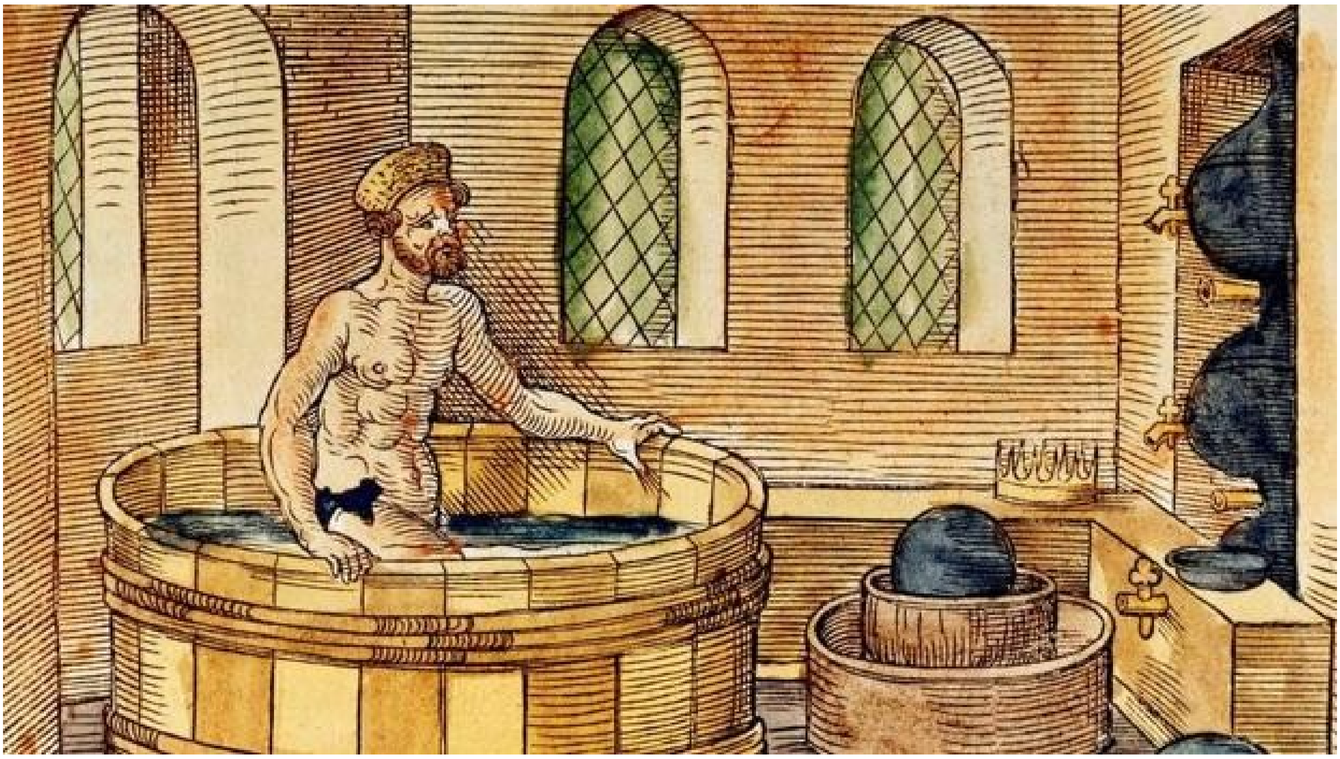
ABC, 13 de Diciembre de 2021
CIENCIA - El ABCdario de las matemáticas
Alfonso Jesús Población Sáez

Aunque nos cueste reconocerlo, las matemáticas nos hacen la vida más sencilla, desde el principio de los tiempos. Y hoy día, también



Grabado ilustrativo del principio de Arquímedes - Archivo

Seguramente la mayor parte de los lectores hayan escuchado o leído la célebre frase «Si he logrado ver más allá, es porque me he apoyado en hombros de gigantes», atribuida a **Isaac Newton**
, en la que reconoce el trabajo realizado por todos aquellos que le precedieron en la búsqueda de respuestas a las cuestiones sobre las que investigaba. Y ciertamente así es, ya que gran parte de lo que nos rodea, comodidades, conocimientos y demás, han sido posibles gracias al esfuerzo e inteligencia de nuestros antepasados. En la actualidad, cualquier joven se puede sentir mucho más seguro y cómodo que uno de hace treinta años en cualquier lugar del mundo (bueno, salvando algunas excepciones; pero ese es otro asunto), ya que tiene en su bolsillo la capacidad de hacer y manejar teóricamente lo que quiera, desde conocer cómo llegar a cualquier lugar, saber en qué lugares puede comer el menú que desee y al precio que considere razonable, comprar cualquier cosa, gestionar el próximo viaje en el medio de transporte que quiera, disfrutar de una película, escuchar su podcast favorito, la lectura de lo que le apetezca o ver el evento deportivo que se esté celebrando en cualquier lugar del mundo.

Materialmente, todo en su mano. ¿Todo? Bueno, dejando por sentado que haya cobertura, wifi funcional, memoria de la batería, etc. Pero eso lo da, equivocadamente bajo mi punto de vista, por supuesto (yo creo que siempre hay que tener un plan B, por si acaso). Es la suficiencia que nos dan la ciencia y la tecnología actuales.

Sin embargo, si nos planteáramos el absurdo juego de sólo utilizar aquello de lo que sepamos su fundamento (no digo poder construirlo, o conocer los detalles que lo hacen posible, sino tener solamente una vaga idea básica de su funcionamiento), probablemente estaríamos mucho más perdidos que aquel joven de hace treinta años. O quizá no. Hagamos una prueba.

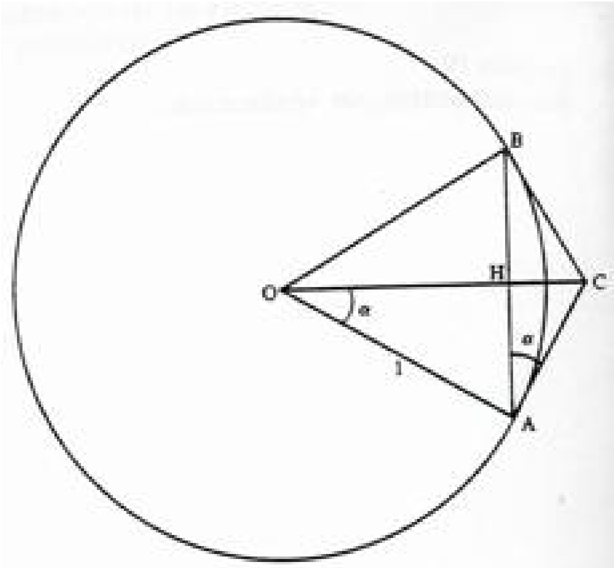
Cuando asistimos a la escuela, aprendemos una amplia cantidad de cosas de diferentes materias (en ese momento siempre cuestionamos su utilidad, es inevitable, pero conforme crecemos acabamos entendiendo su porqué; no de todas, pero sí de muchas). La mayor parte de ellas las aprendemos de memoria, y con el tiempo, si no las usamos, terminamos olvidándolas. Pero pocas veces nos hemos preguntado la razón de porqué son así y no de otro modo, y más aún, los esfuerzos que tuvieron que hacer otras personas para llegar a esa conclusión. Como despreciando ese esfuerzo, lo cual, convendrán conmigo, es poco menos que criticable.

Por ejemplo, yendo a las matemáticas que es la base de esta sección, memorizamos unas fórmulas para calcular el área de una serie de objetos comunes, que nos rodean por todas partes. Para deducir algunas, no tenemos que pensar mucho: el área de un rectángulo, de un cuadrado, de un triángulo, incluso de un rombo o un trapecio, porque en estos dos últimos casos nos deben haber enseñado (y malo, si no fue así) que pueden descomponerse en suma de otras áreas más elementales.

Pero, ¿qué pasa con el área de un círculo? ¿o con la longitud de una circunferencia? ¿Seriamos capaces, ahora mismo de justificar cómo se obtienen? ¿De dónde sale esa misteriosa constante denotada con una letra griega? No, no vale decir, hacemos tal o cual integral y ya está. No hemos llegado a tal sofisticación. El modo en que aquellos ciudadanos griegos de siglos antes de Cristo obtuvieron la fórmula que hoy todos conocemos, nos la explicaron magníficamente nuestros compañeros Urtzi y Miriam en una reseña anterior, 'Arquímedes y la medida del círculo'
, con video incluido. Allí nos dejaron claro como era el método de exhaución de Arquímedes, y cómo calculó diferentes aproximaciones incrementando el número de lados de los polígonos inscritos y circunscritos al círculo (¡¡hasta 96 lados para aproximar π!!).

Uno puede pensar que, una vez probado lo que se busca, el asunto está zanjado. Pero las matemáticas nos ofrecen múltiples puntos de vista, nunca está nada cerrado del todo. En este caso, vamos a ver que también Arquímedes, como Newton, pudo ver más allá, gracias a sus predecesores.

Porque el método de exhaución que todos relacionamos con el genial siracusano, en realidad fue descrito anteriormente por Eudoxo de Cnido en torno al siglo IV a. C., aunque desafortunadamente sólo sabemos esto por referencias de otros autores, ya que no se conserva nada escrito por él. En el Libro XII de sus célebres Elementos, Euclides también hace referencia a este procedimiento, y en él es en quien posteriormente se basa Arquímedes, pero con métodos distintos. Euclides no es tan aplicado, es más teórico. Echemos un vistazo a sus razonamientos (por supuesto con notación y argumentaciones ya modernas, como hacemos con todos los textos antiguos).



[illegible]

$$\text{Área }(ACH) = \frac{1}{2} AH \cdot CH$$

De acuerdo con las definiciones de la trigonometría elemental, tenemos que

$$tg\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{CH}{AC}}{\frac{AH}{AC}} = \frac{CH}{AH},$$

por lo que

$$CH = AH\ tg\ \alpha$$

Entonces, yendo a la expresión inicial, tenemos que

$$\text{Área }(ACH) = \frac{1}{2} AH^2\ tg\ \alpha$$

[illegible]

$$sen\ \alpha = \frac{AH}{OA} = \frac{AH}{1} = AH$$

por lo que

$$\text{Área }(ACH) = \frac{1}{2} sen^2\alpha\ tg\ \alpha = \frac{1}{2}\ \frac{sen^3\alpha}{\cos \alpha}$$

$$\text{Área }(ACB) = 2\ \text{Área }(ACH) = \frac{sen^3\alpha}{\cos \alpha}$$

[illegible]

$$\frac{sen^3\alpha}{\cos \alpha} < \frac{1}{4}\ \frac{sen^3(2\alpha)}{\cos(2\alpha)} = 2\,\frac{sen^3\alpha\ \cos^3\alpha}{\cos(2\alpha)}$$

O lo que es lo mismo, tras simplificar, que

$$cos(2\alpha) < 2\ cos^4\alpha$$

Sabemos que

$$cos(2\alpha) = cos^2\alpha - sen^2\alpha = cos^2\alpha - (1 - cos^2\alpha) = 2\ cos^2\alpha - 1$$

por lo que tendríamos que demostrar que

$$2\ cos^2\alpha - 1 < 2\ cos^4\alpha$$

O lo que es lo mismo, que

$$2\,cos^4\alpha - 2\,cos^2\alpha + 1 > 0$$

Pero esto es evidentemente cierto, ya que si llamamos x = cos α, la desigualdad

$$2\,x^4 - 2\,x^2 + 1 = 2(x^2 - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{2}$$

[illegible]

$$(AC + BC) - AB = 2\,(tg\,\alpha - sen\,\alpha)$$

deducida del dibujo anterior, y la desigualdad trigonométrica

$$tg\,\alpha - sen\,\alpha \leq \frac{1}{4}(tg(2\alpha) - sen(2\alpha))$$

[illegible] *Real Sociedad Matemática Española (RSME)* [illegible]