Buscando El Modelo

Nadie duda hoy en día de la extraordinaria eficacia de las Matemáticas para resolver los más variados, complejos y difíciles problemas. Pero para poder aplicar las sofisticadas y potentes herramientas matemáticas se precisa un modelo de la realidad que se desea analizar, un modelo que conserve las características que determinan la naturaleza del fenómeno o estructura a estudiar.

En el caso de la Música, desde Pitágoras, los matemáticos de todas las épocas han buscado la forma de aproximarse a ese modelo. La tecnología necesaria para grabar y reproducir el sonido ha contribuido, indudablemente, al conocimiento profundo de las características sonoras fundamentales. Sin embargo, el análisis de una estructura musical suele ser bastante diferente del análisis de los sonidos que la componen. Nos interesa más la relación entre los distintos sonidos que la naturaleza de los mismos.

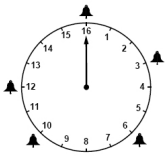
Actualmente, la búsqueda de modelos matemáticos que reflejen las estructuras musicales sigue siendo una aventura que enciende pasiones y controversias. En la siguiente imagen podemos ver el anuncio del programa de un seminario permanente, MaMuX, cuyo objetivo es precisamente reunir y discutir las nuevas aportaciones que vayan surgiendo en la milenaria relación entre música y matemáticas.

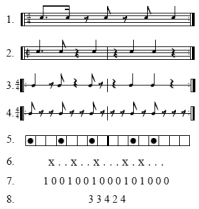
Teoría matemática del ritmo

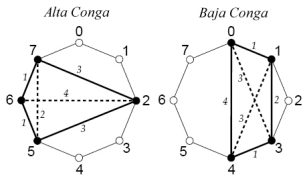
En 2002, el matemático Godfried Toussaint desarrolla una investigación de los ritmos con

herramientas matemáticas, introduciendo nuevas técnicas geométricas, gráficas, matriciales y combinatorias.

Esto permite el análisis, visualización y reconocimiento de ritmos. Toussaint continúa trabajando, en la actualidad, en el Centro de Investigación Interdisciplinaria de Medios de Música y Tecnología (Centre for Interdisciplinary Research in Music Media and Technology) de la universidad McGill en Canadá.







En el año 2005, en su sección “La Columna de Matemática Computacional” de *La Gaceta de la RSME* (Vol. 8.2), Tomás Recio recoge un artículo firmado por José-Miguel Díaz-Báñez, Giovanna Farigu, Francisco Gómez, David Rappaporty y Godfried T. Toussaint, con el título *Similaridad y evolución en la rítmica del ﬂamenco: una incursión de la matemática computacional*
.

Los resultados de ese artículo fueron obtenidos durante el *First Interna-tional Workshop on Computational Music Theory*
celebrado bajo el auspicio del Departamento de Matemática Aplicada de la Escuela Universitaria de Informática (U.P.M.) en junio de 2003.

El artículo es enormemente esclarecedor sobre la metodología seguida para la creación de un modelo matemático de una parte del mundo musical. A continuación reproducimos **un resumen**
del mismo.

Introducción

Usaremos la palabra **ritmo** en su sentido general (contrapuesto a los conceptos de altura y timbre), **patrón rítmico** para su sentido específico (sucesión de tiempos en que se atacan las notas) y **comp ás**
como sinónimo de metro musical.

Muchos estilos musicales se caracterizan por la presencia de ciertos patrones rítmicos que se repiten a lo largo de la pieza y que tienen muchas funciones tales como ser estabilizadores rítmicos, marcar el fraseo, definir el carácter, definir el género, etc. Ejemplos de tales patrones rítmicos, llamados claves en la tradición africana y otras, abundan en estilos musicales tan dispares como el son cubano, el gahu de Ghana o el fandango del flamenco.

Muchas preguntas surgen en torno a estos patrones rítmicos que funcionan como elementos estructurantes: ¿qué características tienen esos patrones rítmicos para determinar ciertos estilos musicales?, ¿qué similaridad podemos encontrar entre esos patrones rítmicos? Entonces una pregunta previa: ¿qué medida de similaridad podemos definir entre patrones rítmicos? ¿Puede ser una medida en el sentido matemático? Muchas de estas preguntas han encontrado respuestas en los trabajos de diversos autores, tanto para las claves binarias y ternarias de géneros musicales pertenecientes a las tradiciones africanas, afrocubanas y brasileñas, como para la música flamenca o como para la preferencia rítmica y otros problemas.

Nosotros vamos a ocuparnos aquí del caso del flamenco. La idea de este estudio consiste en construir un análisis que refleje ciertas relaciones entre los estilos flamencos. Indudablemente, hay muchos aspectos en que dichas relaciones podían basarse, dada la riqueza estilística del flamenco. Nosotros nos hemos centrado en el ritmo porque, entre los muchos factores musicales que constituyen el flamenco, sin duda, es de los más sobresalientes.

Una manera sencilla de llevar a cabo este análisis sería la de desnudar la música flamenca de letra, armonía y melodía y dejar sólo el ritmo (en su sentido general) como único elemento. Esta simplificación no se basa sólo en la sencillez de análisis, sino que también es consecuencia de las dificultades para formalizar la armonía y sobre todo la melodía. Además, es lógico pensar en el ritmo a la hora de simplificar el estilo por el papel de estabilizadores rítmicos que desempeñan los patrones rítmicos en los distintos cantes flamencos. **Apoyándonos en esta idea, hemos realizado un estudio de los patrones rítmicos ternarios de palmas del flamenco.**

Este estudio está inspirado en el análisis filogenético que se usa habitualmente en Biología. Ese análisis requiere la existencia de una distancia, que está definida sobre el material genético. Normalmente, la distancia consiste en medir cuán diferentes son dos materiales genéticos dados. La distancia da lugar a su vez a una matriz de distancias. A partir de ésta, y gracias a técnicas de Bioinformática, se reconstruye un árbol que refleja las relaciones evolutivas entre especies.

Nosotros sustituiremos el código genético por ritmos y, en primer lugar, definiremos una distancia entre patrones rítmicos. Existen varias distancias que se pueden usar para medir cuán lejos se encuentran dos patrones rítmicos. Nosotros hemos usado dos distancias, la cronotónica y la de permutación dirigida, que captan adecuadamente la idea de lejanía entre patrones rítmicos. Por último, aplicando las herramientas adecuadas obtenemos el árbol filogenético para los patrones rítmicos del flamenco.

Algunas nociones sobre los ritmos flamencos

Si existe una clara seña de identidad del flamenco con respecto a otras músicas, ésta es la ejecución de los ritmos con palmas, donde el patrón rítmico subyacente se manifiesta a través de palmas acentuadas. El flamenco usa predominantemente compases ternarios de 12/8, esto es, compases de 12 pulsos agrupados en grupos de tres. En principio, se tocan las 12 palmas que marca el compás de 12/8 y el patrón rítmico emerge acentuando unas cuantas.

En el fandango, por ejemplo, se da un acento (palmada fuerte) seguido de dos silencios (palmada débil) cuatro veces seguidas. Puede verse aquí, a la luz de las definiciones dadas en la introducción, la íntima relación que hay en la música flamenca entre patrón rítmico (ritmo en su sentido restringido) y compás. De hecho, es habitual en el mundo flamenco hablar de “compás” en lugar de patrón rítmico.

Además de este patrón, que podemos llamar periódico, existen otros aperiódicos, llamados *de amalgama*
. Estos patrones rítmicos se pueden pensar como una combinación de un compás de 3/4 (compuesto por dos acentos fuertes con dos acentos débiles intercalados) y un compás de 6/8 (compuesto por tres acentos fuertes con un acento débil intercalado). Claro es entonces que el juego rítmico reside en la distribución de los acentos y buena parte del atractivo del flamenco descansa en esa distribución. Patrones rítmicos de amalgama son los utilizados en las
soleares
, las
bulerías
, las
alegrías
, las
seguiriyas
o las
guajiras
.

A continuación detallamos los patrones rítmicos ternarios del flamenco y alguna de sus posibles notaciones o representaciones. La notación que habitualmente se usa en la didáctica del flamenco es numérica, resaltando los lugares donde se produce un acento.

Fandango:

[**1** 2 3 **4** 5 6

Soleá:

[1 2 **3** 4 5 **6** 7

Bulería:

[1 2 **3** 4 5 6 **7** **8**

Seguiriya:

[**1** 2 **3** 4

Guajira:

[**1** 2 3 **4** 5 6

Cada patrón rítmico ha sido etiquetado por un estilo de cante que lo usa. Esto no significa ni mucho menos que cada patrón rítmico sea exclusivo de ese cante. Por ejemplo, el patrón del fandango es el de las sevillanas; el de la soleá se usa también para las bulerías o alegrías; el de la bulería para las bulerías por soleá; el de la seguiriya para las serranas o saetas; y, finalmente, el de la guajira para las peteneras.

La representación numérica anterior no resulta útil para contabilizar diferencias ni visualizar ciertas propiedades geométricas en las que estamos interesados. Proponemos aquí dos notaciones más ilustrativas como aparecen en las siguientes figuras. La primera presenta la notación binaria donde los espacios negros-blancos se identifican con unos-ceros.

En la representación como polígonos convexos de la siguiente figura, el “0” marca la posición en el tiempo en la cual comienza el patrón rítmico y los vértices indican dónde están los acentos.

Medidas de similaridad rítmica

Como advertimos en la introducción, para construir árboles filogenéticos es necesario contar con una distancia que mida la similaridad rítmica. La distancia debería comportarse de modo que cuanto mayor sea la distancia entre los patrones rítmicos, menor sea la similaridad rítmica. De hecho, este problema está relacionado con problemas de aproximación de patrones en la teoría de reconocimiento de formas. Nosotros usaremos dos distancias que han demostrado funcionar bien en otros estudios sobre el ritmo: la distancia de cronotónica y la distancia de permutación dirigida. La idoneidad de una distancia u otra para el estudio de ritmos es un tema actual de investigación.

La distancia cronotónica

Consideremos el ritmo de la seguiriya, dado por [**1** 2 **3** 4 **5** 6 7 **8** 9 10 **11** 12]. En esta representación, las duraciones relativas de los intervalos de tiempo no se pueden observar fácilmente. En una visualización de ritmos vía
histogramas
los sucesos importantes, tales como el comienzo, el final y el ataque de las notas, se dibujan a lo largo del eje Y, lo que da como resultado el
espectro de intervalos adyacentes
del ritmo. En dicha representación la longitud relativa de los intervalos es claramente visible, pero se pierde la información temporal a lo largo del eje X. Para obtener una representación gráfica que posea las ventajas de ambos métodos, se puede usar el tiempo en ambas dimensiones. El resultado de esa unión se ilustra en la figura siguiente, que muestra los cinco patrones rítmicos del flamenco en notación cronotónica.

Cada elemento temporal entre sucesos (intervalos) es ahora una caja y ambos ejes X e Y representan la longitud temporal del intervalo. Las uniones de los cuadrados representadas en la figura anterior se pueden ver como funciones rectilíneas monótonas del tiempo.

Dada la representación cronotónica de dos ritmos, hay un gran número de formas de medir la disimilaridad. Aquí lo haremos por el área que queda entre ambas funciones. La matriz de distancias obtenida con esa distancia se muestra en la siguiente tabla.

La distancia de permutación

Aquí llamaremos *permutación* al intercambio de dos elementos *adyacentes*, es decir, al

intercambio de un ‘uno’ y un ‘cero’ que son adyacentes en una cadena binaria.

La *distancia de permutación* entre dos patrones rítmicos se define como el mínimo número de permutaciones que se necesitan para convertir un patrón rítmico en otro. Por ejemplo, el patrón X = [101011010101] puede convertirse en el patrón Y = [101101101010] con un mínimo de cuatro permutaciones, a saber, intercambiando la tercera, la quinta, la sexta y la séptima posición con los correspondientes silencios que van detrás de ellos.

Desde el punto de vista musical es razonable usar esta distancia. El oído humano considera como próximos dos patrones rítmicos si el número de cambios entre acentos es pequeño y si tales cambios ocurren entre acentos adyacentes. Además, es interesante observar que el compás bulería resulta precisamente de la permutación de un uno y un cero en el compás soleá. Un ejemplo de esta distancia aplicada a patrones rítmicos del flamenco se ilustra en la siguiente figura, que muestra una distancia de permutación entre la seguiriya y el fandango igual a 4. Ciertos autores sugieren que ésa es la evolución natural entre ambos patrones rítmicos.

Computación eficiente de la distancia de permutación

Claramente, la distancia de permutación puede obtenerse calculándose todas las permutaciones posibles. Sin embargo, este método básico sería muy costoso para vectores n-dimensionales si n es un valor grande.

Un algoritmo mucho más eficiente puede obtenerse si comparamos las distancias de las notas al origen. Lo describimos aquí brevemente. Primero hacemos un barrido de la sucesión binaria y almacenamos un vector con la información del lugar que ocupa cada acento.

Por ejemplo, si consideramos:

X = [1 0 1 0 1 1 0 1 0 1 0 1]
Y = [1 0 1 1 0 1 1 0 1 0 1 0]

entonces almacenamos:

U = (u_1, u_2,..., u_7) = (1, 3, 5, 6, 8, 10, 12) para X y
V = (v_1, v_2,..., v_7) = (1, 3, 4, 6, 7, 9, 11) para Y, respectivamente.

De esta forma, la diferencia entre u_i y v_i es el número mínimo de permutaciones que tienen que realizarse para alinear ambos acentos.

Por tanto, en general, la distancia de permutación entre dos conjuntos de U y V con k notas está dado por:

Calcular U y V a partir de X e Y se puede hacer en tiempo lineal con un simple barrido. Por tanto, en tiempo O(n) podemos calcular d_P(U, V), lo cual da como consecuencia una gran ganancia sobre el uso del algoritmo básico que considera todas las posibles permutaciones.

El lector se debe estar preguntando a qué viene toda esta discusión sobre la reducción de la complejidad de O(n^2) a O(n) cuando en el caso de los ritmos flamencos tenemos n = 12 y la cota cuadrática es computacionalmente aceptable. La razón es que la diferencia de la complejidad resulta crucial cuando estas distancias se pretenden usar en aplicaciones de recuperación de la información musical, donde hay que extraer piezas enteras de una base de datos en la que n puede ser muy grande.

La distancia de permutación dirigida

La *distancia de permutación dirigida* es una generalización de la distancia de permutación, pensada para tratar la comparación de patrones que no tienen el mismo número de acentos (unos). Por ejemplo, el fandango tiene cuatro acentos en lugar de cinco y, por tanto, esta generalización se hace necesaria. A continuación definimos formalmente esta distancia. Sean X e Y dos sucesiones binarias de longitud n que representan dos patrones. Se puede suponer, sin pérdida de generalidad, que X tiene más unos que Y . La distancia de permutación dirigida es el mínimo número de permutaciones necesarias para convertir X en Y bajo las siguientes condiciones:

1. Cada “1” de X tiene que moverse a una posición “1” de Y.
2. Todas las posiciones “1” de Y tienen que recibir al menos un “1” de X.
3. Ningún “1” puede viajar a través de la frontera entre la posición cero y la n-ésima.

Un ejemplo de esta distancia se ilustra en la siguiente figura, que muestra una distancia de permutación dirigida entre la seguiriya y el fandango igual a 4.

La búsqueda de algoritmos eficientes de computación para la distancia de permutación dirigida se encuentra actualmente bajo investigación. En el caso que nos ocupa, se pueden realizar los cálculos a mano obteniendo la siguiente matriz de distancias.

Árboles filogenéticos

Con objeto de estudiar las posibles relaciones genealógicas entre los distintos patrones

rítmicos, utilizaremos una técnica común en *análisis filogenético* que nos ayudará a analizar y visualizar el conjunto de datos obtenidos en la matriz de distancias. Esta técnica de análisis de datos se basa en la generación de los llamados *árboles filogenéticos*. Concretamente aquí hablaremos de la técnica llamada *SplitsTree*.

La técnica está basada en un proceso iterativo de división y que da como resultado una inmersión de un grafo plano con la propiedad de que la distancia en el dibujo entre dos nodos refleja, tanto como es posible, la verdadera distancia entre los dos patrones rítmicos correspondientes en la matriz de distancias. Este método tiene además la buena propiedad de que produce un grafo y no un árbol cuando la estructura de proximidad subyacente no es intrínsecamente de tipo árbol. De hecho, si la estructura de árbol no coincide con los datos perfectamente, se introducen nuevos nodos con objeto de obtener un mejor ajuste. Pueden visualizarse estos nodos sin etiquetas en las dos siguientes figuras, que han sido calculados para la matriz de distancias de permutación dirigida y distancia cronotónica respectivamente.

La interpretación del grafo obtenido es la siguiente. La suma de las longitudes de las aristas del camino más corto entre un patrón y otro es proporcional a la distancia real entre ellos. Los nuevos nodos incorporados (aparecen sin etiqueta) sugieren la existencia de patrones rítmicos “ancestrales” de donde los actuales podrían haber evolucionado. Las aristas se pueden dividir para formar paralelogramos, como se ve en el centro de la figura anterior. Los tamaños relativos de estos paralelogramos son proporcionales a su *índice de aislamiento*, que indica cuán significativas son las relaciones de agrupamiento en la matriz de distancias. La herramienta *SplitsTree* también calcula el *índice de descomposición*, una medida de la bondad del ajuste del grafo entero. El ajuste se obtiene dividiendo la suma de todas las distancias aproximadas en el grafo por la suma de todas las distancias originales en la matriz de distancias. En este caso obtenemos un sorprendente ajuste del 100%.

A continuación, se describen los resultados obtenidos en el grafo *SplitsTree* para las dos distancias.

El *SplitsTree* con la distancia cronotónica

El grafo de la distancia cronotónica sugiere un agrupamiento en tres grupos. Uno está formado por el fandango y la seguiriya; el segundo, por la soleá y bulería; y el tercero, en solitario, la guajira. El compás bulería es el más “alejado” de todos con una suma de distancias igual a 40. En cambio, la guajira es el más similar a los demás con una suma igual a 26. Aparecen cuatro nodos sin etiquetas, esto es, de los que no corresponden a ninguno de los patrones rítmicos dados.

El SplitsTree con la distancia de permutación dirigida

El agrupamiento en el grafo de la distancia de permutación dirigida es ligeramente distinto al de la cronotónica. Un primer grupo lo componen soleá y bulería, otro central, guajira y fandango, mientras que seguiriya permanece en un tercer y solitario grupo. Los patrones rítmicos más similares a los otros son la guajira y el fandango, que empatan a 21. Es por esto que aparecen en el ‘centro’ del grafo. Aparecen dos nodos sin etiqueta, cerca de la guajira y el fandango. También es de destacar que seguiriya y bulería se encuentran en los extremos del grafo y son los patrones mas ‘alejados’ de los demás, con un total igual a 31 y 29, respectivamente.

Propiedades geométricas de preferencia

Una cuestión que suscita gran curiosidad entre los músicos es la de saber por qué ciertos tipos de ritmos se prefieren a otros en ciertas tradiciones musicales. Por ejemplo, en la tradición musical africana aparecen con mucha frecuencia patrones rítmicos asimétricos y sincopados (con acentos fuera de los pulsos). En un intento de caracterizar esas propiedades de preferencia desde un punto de vista geométrico se han introducido dos conceptos nuevos: la *a simetría rítmica*
y el
índice de contratiempo
. En la siguiente tabla aparecen los datos de estas medidas para los patrones rítmicos del flamenco.

Patrón rítmico

Asimetría rítmica

Contratiempo

Fandango

No

0

Soleá

No

3

Bulería

Sí

2

Seguiriya

No

1

Guajira

No

0

Se dice que un patrón rítmico tiene la propiedad de la asimetría rítmica si no contiene dos conjuntos de notas que dividan al patrón (dibujado en un círculo) en dos semicírculos. En la siguiente figura aparecen las diagonales divisorias que existen para los patrones rítmicos flamencos. (No aparece el fandango porque es totalmente simétrico.)

Es interesante observar que de los cinco patrones, la bulería es el único que tiene la propiedad de la asimetría rítmica. Un detalle interesante es que, a diferencia del resto de los patrones, la bulería es el único que contiene intervalos de longitud 1, 2, 3 y 4. Los otros patrones sólo tienen intervalos de longitud 2 y 3.

El índice de contratiempo de un patrón rítmico se define como el número de notas que posee en las posiciones 1, 5, 7, y 11. Estas posiciones resultan ser las no ocupadas si se consideran las posibles divisiones en espacios iguales del compás de 12/8 usando los divisores de 12 (distintos de 1 y 12).

Aparte de la tabla de más arriba, en la figura anterior el índice de contratiempo de cada patrón rítmico se indica en la parte superior derecha de cada círculo. En nuestro caso, se observa que la guajira es el único patrón de 5 acentos con un índice de contratiempo igual a cero. La soleá es, por otra parte, el estilo flamenco con mayor índice de contratiempo.

Conclusiones

En primer lugar, observamos el hecho de que la guajira aparezca prácticamente en el centro de los patrones rítmicos ternarios indica su cercanía o similitud a los demás estilos. ¿Podría esto interpretarse como la huella de la influencia que han ejercido los otros estilos en dicho patrón rítmico? La guajira, como es sabido, es un estilo flamenco de los llamados de ida y vuelta, esto es, que fueron llevados a Sudamérica y, tras una remodelación según los gustos de los músicos sudamericanos, fueron posteriormente incorporados a la música flamenca. ¿Está probada musicalmente dicha influencia en los aspectos rítmicos que aquí tratamos? ¿Hasta qué punto?

Teniendo en cuenta la ‘reciente’ incorporación de la guajira, y fijándonos en el árbol filogenético generado por la distancia de permutación dirigida, cabe pensar que el fandango es el más primitivo, dado que es el otro patrón rítmico que se encuentra en el centro. ¿Hay hechos musicológicos que confirman esta teoría, por otra parte, cada vez más extendida dentro del mundo del flamenco? Por ejemplo, en todas las provincias andaluzas se encuentra una modalidad evolucionada del fandango. Nos estamos refiriendo a los estilos de malagueñas, granaínas o tarantas etc.

Un nuevo aspecto que volvería a indicar la importancia genealógica del fandango es la reconstrucción de los patrones rítmicos ancestrales citados en la construcción de los grafos con la herramienta *SplitsTree* y que allí aparecen sin etiqueta. Haciendo uso de la distancia de permutación dirigida, se puede obtener un *hipotético patrón ancestral* que se encuentra justo en el centro del árbol. Actualmente, es un problema abierto el diseño de

algoritmos eficientes que reconstruyan los nodos ancestrales. En ocasiones, puede hacerse el cálculo a mano. Para el caso de patrones rítmicos flamencos con la distancia de permutación dirigida, la representación rítmica obtenida es [1 0 0 1 0 0 1 0 0 1 1 0], que de hecho, se usa en el flamenco como terminación o coletilla para los fandangos de Huelva.

Por otra parte, si eliminamos la guajira de nuestro estudio, estilo que hemos dicho parece ser posterior a los demás en el flamenco, el fandango y la soleá son los nodos que juegan un papel central en el análisis filogenético (con respecto a la distancia de permutación dirigida). ¿Sugeriría esto que además del fandango aparece la soleá como patrón rítmico primitivo? ¿Se entendería entonces que, de estos patrones primitivos y, tras un proceso evolutivo, fueron apareciendo los demás? Un hecho que respaldaría esta hipótesis puede encontrarse en el reciente uso del patrón rítmico aquí llamado bulería, y que proviene de la soleá sin más que permutar un acento con un silencio. Por su parte, ya existen teorías que indican que la seguiriya es un estilo incorporado al flamenco a finales del siglo XIX y principios del XX.

Finalmente, aventuraremos algunas hipótesis sobre las medidas de preferencia en el flamenco. Es conocida la inclinación de los flamencos llamados “puristas” por los estilos que usan el patrón de la soleá. ¿Podría residir la explicación de este hecho en su alto índice de contratiempo? Por otro lado, también es conocida la popularidad que goza la bulería entre el público flamenco en general. ¿Constituye la propiedad de la asimetría rítmica una posible explicación de ese hecho?