conjuntos de regularidad máxima (conjuntos RM de aquí en adelante) son únicos (salvo rotaciones) como se prueba en [1] y también en [4]. Los conjuntos RM incluyen algunas de las escalas más ampliamente usadas en la música occidental, a saber, la escala diatónica, la escala pentatónica anhemitónica común, la escala de tonos enteros de seis notas y la escala octotónica (véase la figura 1).

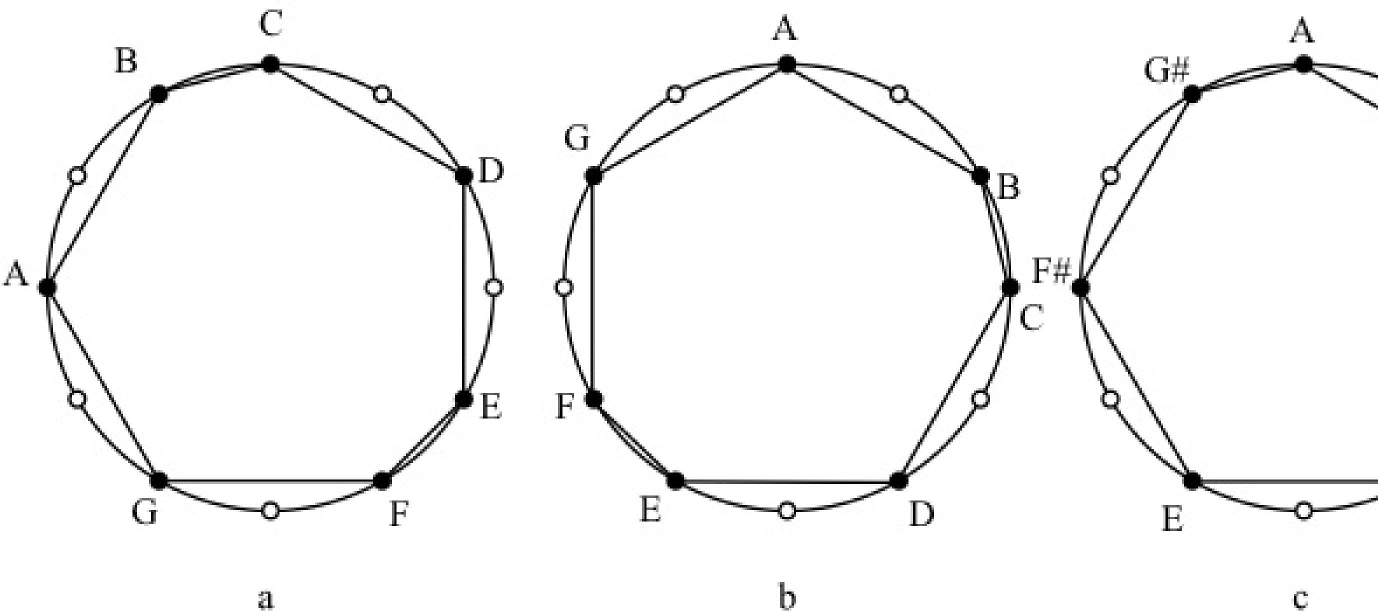


Figura 1. Los subconjuntos en a) y b) representan dos modos de la escala diatónica, el jónico y el eólico, también conocidos como modo mayor y modo menor natural, respectivamente. Para nuestros propósitos estas dos escalas se consideran equivalentes. El diagrama de la parte c) representa la escala menor melódica ascendente y ésta es distinta de las de a) y b).

Cuando los conjuntos RM se representan por un diagrama de reloj, entonces esos puntos son subconjuntos que maximizan de modo único la suma de las distancias entre puntos [2 - 4]. Fejes Tóth [14

] describe un caso continuo similar al considerado aquí. En ese artículo se prueba que un conjunto finito de *N* puntos que maximizan la suma de las distancia entre puntos se encuentra en los vértices de un polígono regular convexo de *N* lados. Dicho de otro modo, los puntos están distribuidos tan regularmente como sea posible sobre la circunferencia del círculo.

En su libro sobre armonía el músico Levine [9] describe cuatro escalas fundamentales que son útiles para la improvisación en jazz. Estas cuatro escalas son la escala mayor de siete notas, la escala menor melódica de siete notas, la escala simétrica de tonos enteros de seis notas y la escala octotónica. En la terminología jazzística el término "menor melódica" se refiere a la escala ascendente melódica menor y aquí seguiremos esa convención.

Tres de estas escalas son de máxima regularidad, siendo la excepción la escala menor melódica, que no lo es. Así, dados los pares *(12, 8), (12, 6)* y *(12, 7)* podemos preguntarnos si hay una caracterización matemática que describa exactamente las cuatro escalas fundamentales de Levine. En estas notas llegamos a una caracterización llamada los *conjuntos complementarios de área máxima* .

Este artículo está organizado como sigue. En la siguiente sección entablaremos una discusión matemática sobre una clase de subconjuntos de *K* elementos tomados entre *N* posibles. Esta caracterización es a la vez combinatoria y geométrica. Empezaremos por describir los llamados conjuntos de área máxima, de los cuales probaremos algunas propiedades suyas. Los conjuntos de área máxima son interesantes por derecho propio, pero no satisfacen las condiciones mencionadas anteriormente, ya que esta caracterización, como veremos, incluye subconjuntos de *(12, 8)* y *(12, 7)* que no son de las cuatro escalas fundamentales. En la sección 3 definiremos y analizaremos entonces los conjuntos complementarios de área máxima y mostraremos que esa caracterización sí satisface las condiciones impuestas antes. El artículo acaba con una sección de conclusiones.

2. Conjuntos de área máxima

Un concepto erróneo bastante común es el de pensar que el prefijo *di-* en la palabra diatónico se refiere al número *dos*, queriendo significar que la característica es que hay dos tipos de intervalos en el conjunto diatónico habitual. Sin embargo, la verdad es que el prefijo *dia-* se refiere a la distancia *desde la tónica* [12] .
No obstante, esta definición nos proporciona el trampolín ideal desde el cual lanzar una exploración de las escalas que satisfacen esta propiedad, esto es, colecciones de subconjuntos de siete alturas tomadas de entre las doce del universo cromático de modo que el espacio entre alturas consecutivas es o bien un tono o un semitono. Resultan tres escalas distintas. Usando diagramas de reloj podemos ver las tres escalas en la figura 2 más abajo. En (a) podemos reconocer la escala diatónica estándar; (b) representa la escala menor melódica; y en (c) tenemos la escala simétrica de tonos enteros más una nota, escala que también se llama escala mayor napolitana.

No es difícil comprobar que los polígonos que representan cada escala tienen todos la misma área y que esa área se maximiza para cualquier elección de siete puntos sobre doce. Así pues, llamaremos a estas escalas *escalas de área máxima*, o más generalmente *subconjuntos de área máxima* (lo abreviaremos como conjuntos AM).

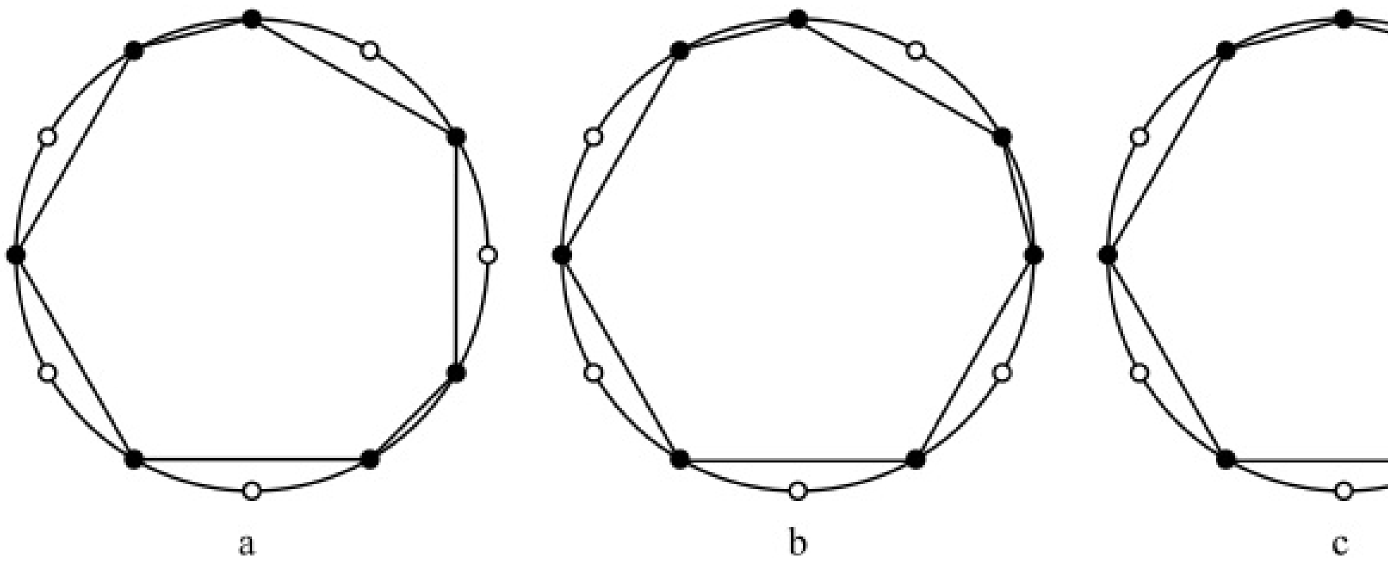


Figura 2. Diagramas de reloj de las tres escalas AM. La estructura de los intervalos de esta escala es a) la escala diatónica; b) la escala menor melódica ascendente; c) la escala mayor napolitana.

Generalizamos esta noción a cualquier colección de *K* alturas seleccionadas de entre un universo cromático de *N* alturas. Será más conveniente definir los subconjuntos en términos de particiones de números enteros.

Una *partición entera* de un número natural *N* es una forma de escribir *N* como una suma no ordenada de numeros naturales. En [7] Keith señala la conexión entre las particiones de enteros y las escalas musicales.

Definición. Un conjunto de *K* alturas tomadas de entre un universo cromático de *N* alturas numeradas de *1,...,N* es un *conjunto AM* si satisface las siguientes dos condiciones:

- Hay una partición entera de *N* que usa exactamente *K* sumandos enteros positivos, esto es, $N = a_1 + a_2 + \cdots + a_K$.
- Los sumandos difieren como máximo en *1*, esto es, $|a_i - a_j| \leq 1$, para todo *i, j*.

La siguiente proposición proporciona fundamento matemático para construir y analizar los conjuntos AM.

Proposición 1. *Dados dos enteros N, K con K <N, existen dos únicos enteros u y m tales que N=mu+(K-m)(u+1).*

Obsérvese que para *N, K, u, m*, definidos así, tenemos una partición entera $N = a_1 + a_2 + \cdots +$ con $a_i = u$, para *i=1,...,m* y $a_i = u + 1$, para *i=m+1,...,K*. Aquí se sobreentiende que *i=m+1,...,K* es el conjunto vacío en el caso en que *m=K*, esto es, cuando *K* divide a *N.*

Demostración: Sean los siguientes números:

$$u = \lfloor \frac{N}{K} \rfloor, v = \lceil \frac{N}{K} \rceil$$

Nótese que si *K* divide a *N*, entonces *v=u*; en otro caso, *v=u+1*.

Para el caso en que *v=u,* tenemos que *N=Ku*. Considerando ahora el caso en que *v=u+1*, tenemos la igualdad *(N-Ku)v+(Kv-N)u=N(v-u)=N*. Por lo tanto, *m=Kv-N=K(u+1)-N.* Ya que *u* determina *m*, basta mostrar que *u* es el único valor que satisface las condiciones requeridas. Cuando *K* divide a *N*, la unicidad se sigue del algoritmo de la división [6]. Cuando *K* no divide a *N*, examinamos los casos en que se usa un número mayor o menor que el valor de *u.* Sea, pues,

w
un entero mayor que
. Esto implica, sin embargo, que $Kw > N$, lo cual lleva a una contradicción y w no puede ser mayor que u. Un argumento simétrico similar al anterior muestra que tomar
$w <$
lleva a una contradicción.

Por tanto, queda demostrado que u es único, y esto completa la demostración. QED.

Recuérdese que en los conjuntos MR según fueron definidos por Clough y Douthett [2 , 3] cuando la distancia cromática entre dos pares denotas difieren como máximo en una unidad de la distancia de escala. Esto lleva inmediatamente a la proposición siguiente.

Proposición 2. *Si un conjunto es MR, entonces también es un conjunto AM.*

Como se ilustró en el ejemplo de la figura 2, aunque para cualquier N, K, hay dos valores únicos de u y m, uno puede obtener más de una escala con intervalos
u
y
$u+1$
sencillamente reordenando las posiciones de dichos intervalos. Dados los números
(N, K, u, m)
, podemos enumerar las distintas escalas (salvo rotaciones) que son escalas AM. Este valor depende solo de
K
y
m
, y es el número de collares (
necklaces
) binarios de longitud
K
usando dos tipos de cuentas,
m
cuentas blancas y
$K-m$

cuentas negras. En general, un collar *p*-ario se define como la clase de equivalencia de cadenas *p-*arias bajo rotaciones; véase [13]. Los distintos collares se pueden enumerar en tiempo constante por collar usando un algoritmo de Sawada y Ruskey [13].

Volvemos ahora a la cuestión del área de los polígonos que representan a las escalas. Haciendo referencia a la figura 3, es claro que el área del heptágono se obtiene sumando las áreas de los triángulos.

Suponiendo que el heptágono que representa estas escalas está circunscrito a un círculo de radio la unidad, una fórmula que da el área del polígono es: $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) + \frac{5}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)$

.

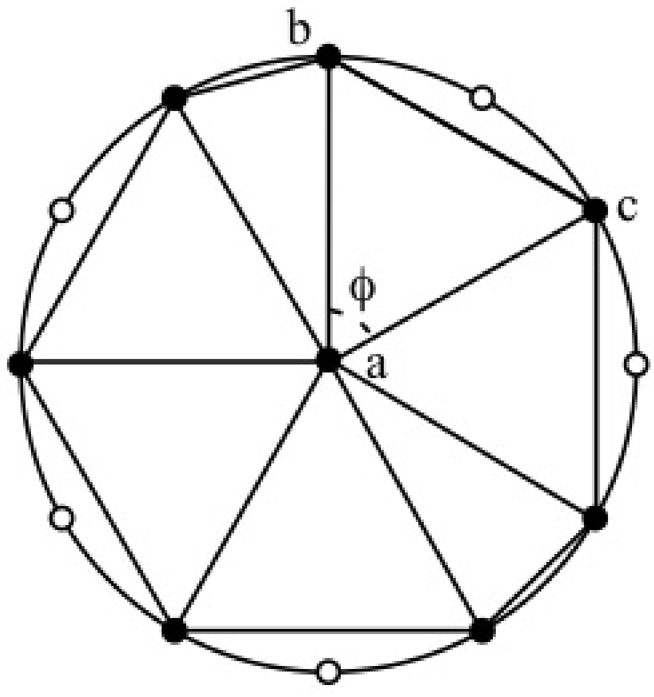


Figura 3. Uno puede obtener el área de un heptágono sumando las áreas de los triángulos en la partición en triángulos que sugiere la figura. El area del triángulo *a, b, c* está dado por $\mathrm{sen}(\phi)/2$. El perímetro del polígono inscrito es también una función de los ángulos centrales. Por ejemplo, la longitud de la arista *bc* es $\mathrm{sen}\left(\frac{\phi}{2}\right)$.

En general, el área de los polígonos se puede obtener sumando el área de los triángulos que forman la partición del polígono. Para nuestros propósitos es más conveniente tomar la partición del polígono con triángulos que comparten un vértice común en el centro del círculo que circunscribe y cuyos lados son los radios. De ahora en adelante nos referiremos a esta partición como la *partición en triángulos* del polígono. La suma de las áreas de cualquier representación poligonal *(N, K, u, m)* está dada por la fórmula:

$$\frac{m}{2}\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi \mathrm{u}}{\mathrm{N}}\right) + \frac{\mathrm{K}-\mathrm{m}}{2}\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi(\mathrm{u}+1)}{\mathrm{N}}\right)$$

Nótese que el área es una función que depende solo de los valores de los ángulos de los triángulos del centro del círculo. Llamaremos a estos ángulos *ángulos centrales.*

Afirmamos que todos esos heptágonos maximizan el área. Es fácil verlo en el ejemplo dado. Probaremos el resultado para el caso general en el siguiente lema. Además, probaremos que estos polígonos maximizan también el perímetro. El hecho de que el perímetro se maximice queda claro cuando uno se percata de que el perímetro es también una función de los ángulos centrales. La fórmula para el perímetro de una representación poligonal *(N, K , u, m)* está dada por la fórmula:

$$2m\mathrm{sen}\left(\frac{\pi \mathrm{u}}{\mathrm{N}}\right) + 2(\mathrm{K}-\mathrm{m})\mathrm{sen}\left(\frac{\pi(\mathrm{u}+1)}{\mathrm{N}}\right)$$

Lema 1. *Dada (N, K , u, m), la representación poligonal de estos conjuntos AM tiene área máxima y perímetro máximo.*

Prueba: Considérese un polígono *X* de *K* lados que no es una representación de un conjunto AM. Entonces, hay dos triángulos en la partición triangular de X con ángulos centrales
y α_2
y tales que la diferencia $\alpha_1 - \alpha_2 \geq \frac{2\pi}{N}$
. Supongamos que, por ejemplo, $\alpha_1 < \alpha_2 < \pi$
. Si ponemos $A = \alpha_1 + \alpha_2$
, tenemos la fórmula **(1)**:

$$A/2 \geq \alpha_1 + \frac{2\pi}{N} \quad (1)$$

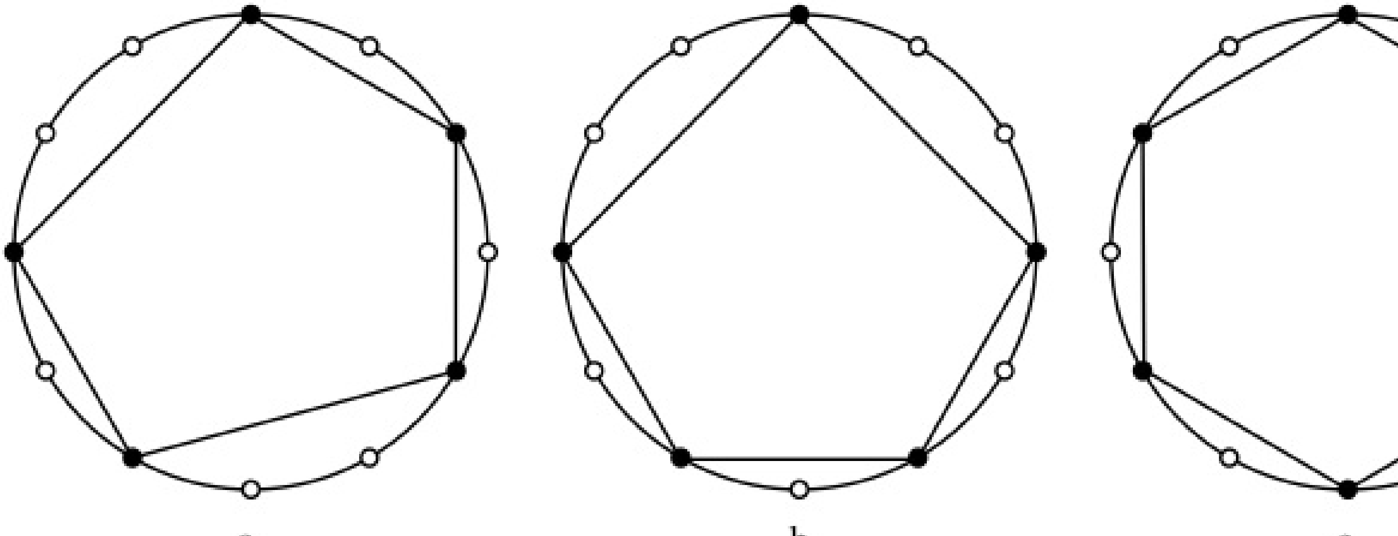
Ya que el orden de los triángulos no tiene efecto en el cálculo del área o del perímetro del polígono, podemos reordenarlos de manera que esos dos triángulos estén adyacentes. Podemos escribir la suma del área de esos dos triángulos como $\frac{1}{2}(\mathrm{sen}\,(\mathrm{A} - \alpha_1) + \mathrm{sen}\,(\alpha_1))$
. Si tomamos la primera derivada del área con respecto a α_1
, esto es, $\frac{1}{2}(\cos(\alpha_1) - \cos(\mathrm{A} - \alpha_1))$
, e igualamos a cero, vemos que el valor $\alpha_1 = \frac{A}{2}$
es el valor máximo. La derivada es positiva para todos los valores $0 \leq \alpha_1 \leq \frac{A}{2}$
.

Sean $\alpha_1^* = \alpha_1 + \frac{2\pi}{N}$
y $\alpha_2^* = \alpha_2 - \frac{2\pi}{N}$
. Por la ecuación (1), vemos que $\alpha_1^* \leq \frac{A}{2} \leq \alpha_2^*$
. Por tanto, la suma de la nueva área es mayor y *X* no puede tener área máxima.

Para el perímetro usamos un argumento similar. La suma de las aristas del polígono está dada por la ecuación $2\mathrm{sen}\,(\frac{\mathrm{A}-\alpha_1}{2}) + \mathrm{sen}\,(\frac{\alpha_1}{2})$
, y su primera derivada es $\cos(\frac{\alpha_1}{2}) - \cos(\frac{\mathrm{A}-\alpha_1}{2})$
. Vemos de nuevo que la suma se maximiza para $\alpha_1 = \frac{A}{2}$
, y su derivada es positiva

$0 \leq \alpha_1 \leq \frac{A}{2}$
. De nuevo, ponemos
$\alpha_1^* = \alpha_1 + \frac{2\pi}{N}$
y
$\alpha_2^* = \alpha_2 - \frac{2\pi}{N}$
. Por la ecuación 1, vemos que
$\alpha_1^* \leq \frac{A}{2} \leq \alpha_2^*$

[illegible]



a b c

Figura 4: Los conjuntos de área máxima de cinco y seis notas

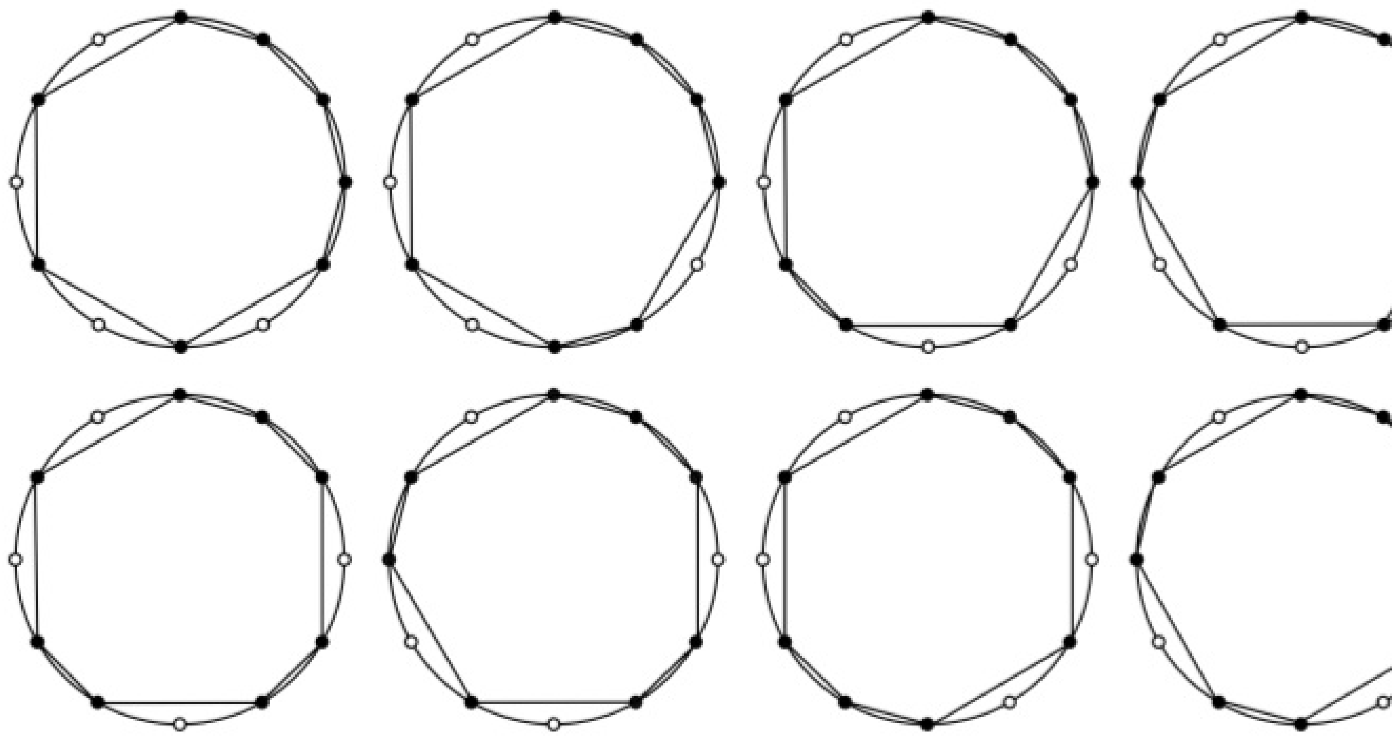
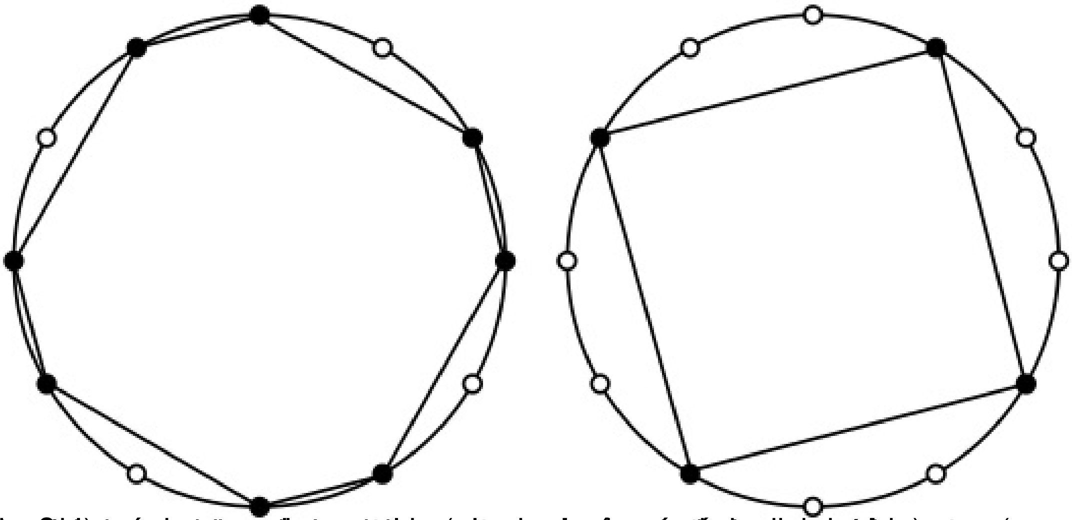


Figura 5: Los diez conjuntos de área máxima con ocho notas.



[illegible]