Escrito por Alfredo Pérez Jiménez
Sábado 01 de Octubre de 2005 01:00

El siguiente problema fue propuesto por Nick Robinson en el Boletín nº 182 de la British Origami Society

“ *Doblar un papel cuadrado por una línea, abatiendo por completo la parte que queda a un lado de esa línea, sobre la otra parte.*

Con esto, quedará a la vista parte del anverso del papel, y parte del reverso.

Se trata de determinar una línea de abatimiento de forma que las superficies que quedan a la vista de una y otra cara del papel, tengan igual área y ésta sea la máxima que podamos obtener.”

La figura siguiente ilustra el problema con un plegado que, naturalmente, no representa la solución.

Figura 1

Razonamiento:

Si la parte que abatimos queda por completo dentro del recinto del cuadrado, es evidente que se pueden considerar tres áreas:

– El triángulo azul (visto)
– Otro triángulo idéntico debajo del azul, que queda oculto.
– Un polígono irregular rojo (visto)

Como el problema plantea el que las partes vistas tengan el mismo área, lo que se trata de encontrar es una línea de pliegue que haga que las superficies del triángulo (azul) y la del polígono (rojo), sean iguales.

Como el cuadrado inicial comprende el polígono y 2 triángulos (el visto y el tapado), es evidente que el área buscada, será igual a 1/3 de la del cuadrado, puesto que las 3 partes han de ser iguales.

Es casi inmediato encontrar las siguientes soluciones:

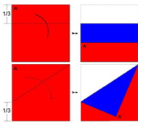


Figura 2

Figura 3

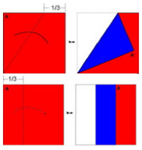


Figura 4

Figura 5

En tanto que las soluciones anteriores las encontramos desde la Geometría, si nos ayudamos del Álgebra, no será difícil encontrar la de la Figura 6, e infinitas más de las de la Figura 7 :

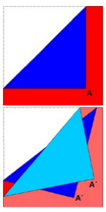


Figura 6

Figura 7

Todas las anteriores soluciones cumplen uno de los planteamientos del problema: *"Que sean de igual área", p*
ero ¿cumplen con la otra condición, es decir,
que esa área sea la máxima posible
?

Sin duda alguna, ambas condiciones se cumplirían si hubiera la limitación de que la zona vista del reverso (azul), cayera dentro del cuadrado, pero como no es así, debemos plantearnos el que la línea de abatimiento sea como la de la siguiente figura:

Figura 8

en que una zona del reverso “escapa” de la superficie ocupada por el cuadrado inicial y ya no es aplicable el Razonamiento expuesto arriba.

En esta situación también es innegable, el que para cada punto E del borde del cuadrado, existirá un punto F de forma que las áreas azul y roja sean iguales, por lo que para la primera condición del problema también habrá infinitas soluciones. Los límites de esta situación son los que corresponden a d = 2/3, representado en la Figura 2, y d = 1/3, representado en la Figura 3 (y sus simétricos respecto de la diagonal principal A-C).

Recapitulando todo lo anteriormente expuesto, construimos la Figura 9, en la que se han marcado a trazos las líneas de pliegue de las figuras 2 a 5. Los puntos negros son los que corresponden a los marcados A´ en esas figuras y en la Figura 6.

La curva con la que hemos unido estos puntos es el lugar geométrico de todos los puntos A´ posibles, de tal forma que las áreas de las superficies vistas de anverso y reverso del papel tras el pliegue, sean iguales.

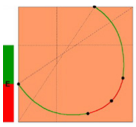


Figura 9

En tanto y cuanto el punto E de la Figura 8 se mueva a lo largo del borde del cuadrado marcado en rojo al margen de la figura, el punto A´ será uno de los del tramo rojo de la curva, y sea cual sea el punto de la curva, LAS SUPERFICIES VISTAS SERÁN IGUALES A 1/3 de la del cuadrado.

Cuando el punto E se desplace en el tramo del borde del cuadrado marcado en verde al margen, el punto A´ será uno de los de la rama verde de la izquierda de la curva de la curva. (La otra rama es simétrica y la produce el desplazamiento del vértice D).

¡ATENCIÓN! Los *puntos extremos* de estas ramas verdes, sabemos que también corresponden a SUPERFICIES VISTAS IGUALES A 1/3 DE LA DEL CUADRADO (Figuras 2 y 5), pero …..

¿Qué valor tendrán las áreas de las superficies correspondientes a los otros puntos de las ramas verdes?

Serán:

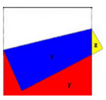
1.- ¿IGUALES TAMBIÉN A 1/3 DE LAS DEL CUADRADO?
2.- ¿MENORES O MAYORES?

Y si son mayores,

¿CUÁL ES EL PUNTO QUE CORRESPONDE A LA MÁXIMA Y QUÉ VALOR TIENE EL ÁREA?

RAZONEMOS:

Vamos a generalizar el problema en base a los polígonos representados en la Figura 10:



Se verifica que:

$x + z = y$ [1]

y sabemos que es un cuadrado de área 1, o sea:

$x + y + (x + z) = 1$ [2]

Eliminando x de estas ecuaciones, obtenemos:

$y = (1 + z)/3$ [3]

Figura 10

Haciendo z =0, se tienen todas las situaciones representadas en las figuras 2 a 7, para las que las superficies que quedan a la vista:

y = anverso = reverso = 1/3

Para aquellos casos en que se produce el triángulo amarillo, es decir $z>0$, en todas las soluciones posibles, la superficie según [3], será mayor de 1/3.

Es decir, queda contestada la pregunta 2, formulada más arriba:

Existen infinitas soluciones, en que la superficies vistas e iguales de anverso y reverso, son may

Queda aún una cuestión y es determinar cual de ellas es la máxima.

Siguiendo con la expresión [3], podemos afirmar que la máxima "y", se corresponderá con aquella en que la de "z" sea también la máxima.

Si de [1] y [2] eliminamos "z", tendremos: y = (1 – x)/2 [4]

Por lo tanto, para hallar el área máxima anverso/reverso, disponemos de las siguientes opciones válidas:

1.- maximizar "y"
2.- maximizar "z"
3.- minimizar "x"

desde aquí, es cuestión de establecer las oportunas ecuaciones que proporcionan las respectivas áreas de "x", "y", "z", en función de la posición del punto E de la Figura 9, por ejemplo, por su distancia a la base del cuadrado y el ángulo que la línea de pliegue forme con la horizontal o la vertical.

Todas las ecuaciones que se pueden plantear son muy complejas y su solución, aún mayor. No entraremos en ello en este artículo, pasando a mostrar en la tabla que figura a continuación, para comentar a la vez los valores que figuran en ella y las Figuras 11, 12 y 13.

	d (Desde la base)	Ángulo entre EF y EG (grados)	SUPERFICIES REVERSO (visto)	SUPERFICIES Triangulo (amarillo)	SUPERFICIES ANVERSO (visto)	Ángulo entre EF y EI (grados)	Superficie que excede de 1/3 (milésimas)
CASO EXTREMO	0,666666666	0,000000000	0,333333333	0,000000000	0,33333333	18,434948823	0,000000
Situaciones en que d > Solución	0,660000000	0,712903160	0,333778425	0,001335276	0,333778425	17,495641023	0,445092
	0,640000000	2,869083781	0,334941573	0,004824718	0,334941573	14,645403743	1,608239
	0,620000000	5,045300613	0,335857292	0,007571877	0,335857292	11,750660295	2,523959
	0,600000000	7,233316325	0,336539909	0,009619728	0,336539909	8,816418736	3,206576
	0,5827735	*9,424659669*	*0,337004426*	*0,011013281*	*0,337004426*	*5,847375195*	*3,671094*
	0,560000000	11,61078233	0,337266678	0,011800033	0,337266678	2,847655096	3,933344
SOLUCION	**0,541118099 ***	13,66226840	**0,337343821 ***	**0,012031463**	**0,337343821 ***	0,000000000	**4,010488**
Situaciones en que d < Solución	0,520000000	15,93370959	0,337253158	0,011759474	0,337253158	-3,231864745	3,919825
	0,500000000	18,05437050	0,337015426	0,011046274	0,337015421	-6,308872081	3,682087
	0,480000000	20,13774860	0,336652359	0,009957079	0,336652360	-9,411611386	3,319027
	0,460000000	22,17690696	0,336188828	0,008566482	0,336188827	-12,54332959	2,855494
	0,440000000	24,16544100	0,335653489	0,006960240	0,335653262	-15,70974011	2,319929
	0,420000000	26,09749903	0,335079590	0,005238770	0,335079590	-18,91948297	1,746256
	0,360000000	*31,50209378*	*0,333574472*	*0,000723417*	*0,333574472*	*-28,94442731*	*0,241139*
CASO EXTREMO	0,333333333	33,69006752 = arctan (2/3)	0,333333333	0,000000000	0,333333333	-34,76089198	0,000000

Notas.- Las filas marcadas en amarillo, son las representadas en las Figuras 11 y 12

**** Valores más aproximados son: d = 0,54118099137345 al que corresponde: S = 0,33734382176955***

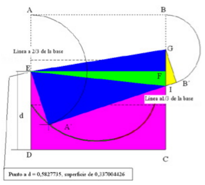


Figura 11

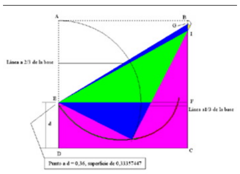


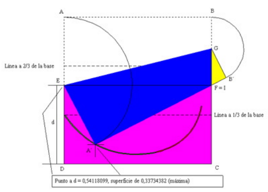
Figura 12

Obsérvense en estas figuras los triángulos de color verde. Partiendo de una posición para el punto E, uno de los lados descansa sobre la línea horizontal E-F; el lado E-I, une el punto E con la intersección del lado A-B abatido, con el lado B-C; el tercer lado, depende según el caso.

En la Figura 11, el triángulo verde es rectángulo y corresponde a todas las soluciones de la parte superior de la Tabla.

En la Figura 12, el triángulo es acutángulo y se corresponde con las situaciones de la parte inferior de la Tabla.

La figura 13, a continuación, representa la Solución final, en que el área es máxima. No nos ocuparemos aquí de probar que es ésta la solución, lo cual dejamos planteado como reto (si te interesa una solución de tipo analítico, puedes contactar con nosotros).



Obsérvese que en esta situación, el triángulo verde ¡NO EXISTE!. Es decir, conociendo la situación del punto E, bastaría situar el F a la misma distancia “d” de la base del cuadrado y, pivotando sobre E, plegar buscando la línea E-G, de forma que A-B corte al lado B-C en el punto F.