

81. (Febrero 2017) Una resección subjetiva de libros sobre matemáticas y música

Escrito por Paco Gómez Martín (Universidad Politécnica de Madrid)
Miércoles 15 de Febrero de 2017 00:00

1. Introducción

Por circunstancias puramente casuales he recibido en las últimas semanas peticiones de varios lectores preguntando por referencias de libros y artículos sobre matemáticas y música. En vista de ello y para satisfacer su deseo, vamos a dedicar el artículo de este mes a hacer una resección de algunos libros sobre matemáticas y música. Ya avisamos que, como toda resección, tendrá un cierto grado de subjetividad y que algunos lectores encontrarán que faltan cierta referencia mientras que otros en cambio pensarán que sobran tal otra referencia. Intentaré cubrir el mayor número de aspectos del campo, lo que no es fácil, y con una profundidad razonable, lo cual sigue sin ser fácil. La lista que viene a continuación cubre desde textos de divulgación hasta textos que se pueden encontrar en cursos avanzados en la universidad.

Hemos dividido en tres secciones las referencias. Primero están los libros de divulgación, que pueden leer los lectores interesados en las relaciones entre las matemáticas y la música. Son textos que son esencialmente divulgativos y que con unos mínimos conocimientos en ambos campos son posibles de seguir y disfrutar. La segunda colección de referencias ya son libros más avanzados, tanto en extensión como en profundidad. Algunos son textos universitarios que requieren matemáticas avanzadas y teoría de la música también avanzada. Comentaremos las características más sobresalientes de cada uno. Por último, hay unas pocas referencias de libros avanzados, dirigidos a musicólogos sistemáticos y computacionales, o lectores que tengan un nivel muy alto en ambas disciplinas.

2. Libros de divulgación

2.1. La armonía es numérica

Un reciente número de la revista National Geographic consistía en un monográfico de título La armonía es numérica [[AM16](#)] redactado por Javier Arbonés y Pablo Milrud. Está deliciosamente escrito y

maquetado y está compuesto de cinco capítulos. En el primero los autores explican la teoría de la afinación pitagórica con un sentido exquisito de la exposición. El segundo capítulo es una teoría del ritmo, que revisan desde una perspectiva histórica. Es muy adecuado para aquellos que quieran entender los fundamentos matemáticos

81. (Febrero 2017) Una resección subjetiva de libros sobre matemáticas y música

Escrito por Paco Gómez Martín (Universidad Politécnica de Madrid)
Miércoles 15 de Febrero de 2017 00:00

del ritmo en la música occidental (que es de carácter esencialmente divisivo frente a otras músicas que son aditivas). El capítulo 3 es una revisión de la fructífera relación que hay entre geometría y composición. Los autores muestran de una manera atractiva cómo se pueden usar transformaciones geométricas para generar variación en el material musical. Se habla, pues, de traslaciones, rotaciones, inversiones y de sus equivalencias musicales. Todo ello está profusamente ilustrado con ejemplos musicales tomados de los grandes compositores, desde Bach a Messian. El cuarto capítulo está dedicado a estudiar la digitalización del sonido; es el capítulo más técnico, más informático si queréis, y es enormemente instructivo. El último capítulo se titula Matemática para componer y versa sobre las matemáticas para la composición y es básicamente una excelente exposición de la teoría dodecafónica.

2.2. The math behind the music

Harkleroad escribió un delicioso libro, no demasiado largo, de 130 páginas, titulado The math behind the music [[Har06](#)]. El autor toca varios temas, siempre con una prosa cristalina, con abundantes ejemplos musicales y con una férrea voluntad de claridad conceptual. El libro empieza con una defensa de la existencia de la relación entre las matemáticas y la música y termina con un capítulo cuyo título es Cómo no mezclar matemáticas y música, donde previene al lector sobre las relaciones forzadas o triviales entre ambos campos. En el resto de los capítulos Harkleroad estudia varios temas: la altura del sonido, en primer lugar; la teoría de la afinación; las transformaciones matemáticas del material musical (como hacían arriba Arbonés y Milrud); la teoría de grupos aplicada al tañido de campanas; la teoría de la probabilidad; y el estudio de los patrones melódicos.

2.3. La columna de Matemáticas y música de Divulgamat

Espero que el lector pueda perdonar a este humilde autor la necesidad de tener que citarse. He puesto todo mi esfuerzo y honestidad por hacer de esta columna una fuente de divulgación para las matemáticas y la música. Como puede ver el lector, en la columna de este mes casi todas las referencias están en inglés. En castellano no parece haber una tradición de estudio de estas dos disciplinas, matemáticas y música, como una unidad. Una de mis preocupaciones con esta columna ha sido la de proporcionar al lector en castellano de material de calidad para adentrarse en esa disciplina.

En las columnas de Divulgamat sobre matemáticas y música el lector puede encontrar artículos sobre los siguientes temas:

81. (Febrero 2017) Una resección subjetiva de libros sobre matemáticas y música

Escrito por Paco Gómez Martín (Universidad Politécnica de Madrid)
Miércoles 15 de Febrero de 2017 00:00

- Música y geometría: la serie sobre el teorema del hexacordo [[Góm10a](#)], conjuntos de área máxima y armonía [[Rap10](#)], modelos geométricos del ritmo [[Góm12a](#)] [[Góm12b](#)].
- Matemáticas y composición: la serie sobre Xenakis [[Góm10b](#)], primero compositores automáticos [[Góm11a](#)], Minimalismo y matemáticas: Clapping Music [[Góm12f](#)].
- Modelización matemática de fenómenos musicales: estudio de la síncopa [[Góm11d](#)], estudio de la similitud melódica [[Góm11c](#)], amalgamas, aksaks y métricas euclídas [[SG12](#)], transformaciones rítmicas (binarizaciones y ternarizaciones) [[Góm12d](#)].
- Estudio matemático de tradiciones musicales: la similitud melódica en el flamenco [[Góm11b](#)] y [[GGMDB14](#)].
- Aplicaciones de las matemáticas en la música y su enseñanza: Estadística en la Musicología [[Góm12e](#)], enseñanza de las matemáticas por vía de la música [[Góm12c](#)].
- Teorías matemáticas y computacionales de la música: teoría generativa de la música [[Góm14b](#)], teorías matemáticas de la armonía [[Góm14a](#)], fractales en la percusión [[Góm15](#)], música y probabilidad [[Góm16a](#)], cadenas de Markov e improvisación en el jazz [[Góm16b](#)], composición algorítmica [[Góm16c](#)].

81. (Febrero 2017) Una resección subjetiva de libros sobre matemáticas y música

Escrito por Paco Gómez Martín (Universidad Politécnica de Madrid)
Miércoles 15 de Febrero de 2017 00:00

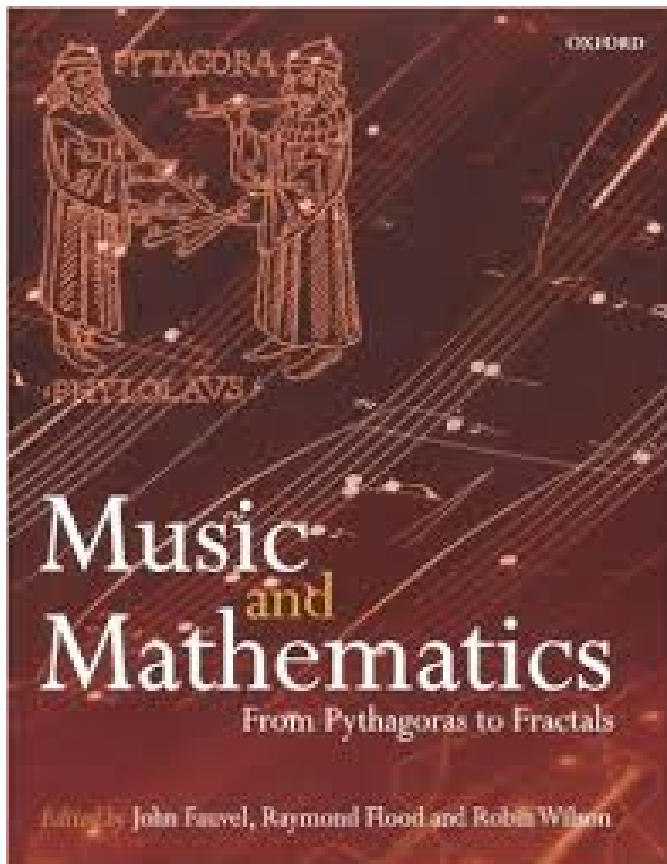
].

- Cognición musical: Paradojas matemáticas y musicales [[Góm14c](#)].

3. Libros para profundizar

3.1. Music and Mathematics: From Pythagoras to Fractals

Nuestro primer libro es Music and Mathematics: From Pythagoras to Fractals [[FFW03](#)], editado por John Fauvel, Raymond Flood y Robin Wilson y tienen entre sus autores a primeras plumas como Ian Stewart, por ejemplo, entre otros. El libro está dividido en cuatro partes. La primera se llama música y matemáticas a través de la historia y proporciona una visión sucinta pero suficientemente rica del asunto, todo ello con ilustraciones históricas de calidad. Se centra en dos aspectos principalmente, la afinación y el temperamento, explicados soberbiamente, y la cosmología musical, donde presenta la teoría de Kepler.



81. (Febrero 2017) Una resección subjetiva de libros sobre matemáticas y música

Escrito por Paco Gómez Martín (Universidad Politécnica de Madrid)
Miércoles 15 de Febrero de 2017 00:00

Figura 1: Music and Mathematics: From Pythagoras to Fractals

El segundo capítulo revisa la teoría matemática del sonido (el capítulo se llama las matemáticas del sonido musical). Los autores pasan revista a los principios fundamentales de la producción del sonido en tres excelentes artículos. Quizás el más llamativo es de Ian Stewart, con su estilo divertido e incisivo, heredero directo de Martin Gardner, quien explica por qué no se puede construir un fagot con trastes. El último artículo describe la teoría de la combinación de tonos y consonancia de Helmholtz y está redactado por David Fowler.

El tercer capítulo es el estudio de la estructura en música. Empieza con un capítulo sobre la geometría en la música, donde se describen las operaciones geométricas más importantes aplicadas a la música. Se analizan varios pasajes musicales en este contexto. El siguiente capítulo versa sobre el

tañido de campanas con cuerdas. Como se sabe, este tipo de toque es altamente susceptible de un estudio combinatorio y la teoría de grupos tiene mucho que decir aquí. El análisis que hacen en el texto es bastante profundo y claro. El tercer capítulo es un recorrido por técnicas matemáticas de composición, donde se hace un especial énfasis en obras de Schoenberg, Boulez y Xenakis.

El último capítulo, *The composer speaks*, tiene más nivel conceptual. Se estudia la relación entre los microtonos y los planos proyectivos y sigue para terminar el libro la composición fractal.

3.2. Music: a Mathematical Offering

Music: a Mathematical Offering, escrito por David Benson, es uno de los mejores libros que hay disponibles ahora mismo para adentrarse a un nivel alto en esta disciplina. El libro está tan bien escrito que es posible adaptarlo desde el nivel de bachillerato hasta los últimos años de la carrera de matemáticas. Hay muchas cosas que me gustan de este libro. Como ya he dicho su escritura, en un inglés conciso pero no conceptista; con una clarísima voluntad pedagógica; con una notación matemática mínima y potente a la vez; con una visión del campo profunda y rica; y hasta diría que con un sentido del juego y del humor que hacen que su lectura sea una auténtico placer.

81. (Febrero 2017) Una resección subjetiva de libros sobre matemáticas y música

Escrito por Paco Gómez Martín (Universidad Politécnica de Madrid)
Miércoles 15 de Febrero de 2017 00:00

El libro está compuesto por nueve capítulos. En el primero Benson estudia las ondas y los armónicos. Me gusta de este capítulo que entra de lleno en los mecanismos de audición humana y esto va a ser muy útil para explicar la percepción musical más tarde. El segundo capítulo se llama teoría de Fourier y es una exposición soberbia en que alterna conceptos matemáticos fuertes (funciones de Bessel, el teorema de Fejer, las convoluciones, los coeficientes cepstrum, entre otras) con implicaciones musicales profundas. Mantiene al mínimo imprescindible las pruebas y los detalles técnicos y se centra con acierto en iluminar las relaciones entre esas matemáticas y la música.

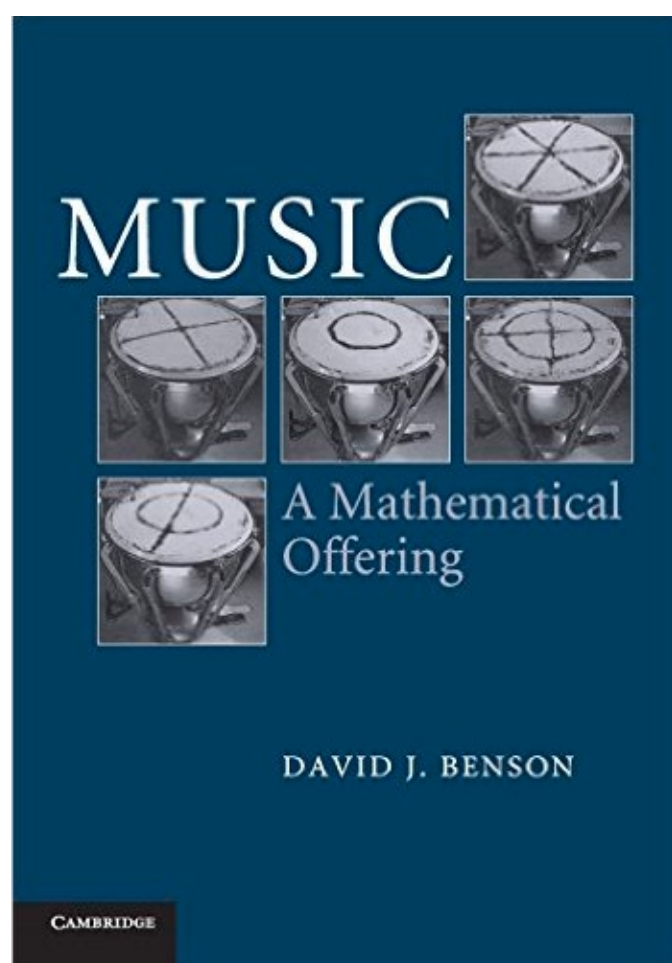


Figura 2: Music: a Mathematical Offering

El tercer capítulo es una guía matemática de la orquesta. Benson explica con un estilo muy ágil

81. (Febrero 2017) Una resección subjetiva de libros sobre matemáticas y música

Escrito por Paco Gómez Martín (Universidad Politécnica de Madrid)
Miércoles 15 de Febrero de 2017 00:00

e ilustrativo la física y las matemáticas de los instrumentos de cuerda, los instrumentos de viento y los de percusión. No se limita únicamente a los instrumentos de la tradición occidental y, por ejemplo, estudia la mbira, un tipo de arpa de pulgar de África.

En el cuarto capítulo el autor examina la teoría de la consonancia en base a fenómenos psico-acústicos. Incluye explicaciones históricas de la consonancia y, como siempre, puesto en contexto musical. Llega a adentrarse en temas tan apasionantes como los espectros artificiales.

El quinto capítulo es uno de nuestros favoritos: las escalas y el temperamento. Y lo es por el estilo con que está escrito y por la profundidad que alcanza. Benson empieza, como era de esperar, con la teoría pitagórica de la afinación y, haciendo un recorrido histórico, pasa por la entonación justa y después por todos los temperamentos posteriores. Justifica muy bien el nacimiento del temperamento igual. En el siguiente capítulo se va a los temperamentos modernos e investiga las escalas de Harry Partch y otras escalas similares, escalas con más de 12 notas o con afinaciones especiales, como las escalas de 31 tonos, las escalas de Wendy Carlos o de Bohlen-Pierce.

El capítulo ocho es un exhaustivo estudio de la síntesis del sonido. Incluye todo lo que se debe saber para estar a un básico en este campo, desde envolventes y LFO hasta polinomios de Chebychev.

El último capítulo es otro gozo intelectual y emocional. Trata sobre al simetría en música. Benson

usa teoría de grupos y aritmética modular para analizar y estudiar todo tipo de ejemplos musicales, desde los patrones en el arpa de Nzara, el tañido de campanas, la modulación por quintas, el dodecafonismo, entre otros.

3.3. Teoría generativa de la música

Un libro imprescindible para los lectores con ansia de profundización es *A Generative Theory of Tonal Music*, de Lerdahl y Jackendoff [[LJ83](#)]. Este libro está inspirado a su vez en la teoría generativa de la lingüística de Noam Chomsky. Estos autores se preguntaron si era posible construir una gramática musical que explicase el fenómeno de la escucha musical tal y como

81. (Febrero 2017) Una resección subjetiva de libros sobre matemáticas y música

Escrito por Paco Gómez Martín (Universidad Politécnica de Madrid)
Miércoles 15 de Febrero de 2017 00:00

había hecho Chomsky con el lenguaje.

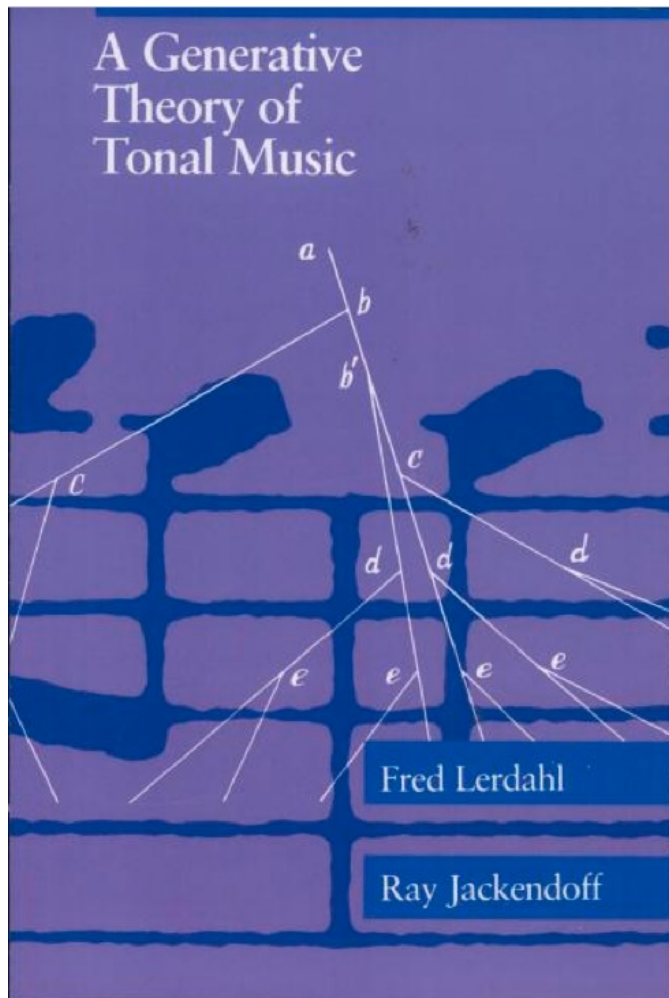


Figura 3: A Generative Theory of Tonal Music

Lerdahl y Jackendoff estudiaron la música desde un punto de vista de la cognición musical (tienen en cuenta muchos principios de esta disciplina) y con un afán de encontrar elementos estructurales en la música (ellos solo estudiaron la música tonal occidental). En la columna de julio de 2014 y siguientes [[Góm14b](#)], estudiamos en profundidad este libro. Allí decíamos que estos autores propone una estructura jerárquica compuesta por cuatro partes y que forma la base sobre la cual proporcionarán una descripción estructural de una pieza musical. Esas cuatro jerarquías son:

81. (Febrero 2017) Una resección subjetiva de libros sobre matemáticas y música

Escrito por Paco Gómez Martín (Universidad Politécnica de Madrid)
Miércoles 15 de Febrero de 2017 00:00

1. Estructura de agrupación. Expresa la segmentación jerárquica de la pieza en términos de motivos, frases y períodos.
2. Estructura métrica. Expresa los fenómenos métricos, esto es, los relacionados con la alternancia de tiempos fuertes y débiles.
3. Reducción interválica-temporal. Asigna una jerarquía a los tonos de una pieza en función de la estructura de agrupación y métrica.
4. Reducción de prolongación. Más abstracta que las anteriores, asigna a los tonos una jerarquía que expresa la dialéctica tensión-relajación en los aspectos armónicos y melódicos.

La lectura de este libro requiere un buen conocimiento del repertorio de la música clásica occidental, pues el libro está trufado por doquier de ejemplos musicales muy detallados.

3.4. Musimathics

Este libro de dos volúmenes está escrito por el músico, compositor, ingeniero de sistemas y multimedia Gareth Loy. Su libro, Musimathics [[Loy11](#)], está en la estela del libro de Benson. El libro de Loy contiene 10 capítulos, escritos con intensidad y profundidad. Empieza con un primer capítulo en que presenta conceptos musicales básicos, desde tono hasta timbre pasando por ritmo o escala. Tras esto entra directamente en la teoría de la afinación y cubre desde la afinación pitagórica hasta el temperamento

igual y algunas afinaciones no tradicionales. El tercer y cuarto capítulo son una revisión bastante completa de la física del sonido. En el quinto, Loy estudia los fundamentos psicoacústicos del sonido. Los capítulos siete y ocho son más técnicos y en ellos se estudia acústica avanzada. Como se puede apreciar, está describiendo el fenómeno musical desde distintos puntos de vista antes de entrar en los capítulos finales, donde hace uso de todo lo anterior. El capítulo nueve versa sobre composición y métodos matemáticos. Se pasan revista principalmente a métodos estocásticos de composición, sobre todo a cadenas de Markov, pero también se tocan otros temas interesantes, como la teoría de la información y la representación del conocimiento musical. El volumen dos está dedicado principalmente a teoría de la señal y tiene menos interés para nosotros.

3.5. From Polychords to Pólya: Adventures in Musical Combinatorics

Michael Keith es un experto en combinatoria, ingeniero de software y además un escritor

81. (Febrero 2017) Una reseña subjetiva de libros sobre matemáticas y música

Escrito por Paco Gómez Martín (Universidad Politécnica de Madrid)
Miércoles 15 de Febrero de 2017 00:00

especializado en la escritura con restricciones al estilo de Oulipo y otros. En el año 91 se aut publicó el libro *From Polychords to Pólya: Adventures in Musical Combinatorics* [[Kei91](#)], que es una delicia en que explora las relaciones entre la combinatoria y la música. En este libro aparecen conceptos como los coeficientes binomiales, el triángulo de Pascal, la sucesión de Fibonacci y el teorema de enumeración de Pólya, con las cuales Keith procede a la enumeración de acordes, escalas y ritmos así como a la clasificación de todas ellas. Este texto se podría usar para motivar el estudio de la combinatoria desde alumnos de bachillerato hasta músicos con ciertos conocimientos matemáticos. En todo el texto se siente la presencia de la idea de la relevancia de la enumeración exhaustiva de elementos musicales. Aparte de la clasificación y enumeración, Keith propone medidas matemáticas de fenómenos musicales. En el libro encontramos, por ejemplo, una definición de síncopa, que fue analizada en esta columna en octubre de 2011, en el artículo de título *Medidas matemáticas de síncopa* [[Góm11d](#)], así como también una medida que cuantifica la bondad de una escala.

3.6. The cognition of basic musical structures

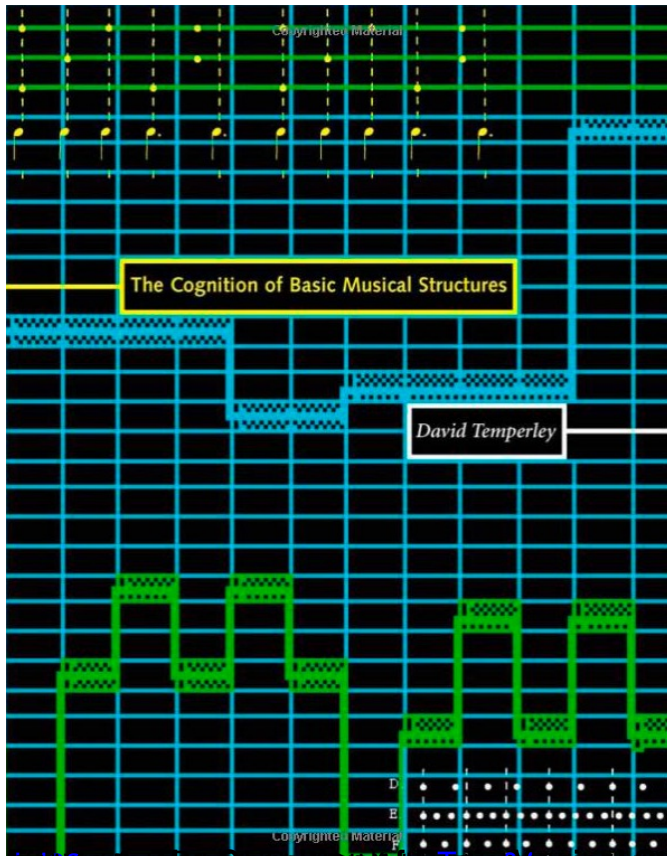
La mejor manera de describir el propósito de este libro, *The Cognition of Basic Musical Structures* es citar las palabras de su prefacio (nuestra traducción):

This book addresses a fundamental question about music cognition: how do we extract basic kinds of musical information —meter, phrase structure, counterpoint, pitch spelling, harmony, and key—from music as we hear it? My approach to this question is computational.

[En este libro se trata una pregunta fundamental sobre la cognición musical: ¿cómo se extrae los tipos básicos de información musical information —métrica, estructura de la frase, contrapunto, notas, armonía y tonalidad—a partir de la música que oímos? Mi enfoque para contestar a esta cuestión es computacional.]

81. (Febrero 2017) Una resección subjetiva de libros sobre matemáticas y música

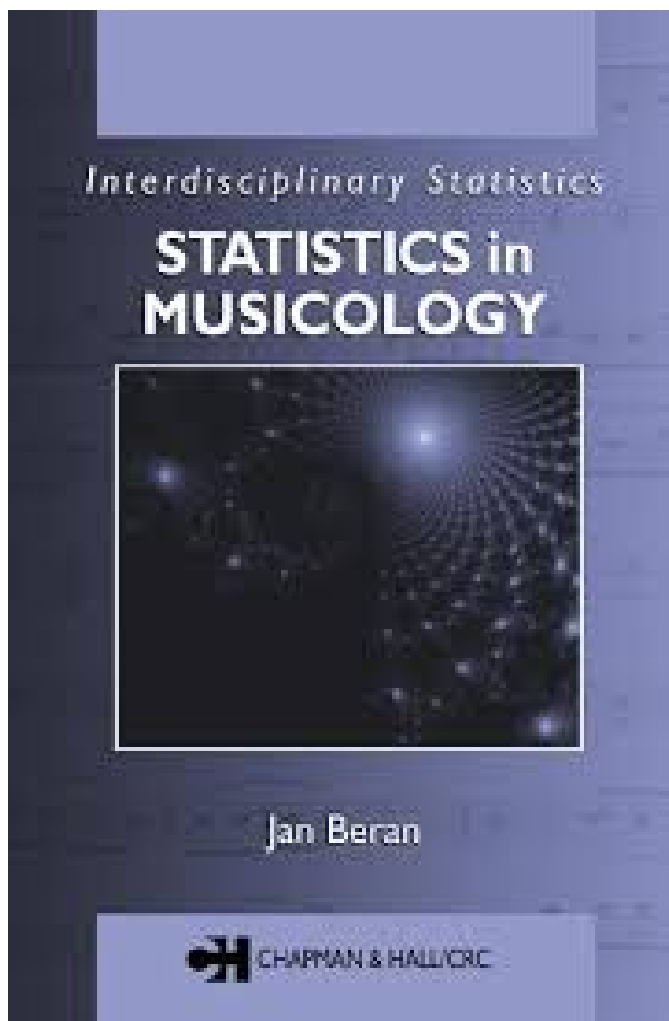
Escrito por Paco Gómez Martín (Universidad Politécnica de Madrid)
Miércoles 15 de Febrero de 2017 00:00



El libro trata de la cognición de las estructuras musicales básicas. El autor, David Temperley, es un psicólogo y músico que ha trabajado en la comprensión de la música desde una perspectiva cognitiva y matemática. El libro es una obra de referencia para los investigadores en el campo de la psicología de la música y la neurociencia cognitiva.

81. (Febrero 2017) Una resección subjetiva de libros sobre matemáticas y música

Escrito por Paco Gómez Martín (Universidad Politécnica de Madrid)
Miércoles 15 de Febrero de 2017 00:00



Definición de música: estudio del comportamiento acústico y de la organización de los sonidos.
Definición de matemáticas: estudio de los números, las formas y las relaciones.
Definición de estadística: estudio de los datos y su interpretación.
Definición de música matemática: estudio de las relaciones matemáticas en la música.
Definición de estadística musical: estudio de los datos musicales y su interpretación.