ABC, 23 de Noviembre de 2020
CIENCIA - El ABCdario de las matemáticas
Ernesto Estrada

Las matemáticas están por todos lados, también en ámbitos que podrían parecer tan alejados como el arte o la música. Es el caso de las curvas planas, presentes en nuestra vida sin que casi nos percatemos de su cotidianidad

Seguramente la mayoría de los lectores de este diario habrán usado alguna que otra vez en sus narraciones alguna **parábola**. Sí, sí, en el sentido literal de la palabra, o sea el de la «narración de un suceso fingido de que se deduce, por comparación o semejanza, una verdad importante o una enseñanza moral». Imaginemos por un instante como evolucionaría nuestra narración «parabólica» en forma gráfica.

Usemos un eje vertical, que llamaremos *y* para representar numéricamente nuestras frases, digamos su orden, y un eje horizontal, que llamaremos *x*, para representar el significado de las mismas. Como estamos hablando «parabólicamente», cada frase tendrá un único sentido «fingido» y otro de «enseñanza moral» que se obtiene por comparación o semejanza. Pues bien, si nuestra narración parte de cero, que representamos por la intercepción entre los dos ejes, los sentidos de cada frase se pueden obtener a través de la ecuación:

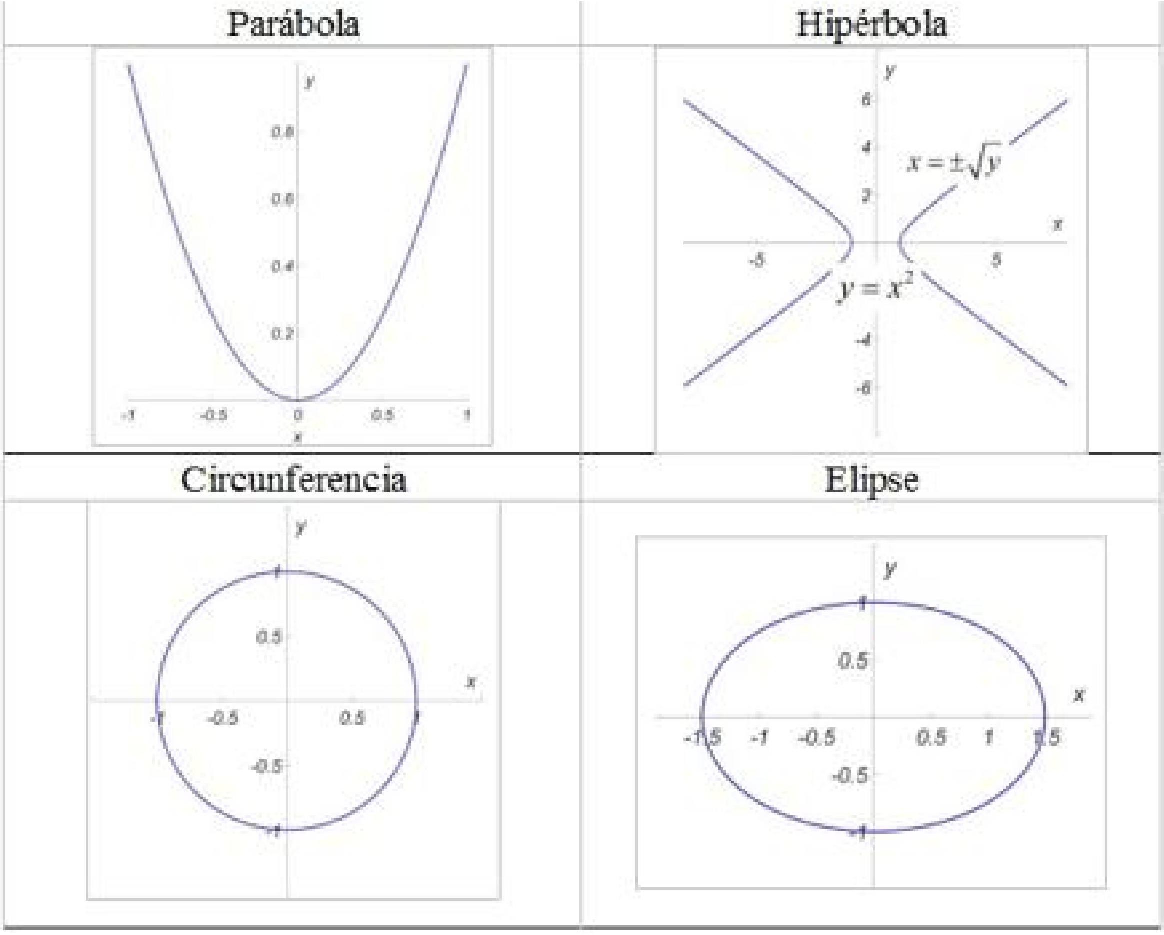
$$x = \pm\sqrt{y}$$

donde, por cada frase *y* existe una única *x* negativa, que representa el sentido fingido de la frase, y una única *x* positiva que representa su enseñanza moral. Es fácil darnos cuenta de que esta ecuación es la de una parábola en el sentido matemático:

$$y = x^2$$

La parábola es un tipo de **curva plana**. Este tipo de curva plana se puede pensar como la huella que deja un punto al moverse por el plano **Euclidiano real** ***x*, *y***

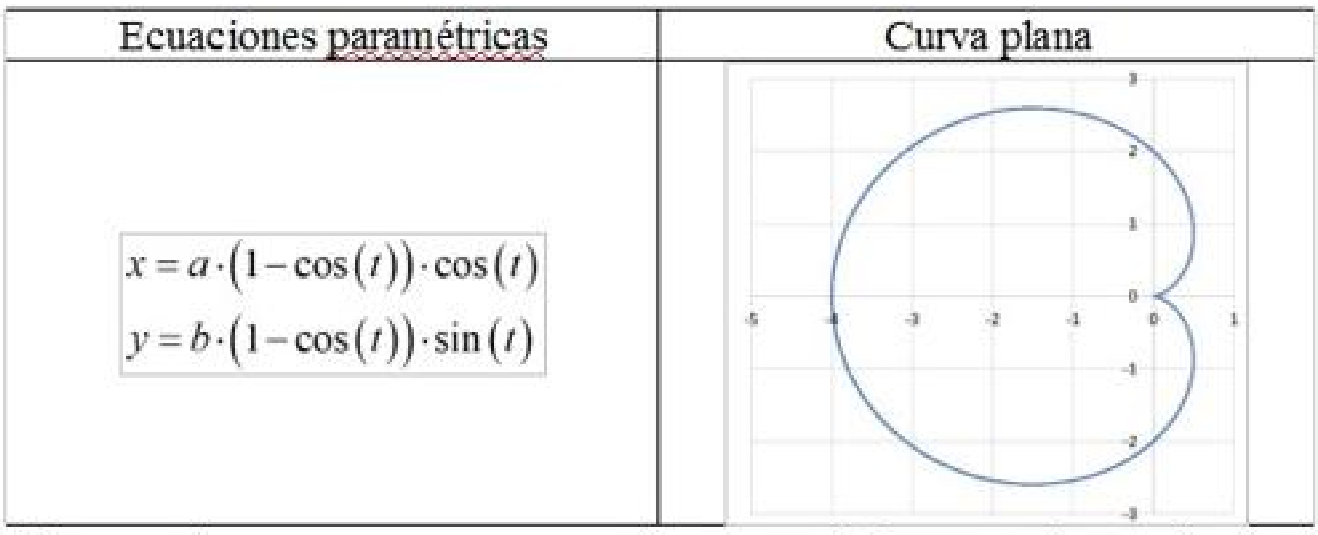
. Algunos ejemplos, además de la ya mencionada parábola, se ilustran a continuación.



Une los puntos

Aunque las curvas planas son curvas continuas, las podemos aproximar a través de **curvas poligonales**
. Vale, no estoy complicando nada, sencillamente es un nombre técnico para el «une los puntos» de toda la vida. Así, nuestro lector podrá construir sus propias curvas planas si dispone de un programa de hojas de cálculo. En este caso usaremos tres columnas, la primera la denotaremos por
t
, la segunda por
x
y la última por
y
. En la columna
t

vamos a escribir números en un rango determinado. Pongamos por ejemplo que escribimos los números entre 0 y 100 con un incremento de 0.1. En la segunda y tercera columnas vamos a escribir las fórmulas de las variables
x
e
y
en función del parámetro
t
para la curva plana que vamos a dibujar. Elijamos valores de
a
y
b
diferentes de cero y escribamos por ejemplo las ecuaciones de la siguiente tabla:



Ecuaciones paramétricas	Curva plana
$x = a\cdot\left(1-\cos(t)\right)\cdot\cos(t)$ $y = b\cdot\left(1-\cos(t)\right)\cdot\sin(t)$	

Estas ecuaciones se conocen como **ecuaciones paramétricas**, ya que las coordenadas de la curva plana se escriben en función de un parámetro:
t
. En este caso la curva plana que hemos construido se conoce como
cardiode
. De esta forma los matemáticos demostramos que sí tenemos corazón. Si ahora insertamos un gráfico de dispersión con líneas de conexión estaremos visualizando una aproximación a la curva que hemos creado. Cuanto menor sea la separación de los puntos en la columna
t
, mejor será nuestra aproximación.

¿Dónde están las curvas?

Como siempre, las matemáticas hay que buscarlas a nuestro alrededor, solo tenemos que mirar con detenimiento. Lo mismo pasa con las curvas. Primero les mostraré algunos ejemplos de dónde encontrar las curvas planas que hemos visto anteriormente. Por ejemplo, si lanzamos una piedra al aire, ésta describirá la misma trayectoria que cualquier proyectil lanzado al aire desde la tierra. Como demostró el gran **Galileo Galilei**, estos proyectiles describirán una **parábola** como consecuencia de la aceleración uniforme de la gravedad.

La gravedad es también responsable de que la órbita de los planetas alrededor del Sol describan otra curva plana. Como demostró **Johannes Kepler,** la órbita de una partícula moviéndose en un campo central de fuerzas en el cual la **fuerza centrípeta** varía inversamente con el cuadrado de la distancia, describe una **elipse** .

Cuando **Ernest Rutherford** investigaba el núcleo atómico bombardeó este con partículas cargadas positivamente, llamadas **partículas alfa**. Sus experimentos concluyeron que las partículas alfa se desviaban del núcleo atómico siguiendo **trayectorias hiperbólicas** . Esto le llevó a la conclusión de que el núcleo estaba cargado positivamente y por eso repelía las partículas alfa.

Otras curvas planas son más difíciles de ver hasta que sabemos dónde están. Un ejemplo es cuando vamos a un concierto de nuestra banda o solista favorito. El cantante por lo general tendrá el sonido de la banda detrás, por lo que su micrófono debería captar solo el sonido de su voz y en menor medida el de sus laterales. En los últimos cincuenta años el micrófono más usado por los cantantes ha sido el **SM58**, un micrófono cuya distribución de sensibilidad auditiva describe una cardiode. Los **micrófonos cardiodes** captan el sonido siguiendo el patrón de esta curva plana, lo que se traduce en una mayor sensibilidad hacia los sonidos de la voz del cantante y mucho menor a los sonidos que llegan de detrás.

Ahora buscaremos otras curvas planas a nuestro alrededor. Si prestamos atención a una cadena que cuelga entre dos postes observaremos la misma curva plana que si observáramos las líneas aéreas de alta tensión eléctrica, o incluso si prestamos atención a los hilos de seda de una telaraña. Estas curvas son conocidas como **catenarias** y se pueden ver también en las obras de **Gaudí**, como la Sagrada Familia de Barcelona.

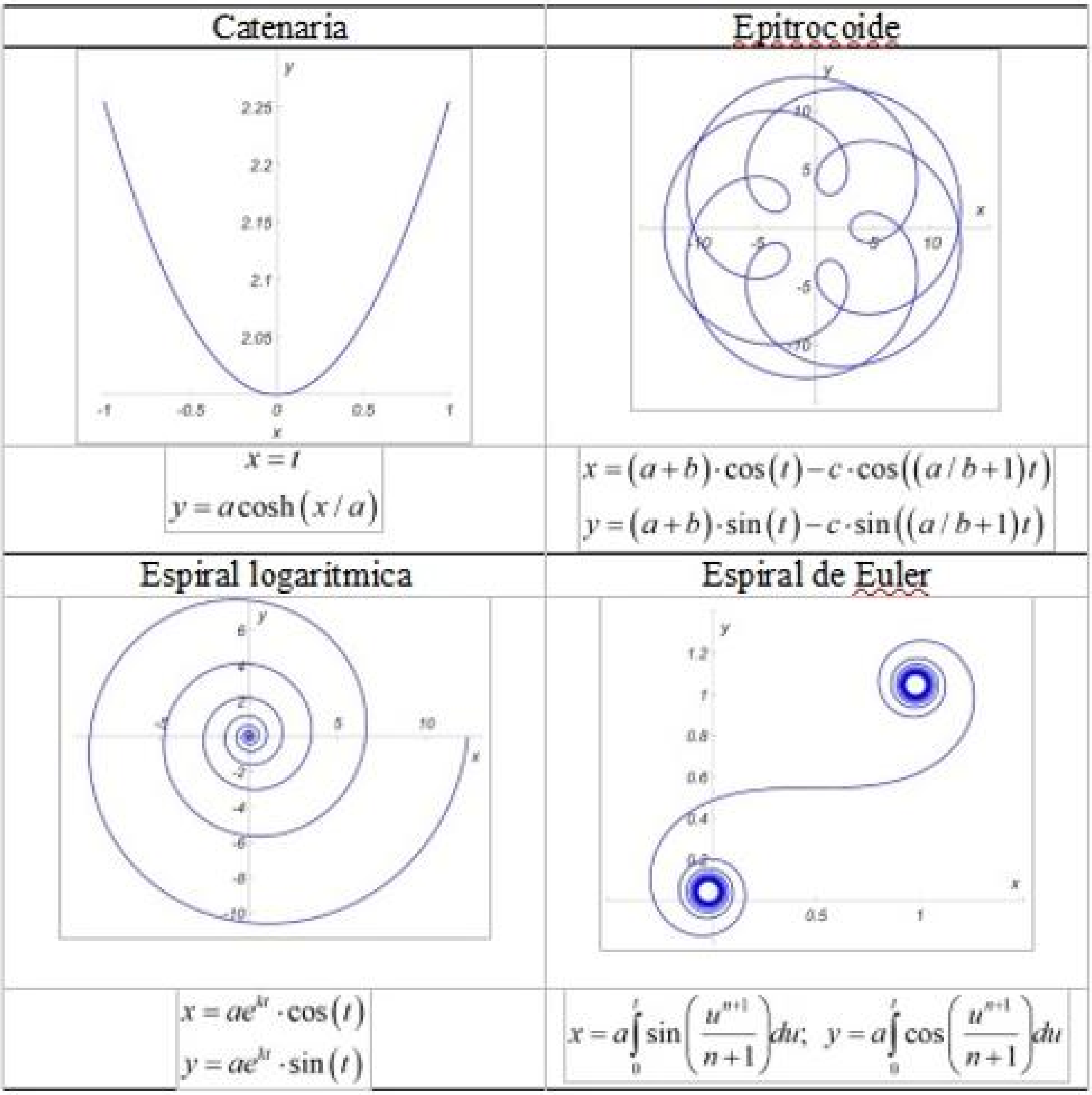
Quizás algunos de nuestros lectores hayan estado observando meticulosamente la trayectoria de algún planeta alrededor del Sol y hayan observado que lo de las elipses de Kepler… Bueno, es cierto que las elipses no son exactamente lo que observamos cuando seguimos el movimiento planetario con un telescopio. La cuestión es que el punto de observación está fijo en la Tierra y esta gira alrededor del Sol. Por tanto, la trayectoria del planeta que estamos observando en realidad se convierte en unas curvas planas bastante complicadas, que describen movimientos hacia adelante y hacia atrás, son las llamadas: **epitrocoides**.

Si alguna vez han estado de noche en el campo quizás hayan observado que los insectos se acercan a la luz artificial de una forma extraña, como dando vueltas en espiral que cada vez se aproxima más a la luz. En efecto, el movimiento de los insectos alrededor de dicha luz describe una **espiral logarítmica** debido a que los mismos tratan de ver la luz a un ángulo constante con la dirección de vuelo, justo como hacen cuando vuelan en línea recta hacia la dirección del Sol.

Por último, quisiera mencionar una curva que nos garantiza seguridad al conducir por una carretera con curvas. Esta familia de curvas es empleada para conectar secciones rectas de carreteras o de vías férreas con secciones curvas de las mismas, o para conectar secciones curvas de la vía que tienen diferentes curvaturas. Si a usted se le ha ocurrido la idea de conectar dos secciones rectas de una carretera con un **arco de circunferencia**, sepa que no iba por mal camino, ya que este fue el método empleado por los ingenieros durante muchos años. Dichas conexiones garantizan unir los tramos usando el camino mas corto. Pero este diseño limitaría considerablemente la velocidad en las curvas ya que la fuerza centrífuga nos haría perder el control y terminar siempre en el arcén.

Este problema se resolvió usando una curva en la cual el radio disminuye suavemente desde la recta hasta el principio de la curva circular y luego se repite al salir de la curva para entrar en otro tramo recto, en este caso aumentando paulatinamente el radio. Así, el cambio de la fuerza centrífuga no sería brusco y podríamos ir a una mayor velocidad a la entrada y salida de las curvas, tal como hacemos hoy en día. La curva que mejor resuelve este problema fue descubierta mucho antes de que surgiera el problema de las carreteras, bueno mucho antes que existieran las carreteras tal y como las conocemos hoy en día. Esta curva se conoce como **clotoide**, **espiral de Cornú** o **espiral de Euler**.

En la misma, el radio de curvatura cambia inversamente con la distancia recorrida, lo que garantiza una salida suave de las curvas en carreteras y vías férreas. Esta curva tiene ecuaciones paramétricas algo más complicadas que las antes vistas y fue propuesta por el físico **Marie Alfred Cornú** para resolver problemas de difracción en óptica. La misma tiene otras aplicaciones interesantes que dejo a la investigación de nuestro lector.



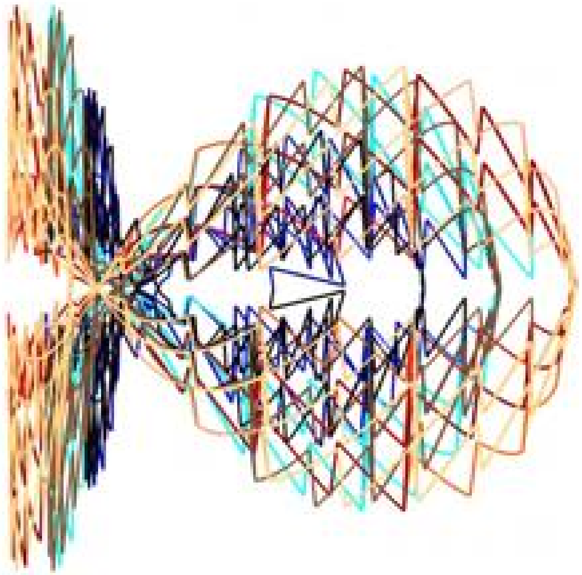
Curvas por diversión

No cabe duda de que las curvas planas antes mencionadas y muchas otras que el lector puede encontrar navegando la red son útiles e interesantes. Pero ¿divertidas? No hay que exagerar. Hace un par de años este autor se planteó la cuestión de si se podrían construir curvas planas de cierto valor artístico, aunque ya sabemos que dicho valor está en los ojos del que mira. Para construir dichas curvas inventó la siguiente transformación. Tomemos nuevamente nuestra variable *t*, pero en este caso solo tomará valores enteros: 1, 2, 3,…, etc. Estos números se pueden transformar en otra serie de números sumando sus dígitos y luego multiplicando el resultado por el numero original. Por ejemplo, si el número es 251, sumamos sus dígitos: 2+5+1=8 y el resultado lo multiplicamos por 251, 251*8=2008. Si representamos gráficamente, con nuestra hoja de cálculo, los valores *x=t y y=T(t)*, donde *T* representa la transformación antes descrita, lo que obtenemos… sigue siendo bastante aburrido.

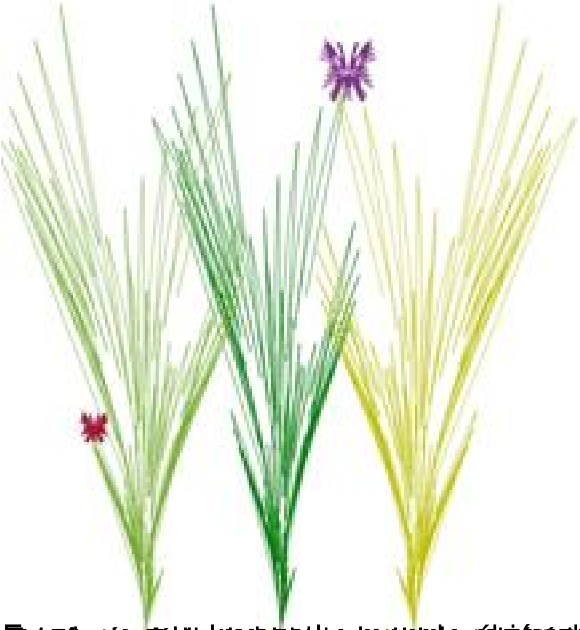
Bueno, apliquemos esta estrategia a cualquier función. Para no escribir más ecuaciones me limitaré a describir un ejemplo, digamos para el seno del número 251:

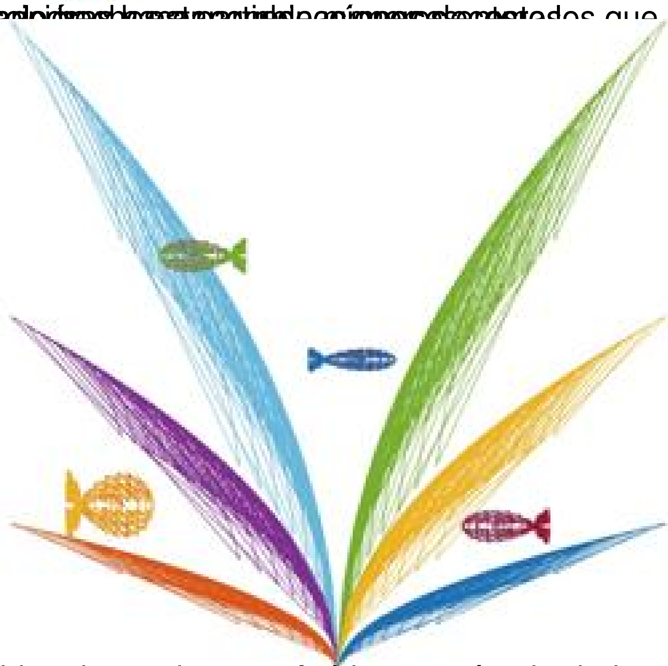
$$T\left[\sin(251)\right] = \left(\sin(2)+\sin(5)+\sin(1)\right)\cdot\sin(251) = -0.1319$$

Bien, si ahora representamos gráficamente: *x=T(t)*; *y=T(sin(t))* obtendremos una curva plana. De igual forma si usamos: *x=2T(cos(t))+T(cos(2t)); y=2T(sin(t))+3T(sin(2t))* obtendremos otra. Ambas curvas planas se muestran debajo. He añadido colores para dar imágenes más «artísticas», pero las figuras en sí las han formado los números enteros por sí solos, usando la transformación antes descrita (ver más en **Mathematical Intelligencer 40** (1), 2018 pp. 73-78).



[illegible]





[illegible] *Matemática Española (RSME)* [illegible] *Real Sociedad* [illegible].