ABC, 2 de Marzo de 2020
CIENCIA - El ABCdario de las matemáticas
Alfonso Jesús Población Sáez

Un problema de tipo geométrico sobre el que uno puede reflexionar delante de una caja de zapatos

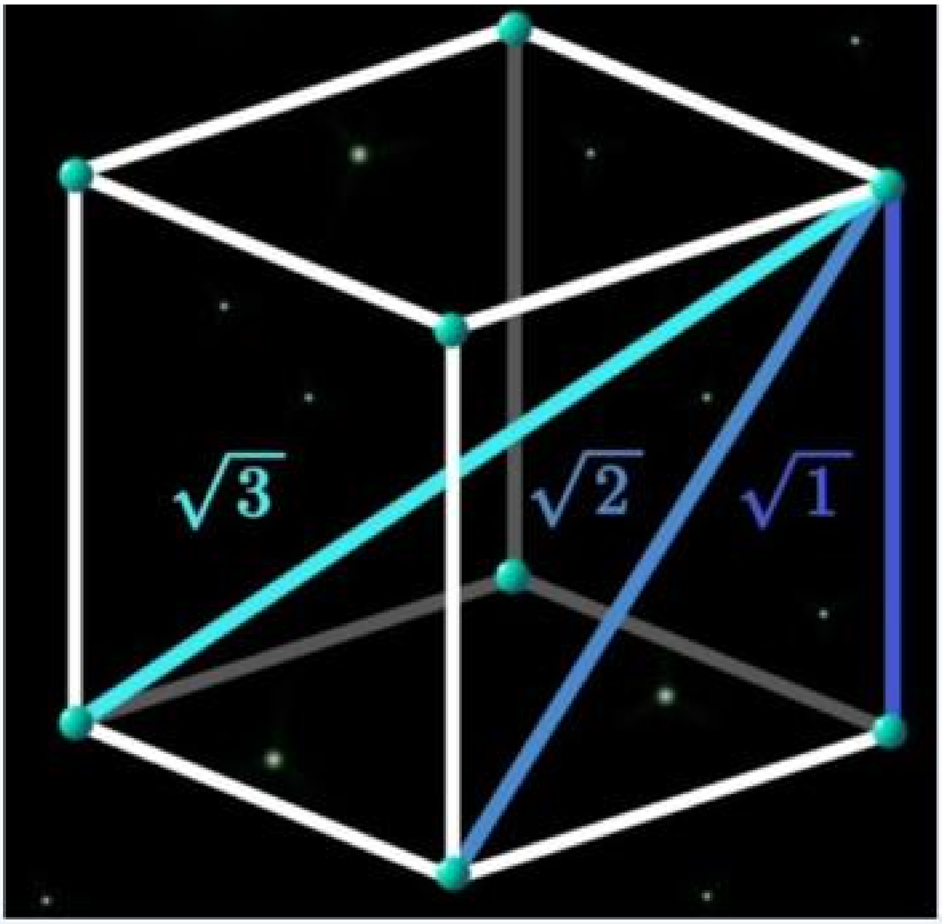
Adobe Stock

A estas alturas, a todos los que sigan estas reseñas (y a muchos otros, por supuesto), le sonará eso de los **Problemas del Milenio**, (ver, por ejemplo 1 , 2 , 3 , 4 , 5). Algunos un poco más apasionados por nuestra disciplina conocerán también
los 23 problemas de Hilbert
(en realidad 24, según se descubrió más adelante), algunos aún tampoco resueltos (y algunos dentro de los problemas del milenio). Un grupo aún menor (los asiduos a ésta y otras columnas de divulgación matemática se mantienen dentro) tendrá noticia de otros problemas más técnicos tampoco resueltos aún (el de la

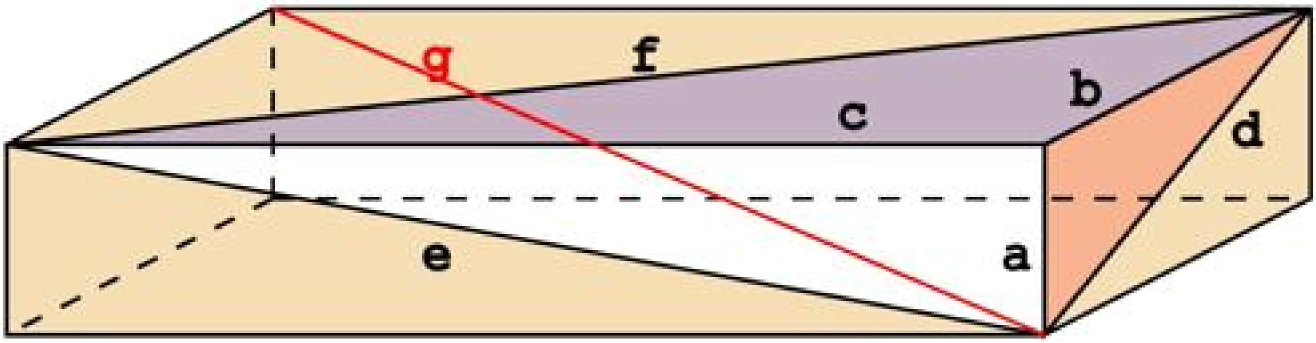
suma de tres cubos
, la
conjetura de Goldbach
, la de Collatz, y tantas otras de teoría de números). Hoy les paso a enunciar
uno de tipo geométrico
(también quedan muchas interrogantes de esta rama de las matemáticas, planteadas, pero sin solución, aún).

Recientemente he visto publicado en redes sociales la siguiente imagen de **un cubo con tres longitudes con expresiones de raíces cuadradas**
(nótese que sólo dos de ellas son en realidad números irracionales):

Como curiosidad no está mal, pero lo realmente interesante no es esto, sino responder a esta, aparentemente sencilla pregunta: **¿Existe un ladrillo de Euler perfecto?**



Un ladrillo de Euler no es más que un paralelepípedo rectangular (o sea una caja de zapatos para que todo el mundo lo entienda) cuyos lados (a, b, c, según la imagen adjunta) y las diagonales de sus caras (d, e, f) tengan una longitud entera.



Hay ejemplos de muchos ladrillos de Euler. Por ejemplo, el hallado por el matemático, maestro de aritmética y creador de calendarios alemán **Paul Halcke** en 1719:

a = 240, b = 117, c = 44. d = 267, e = 244, f = 125

o

a = 140, b = 480, c = 693. d = 500, e = 707, f = 843

Son conocidos otros valores, incluso alguna expresión general, aunque no recoge todas las posibles.

Una caja perfecta sería aquella para la que además la longitud de la diagonal g fuera también un valor entero. En los ejemplos anteriores se comprueba que la longitud de esa diagonal g es, respectivamente,

$$5\sqrt{2929} \text{ y } 13\sqrt{4321}$$

Parece sencillo, ¿verdad? Pues ni se sabe si existe (porque no se ha encontrado ninguno hasta el momento), ni se ha encontrado una prueba de que no exista. Hay ejemplos en los que la diagonal g es entera, pero falla alguna de las otras, como es el caso de

a = 672, b = 153, c = 104, e = 680, f = 185, g = 697

para el que sin embargo d =

$$3\sqrt{52777}$$

Por este motivo, se han definido tres tipos de cuboides semi-perfectos, dependiendo de cuál sea el lado irracional: cuboide cuerpo (si la diagonal g es irracional), cuboide cara (si alguna de las diagonales d, e, f es irracional) y cuboide arista (si a, b, o c son irracionales).

Hace tiempo se demostró que, de existir, el cuboide perfecto debería tener un lado menor de una longitud mayor a 2^32 (= 4.294.967.296). En 2018 **Randall L. Rathbun**, mediante un exhaustivo rastreo informático, publicó una lista con los 160.594 cuboides que encontró, considerando el lado menor con valores entre 44 y 1,76 x 10^11. Por tanto, si alguno se anima, deberían empezar considerando valores mayores que ése.

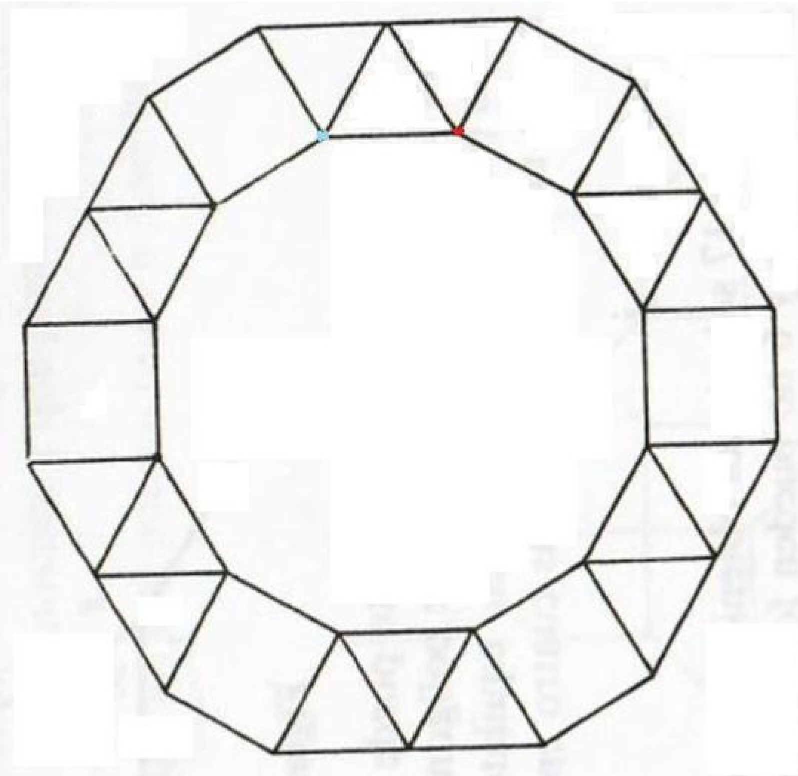
El problema es equivalente a encontrar siete números enteros a, b, c, d, e, f, g, que verifiquen las ecuaciones

$$a^2 + b^2 = d^2$$
$$a^2 + c^2 = e^2$$
$$b^2 + c^2 = f^2$$
$$a^2 + b^2 + c^2 = g^2$$

Los que si existen, y se han descrito muchos, son **paralelepípedos perfectos** (también conocidos como **paralelepípedos diofánticos**). Son aquellos para los que no exigimos que los ángulos de sus caras sean rectos. Examinando los tres ángulos que existen en los ocho vértices de los paralelepípedos diofánticos se han descubierto cinco tipos únicos. Una búsqueda mediante ordenador de 1.981.336.681 tetraedros con seis diagonales racionales en sus caras ha revelado ejemplos interesantes, incluido el **paralelepípedo perfecto de Sawyer-Reiter** (junto a otros cinco), y el cuboide rectangular. También se han descubierto otras formas prismáticas interesantes en las 115 categorías que revelaron las búsquedas por computadora. Cuando uno lee la magnitud de datos como éstos, reflexiona unos minutos y llega a la conclusión de que entonces es bastante improbable que exista ese ladrillo de Euler perfecto. Sin embargo, mientras no se encuentre una demostración de esa no existencia, la cuestión seguirá siendo un enigma.

Por no dejar flecos, ya que lo he mencionado, en 2009 los norteamericanos **Jorge Sawyer y Clifford A. Reiter** dieron el paralelepípedo de lados 271, 106, 103, diagonales de las caras 101 y 183, 266 y 312, 255 y 323, y diagonales del cuerpo 374, 300, 278 y 272 (recuérdese que, al no tener ángulos rectos, tiene cuatro de esas diagonales en lugar de dos).

A diario nos encontramos muchos objetos de estas características (cajas de zapatos y de otros contenidos, envases de leche, ladrillos de obra, cajones, incluso libros). ¿Se animan a tomar medidas de ellos a ver si tienen las siete longitudes descritas enteras, racionales o irracionales? ¿Cuál abunda más? ¿Son óptimas (en el sentido de menor cantidad de material que encierre el mayor volumen posible)? Quizá pueda resultar una actividad motivadora para una clase de secundaria planteada como enseñanza basada en proyectos…



Los teselados uniformes

En los comentarios de la última entrada que redacté sobre los teselados, un lector comentaba que habí

En el teselado de la imagen, con triángulos, cuadrados y dodecágonos, o sea, {3, 3, 4, 12}, fijémonos

Existen muchos más teselados del plano, incluyendo [illegible] variados de [illegible] La Alhambra [illegible]

Alfonso J. Población Sáez es profesor de la Universidad de Valladolid y miembro de la Comisión de divulgación de la RSME.

El ABCDARIO DE LAS MATEMÁTICAS es una sección que surge de la colaboración con

la Comisión de Divulgación de la ***Real Sociedad Matemática Española (RSME)***